Найдите закономерности
и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13; …

В порядке возрастания положительные нечетные числа

10; 19; 37; 73; 145; …

В порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1

6; 8; 16; 18; 36; …

В порядке возрастания положительные числа, кратные 5

½; 1/3; ¼; 1/5; 1/6;

Увеличение на 3 раза

Чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза

1; 3; 5; 7; 9; …

5; 10; 15; 20; 25; …

Увеличение в 2 раза и уменьшение на 1

Числовые последовательности

Содержание

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел N:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1,\quad n,\quad n+1,\quad \ldots$$

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ *называют* *функцией натурального аргумента* *или* *числовой последовательностью* *и обозначают* $y = f(n)$ *или* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *или* $\{y_n\}$.

Величина y_n *называется* *общим членом* *последовательности.*

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, *позволяющей найти любой член последовательности по его номеру* n;

эта формула называется *формулой общего члена*.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … – ряд вида 1/n, где n∈N;

и т.д.

Способы задания последовательностей

1. *Перечислением членов последовательности (словесно).*
2. *Заданием аналитической формулы.*
3. *Заданием рекуррентной формулы.*

Примеры:

1. *Последовательность простых чисел:*

   $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \ldots$

2. *Арифметическая прогрессия:*

   $$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. *Геометрическая прогрессия:*

   $$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число M называют верхней границей последовательности.

Пример: -1, -4, -9, -16, …, $-n^2$, … - ограничена сверху 0.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ *называют* *ограниченной снизу,* *если все ее члены* *не меньше* *некоторого числа.*

Последовательность $\{y_n\}$ *ограниченна снизу, если существует число* m *такое, что для любого* n *выполняется неравенство*

$$y_n \geq m$$

Число m *называют* *нижней границей последовательности.*

Пример: 1, 4, 9, 16, …, n^2, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность *ограничена и сверху и снизу,* *то ее называют* *ограниченной* *последовательностью.*

Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2n – 1, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2n – 1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют монотонными

Пусть a – точка прямой, а r – положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют окрестностью точки a, а число r – радиусом окрестности.

Укажите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

а) a = 0

r = 0,1

(-0,1, 0,1)

в) a = 2

r = 1

(1, 3)

b) a = -3

r = 0,5

(-3,5, -2,5)

г) a = 0,2

r = 0,3

(-0,1, 0,5)

Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал

а) (1; 3)

б) (-0,2; 0,2)

в) (2,1; 2,3)

г) (-7; -5)

$a = 0$
$r = 0{,}2$

$a = 2$
$r = 1$

$a = -6$
$r = 1$

$a = 2{,}2$
$r = 0{,}1$

Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу a при увеличении порядкового номера n.

В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет предел. Это понятие имеет более строгое определение.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{y_n\}$ если для любого $r > 0$ найдется такое число $N = N(r$, зависящее от r, что $|y_n - a| < r$ при $n > N$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y_n = a}$$

Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $r > 0$ можно найти такое число N, что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - r, a + r)$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Рассмотрим последовательность:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$ *– гармонический ряд* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$

Если $m\in N,\ k\in R$, *то* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0}$

Если $|q|<1$, *то* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0}$

Если $|q|>1$, *то последовательность* $y_n=q^n$ *расходится*

Свойства пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c,$ *то*

1. *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c}$$

2. *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc}$$

3. *предел частного равен частному пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}}$$

4. *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb}$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$