

Арифметическая прогрессия

Определение. Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, где каждый последующий член равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом **d**.
Число **d** называется **разностью** арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия

- Если $d > 0$ — арифметическую прогрессию называют **возрастающей**;
- Если $d < 0$ — арифметическую прогрессию называют **убывающей**;
- В случае, если $d = 0$ — все члены прогрессии равны числу a , то арифметическую прогрессию называют **стационарной**.

ФОРМУЛА

n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \quad (1)$$

Это — формула n-го члена арифметической прогрессии.

Пример 1.

$$\text{Дано : } a_1 = -6,$$

$$d = 4$$

$$\text{Найти : } a_{100}$$

Решение

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{100} = -6 + (100 - 1) * 4 = 390$$

Ответ: 390

Решаем

В арифметической прогрессии, первый член которой равен $-3,4$, а разность равна 3 , найдите пятый и одиннадцатый члены.

Решение:

Для нахождения n -ого члена арифметической прогрессии воспользуемся формулой:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Имеем:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d = -3,4 + 4 \cdot 3 = 8,6;$$

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1)d = -3,4 + 10 \cdot 3 = 26,6.$$

Ответ: $8,6$ и $26,6$

Пример 4. Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

а) Известно, что $a_1 = 5$, $d = 4$. Найти a_{22} .

б) Известно, что $a_1 = -2$, $d = 3$, $a_n = 118$. Найти n .

в) Известно, что $d = -2$, $a_{39} = 83$. Найти a_1 .

$$\text{а) } a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89.$$

$$\text{б) } a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$118 = -2 + (n - 1) \cdot 3;$$

$$118 = 3n - 5;$$

$$n = 41.$$

$$\text{в) } a_{39} = a_1 + 38d;$$

$$83 = a_1 + 38 \cdot (-2);$$

$$a_1 = 159.$$

Дано : $a_8 = 130, a_{12} = 166$

Найти: формулу n-го
члена

Решение.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_8 = a_1 + (8 - 1)d = a_1 + 7d$$

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = a_1 + 11d$$

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130 \\ a_1 + 11d = 166 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 130 - 7d \\ d = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 67 \\ d = 9 \end{cases}$$

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 9n + 58$$

$$a_1 + 7d = 130$$

–

$$a_1 + 11d = 166$$

$$-4d = -36$$

$$4d = 36$$

$$d = 9$$

Свойство арифметической прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Решаем

(a_n) – арифметическая прогрессия

$a_{10} = 8, a_{12} = -2.$ Найдите $a_{11}.$

Решение:

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии:

$$a_n = (a_{n+1} + a_{n-1})/2;$$

$$\text{Имеем } a_{11} = (8 - 2)/2 = 3$$

Ответ: $a_{11} = 3$

Арифметическая прогрессия.

Пример.

Найти такие x , что $3x+2$; $x-1$; $4x+3$ – три последовательных члена арифметической прогрессии.

Решение.

Воспользуемся нашей формулой

$$x - 1 = \frac{3x + 2 + 4x + 3}{2}$$

$$2x - 2 = 7x + 5$$

$$-5x = 7$$

$$x = -1\frac{2}{5} = -1.4$$

Проверим, наши выражения примут вид: $-2,2$; $-2,4$; $-2,6$

Очевидно, что это члены арифметической прогрессии и $d=-0.2$

Решаем

Пятый член арифметической прогрессии на 15 меньше второго. Сумма третьего и седьмого её членов равна -6. Найдите третий и четвёртый члены этой прогрессии.

Решение: составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_2 - a_5 = 15, \\ a_3 + a_7 = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + d - (a_1 + 4d) = 15, \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -5, \\ a_1 = 17; \end{cases}$$

Итак: $a_3 = a_1 + 2d$, т.е. $a_3 = 7$,
 $a_4 = a_3 + d$, $a_4 = 2$.

Ответ: $a_3 = 7$, $a_4 = 2$.

Арифметическая прогрессия.

Пример.

При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном остается 7, а при делении девятого члена на пятый в частном получается 2, а в остатке 5. Найти тридцатый член прогрессии.

Решение.

Запишем последовательно формулы 2, 5 и 9 членов нашей прогрессии.

Так же из ус. $a_2 = a_1 + d$ $a_5 = a_1 + 4d$ $a_9 = a_1 + 8d$

Или: $a_9 = 7a_2$ $a_9 = 2a_5 + 5$

Составим систему уравнений: $a_1 + 8d = 7(a_1 + d)$ $a_1 + 8d = 2(a_1 + 4d) + 5$

Решив систему получаем:

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 7(a_1 + d) \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 4d) + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 6a_1 \\ d = a_1 + 5 \end{cases} \quad d = 6a_1 = 1$$

Найдем a_{30}

$$a_{30} = a_1 + 29d = 175$$

Формула СУММЫ n-первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Тренировочные упражнения:

1. (a_n) – арифметическая прогрессия.

$a_1 = 6, a_5 = 26$. Найти S_5 .

Решение:

$$S_n = (a_1 + a_5) : 2 \times 5$$

**Теперь вычислим сумму пяти
первых членов**

арифметической прогрессии:

$$S_5 = (6 + 26) : 2 \times 5 = 80.$$

Ответ: 80.

**2. (a_n) – арифметическая
прогрессия.**

$a_1 = 12, d = -3$. Найти S_{16} .

Решение:

$$S_{16} = (a_1 + a_{16}) : 2 \times 16$$

Заметим, что в данной прогрессии не задан последний член этой суммы. Найдем 16 член прогрессии:

$$a_{16} = 12 + 15 \times (-3) = 12 + (-45) = -33$$

Теперь вычислим сумму: $S_{16} = (12 + (-33)) \times 16 : 2 = (-21) \times 8 = -168$. Ответ: -168.

При решении таких задач можно воспользоваться второй формулой

$$S_{16} = (2a_1 + d(n-1)) : 2 \times 16 = (2 \times 12 + 15 \times (-3)) : 2 \times 16 = -21 : 2 \times 16 = -168. \text{ Ответ: } -168.$$

Пример 1

Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии: 1; 3,5;

Дано:

$\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3,5$$

$$S_{20} = ?$$

Решение:

$$d = 3,5 - 1 = 2,5$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= 1 + 2,5(20 - 1) = \\ &= 1 + 2,5 \cdot 19 = 48,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{1 + 48,5}{2} \cdot 20 = \\ &= 49,5 \cdot 10 = 495 \end{aligned}$$

Ответ:

495

Задача. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии $-42; -38; -34; \dots$, сумма которых меньше 150.

Решение

$$1) S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$a_1 = -42,$$

$$d = a_2 - a_1 = 4$$

$$2) S_n < 150$$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n < 150$$

$$\frac{2 \cdot (-42) + (n-1)4}{2} \cdot n < 150$$

$$(-42 + 2n - 2)n < 150$$

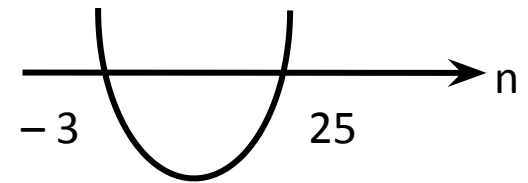
$$(-22 + n)n < 75$$

$$3) n^2 - 22n - 75 < 0$$

$$y = 0; \quad y = n^2 - 22n - 75$$

$$n^2 - 22n - 75 = 0$$

$$n = 25 \text{ или } n = -3$$



$$n \in (-3; 25)$$

n – натуральное число, поэтому

$$n = 1; 2; 3; \dots; 24.$$

Наибольшее число – **24**

Ответ: 24