

# Статическая устойчивость

# Статическая и динамическая устойчивость

## Статическая устойчивость ???

Устойчивость в малом. Устойчивость при малых возмущениях. Применительно к ЭЭС, статическая устойчивость - это способность электроэнергетической системы восстанавливать исходное состояние (режим) после малых его возмущений.

## Динамическая устойчивость ???

Устойчивость в большом. Устойчивость при больших возмущениях. Применительно к ЭЭС, динамическая устойчивость - это способность электроэнергетической системы восстанавливать исходное состояние (режим) после больших возмущений.

# Решение систем линейных однородных ДУ (ОДУ)

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица  
коэффициентов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Вектор  
переменных  
состояния

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Вектор  
первых  
производных  
переменных  
состояния

## Решение систем линейных ОДУ

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Решение системы ОДУ ищется в следующем виде:

$$X = \sum_{i=1}^n N_i e^{(\lambda_i)t} = N_1 e^{(\lambda_1)t} + N_2 e^{(\lambda_2)t} + \dots + N_n e^{(\lambda_n)t}$$

$\lambda$  – собственные числа

$N$  – собственные вектора

# Собственные числа и вектора

- Собственный вектор матрицы – вектор, умножение матрицы на который дает тот же вектор, умноженный на некоторое число, называемое собственным числом матрицы.

$$AN = \lambda N$$

- $A$  – матрица ОДУ;
- $N$  – собственный вектор;
- $\lambda$  – собственное число.

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $[-1 \ -6; 2 \ 6]$  – матрица;
- $[-2; 1], [-3; 2]$  – собственные вектора;

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $2$  и  $3$  – собственные числа.

# Поиск собственных чисел и векторов

$$AN = \lambda N$$

$$(A - E\lambda)N = 0$$

$$\det(A - E\lambda) = 0$$

- $A$  – матрица ОДУ;
- $N$  – собственный вектор;
- $\lambda$  – собственное число.
- $E$  – единичная матрица

## Решение систем линейных ОДУ

$$x(t) = Ne^{\lambda t}$$

$$x(t) = Ne^{\alpha t + i\beta t} + Ne^{\alpha t - i\beta t}$$

$$\lambda \in \mathfrak{R},$$

$$\lambda > 0.$$

$$\lambda \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha > 0.$$

$$\lambda \in \mathfrak{R},$$

$$\lambda < 0.$$

$$\lambda \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha < 0.$$

## Устойчивость системы линейных ОДУ

- **Линейная система устойчива**, если все собственные числа имеют отрицательные действительные части.
- **Линейная система неустойчива**, если хотя бы одно собственное число имеет положительную действительную часть.
- **Состояние линейной системы не определено**, если одно или более собственных чисел имеют действительную часть равную нулю, а все остальные собственные числа имеют отрицательные действительные части.



# Анализ устойчивости системы нелинейных ДУ

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

$$\frac{dX}{dt} = f(X)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial f(X_0)}{\partial X} X$$

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(X_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(X_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Матрица Якоби  
Якобиан**

## Устойчивость системы **Н**Елинейных ДУ

- Если все собственные значения якобиана имеют *отрицательные действительные части*, то нулевое решение  $X = 0$  исходной системы и линеаризованной является *устойчивым*.
- Если хотя бы одно собственное значение якобиана имеет *положительную действительную часть*, то нулевое решение  $X = 0$  исходной системы и линеаризованной системы является *неустойчивым*.

# Нелинейная система Станция - ШБМ

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} \left( P_m - \frac{EV}{X} \sin \delta - D\omega \right).$$

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial X} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial(\omega)}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \left( \frac{1}{M} \left( P_m - \frac{EV}{X} \sin \delta - D\omega \right) \right)}{\partial \delta} \end{array} \quad \frac{\partial(\omega)}{\partial \omega} \quad \frac{\partial \left( \frac{1}{M} \left( P_m - \frac{EV}{X} \sin \delta - D\omega \right) \right)}{\partial \omega} \right)$$

## Нелинейная система Станция - ШБМ

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{EV}{MX} \cos \delta & -\frac{D}{M} \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + \frac{\lambda D}{M} + \frac{EV}{MX} \cos \delta = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\frac{EV}{MX} \cos \delta & -\frac{D}{M} - \lambda \end{pmatrix}$$





$$\lambda \left( \frac{D}{M} + \lambda \right) + \frac{EV}{MX} \cos \delta = 0$$

$$x_1 = -\frac{D}{M} + \sqrt{\left(\frac{D}{M}\right)^2 - \frac{4EV}{MX} \cos \delta}$$
$$x_2 = -\frac{D}{M} - \sqrt{\left(\frac{D}{M}\right)^2 - \frac{4EV}{MX} \cos \delta}$$

# Анализ собственных чисел системы ШБМ

- Проведем анализ на тестовой схеме со следующими параметрами:  $M_0=0.1$ ;  $D_0=0.1$ ;  $X_0=0.5$ ;  $E_0=1$ ;  $P_{m0}=1.5$ ;  $V_0=1$ .
- $D/M=1$ ,  $4EV/MX=4/(0.1*0.5)=80$ .
- $X_1=-1 + \sqrt{1-80*\cos(\delta)}$ ;
- $X_2=-1 - \sqrt{1-80*\cos(\delta)}$ ;
- $\delta \in [0, \pi/2)$ ;  $\cos(\delta) \in [1, 0)$ ,  $X_1$  и  $X_2$  – комплексные числа с отрицательной действительной частью. Система статически колебательно устойчива.
- $\delta \in [\pi/2, \pi]$ ;  $\cos(\delta) \in (0, -1]$ , как минимум одно положительное действительное собственное число. Система статически аperiodически НЕустойчива.
- $\delta \equiv \pi/2$ , неопределенная ситуация, так как  $X_1 \equiv 0$ ,  $X_2 < 0$ .

# Нелинейная система Станция - ШБМ

```
← → |   Source on Save |   | 
```

```
1 M0=0.1; D0=0.1; X0=0.5; E0=1; Pm0=0.5; V0=1
2 parameters<-c(M=M0,D=D0,X=X0,E=E0,Pm=Pm0,V=V0)
3 #(dx/dt=0)
4 omega0=0
5 delta0=asin(Pm0*X0/E0/V0)
6 state<-c(delta=delta0,omega=omega0)
7 Parallel<-function(t,state,parameters){
8   with(as.list(c(state,parameters)),{
9     dDelta<-omega
10    dOmega<-1/M*(Pm-E*V*sin(delta)/X-D*omega)
11    list(c(dDelta,dOmega))
12  })
13 }
14 times<-seq(0,15,by=0.01)
15 library(deSolve)
16 out<-ode(y=state,times=times,func=Parallel,parms=parameters)
17 plot(out)
```

# Анализ статической устойчивости ШБМ

- $\delta \equiv \pi/2$  – точка, отделяющая состояния устойчивого и неустойчивого равновесий. При  $\delta \equiv \pi/2$   $P_{m0max} \equiv 2.0$ .
- Рассмотрим положительное и отрицательное малые изменения мощности вблизи точки  $\delta \equiv \pi/2$ .
- В соответствии с предшествующим анализом, система должна быть статически колебательно устойчива при отклонении  $P_{m0max}-dP$  и статически апериодически неустойчива при  $P_{m0max}+dP$ , где  $dP$  – малое изменение механической мощности турбины.

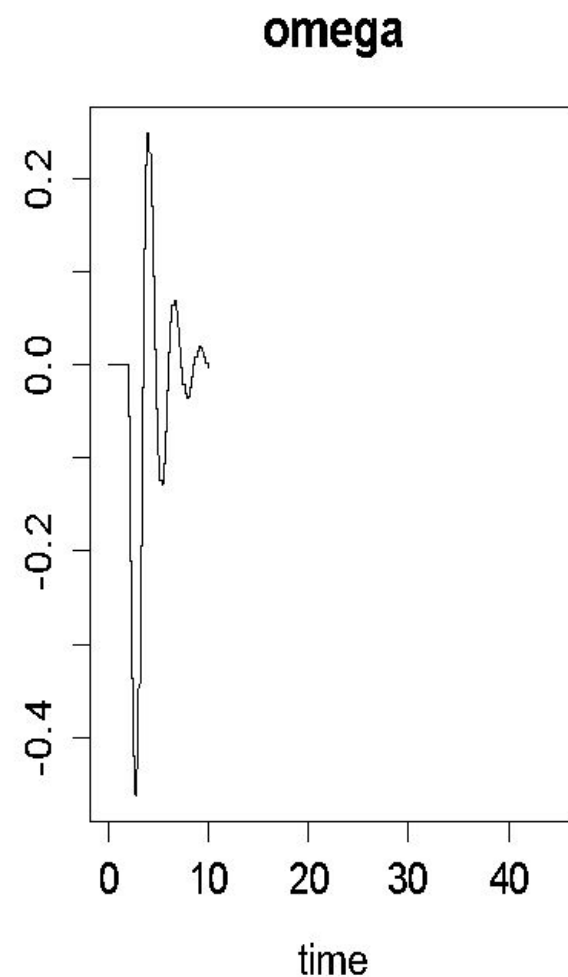
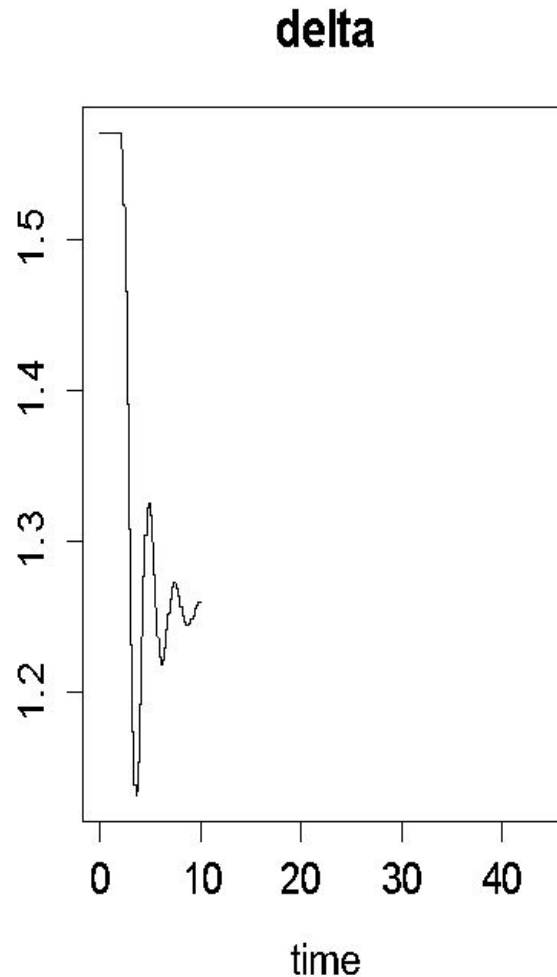
# Устойчивость ШБМ. $P_{m0max-dP}$

```
7 state<-c(delta=delta0,omega=omega0)
8 Parallel<-function(t,state,parameters){
9   with(as.list(c(state,parameters)),{
10    if(1){
11      if(t>2){
12        Pm=1.9;
13      }
14    }
15  }
```



Снижение мощности  
на 0.1 о.е.

Система  
статически  
колебательно  
устойчива



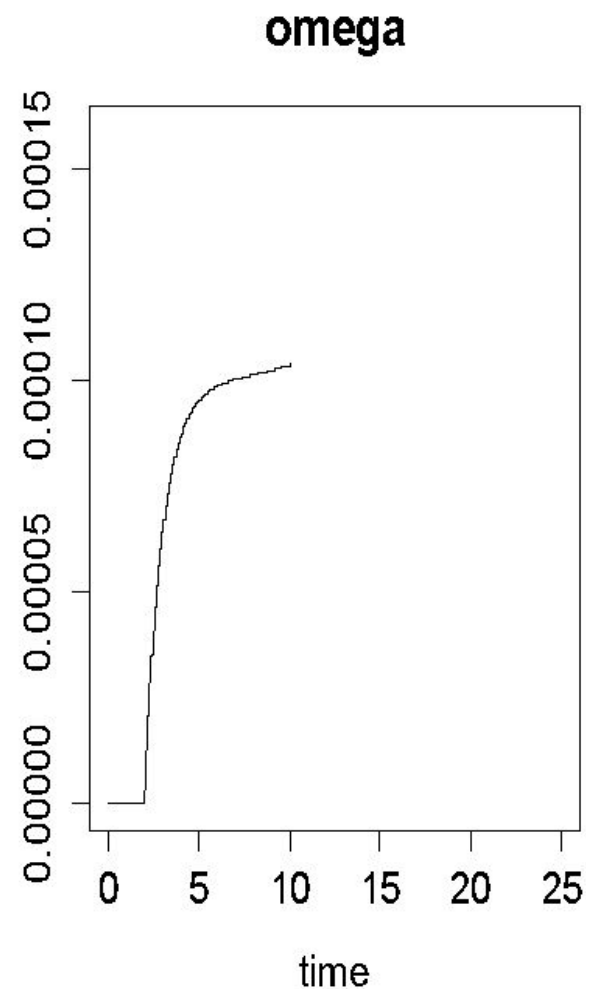
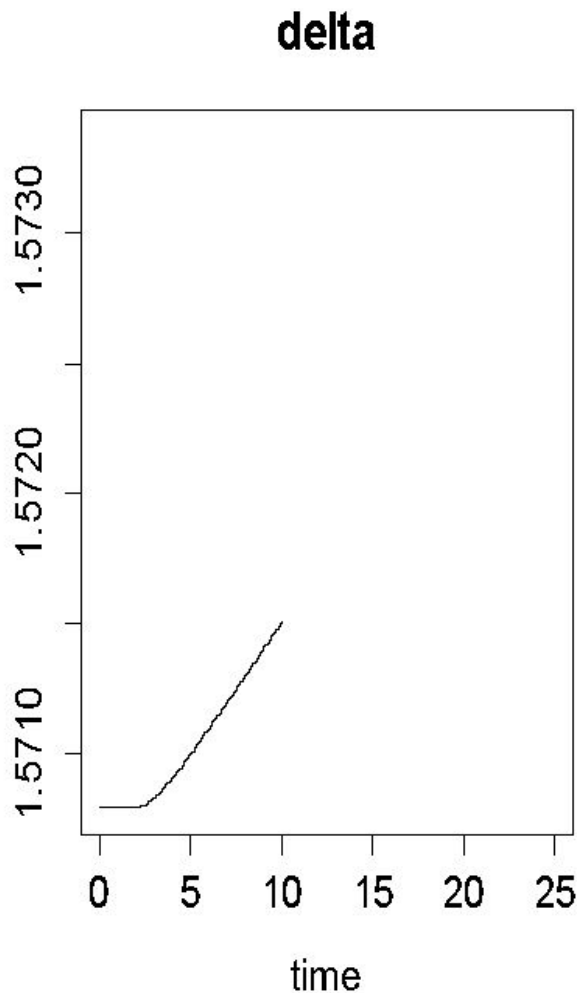


# Устойчивость ШБМ. $P_{m0max+dP}$

```
7 state<-c(delta=delta0,omega=omega0)
8 Parallel<-function(t,state,parameters){
9   with(as.list(c(state,parameters)),{
10    if(1){
11      if(t>2){
12        Pm=2.00001;
13      }
14    }
15  }
```

Увеличение мощности  
на 0.00001 о.е.

Система  
статически  
апериодически  
НЕустойчива



# Работа в статически неустойчивой точке

- $\delta_0 = 0.93 \text{ рад} = 53 \text{ град}$ . – статически устойчивая точка, которой соответствует  $P_{m0} = 1.60 \text{ е}$ .
- $\delta_0 = \pi - 0.93 \text{ рад} = 127 \text{ град}$ . – статически НЕустойчивая точка, которой также соответствует  $P_{m0} = 1.60 \text{ е}$ .
- Аналогично. Рассмотрим положительное ( $P_{m0} + dP$ ) и отрицательное ( $P_{m0} - dP$ ) малые изменения мощности вблизи точки  $\delta_0 = \pi - 0.93 \text{ рад} = 127 \text{ град}$ .

# Работа в статически неустойчивой точке

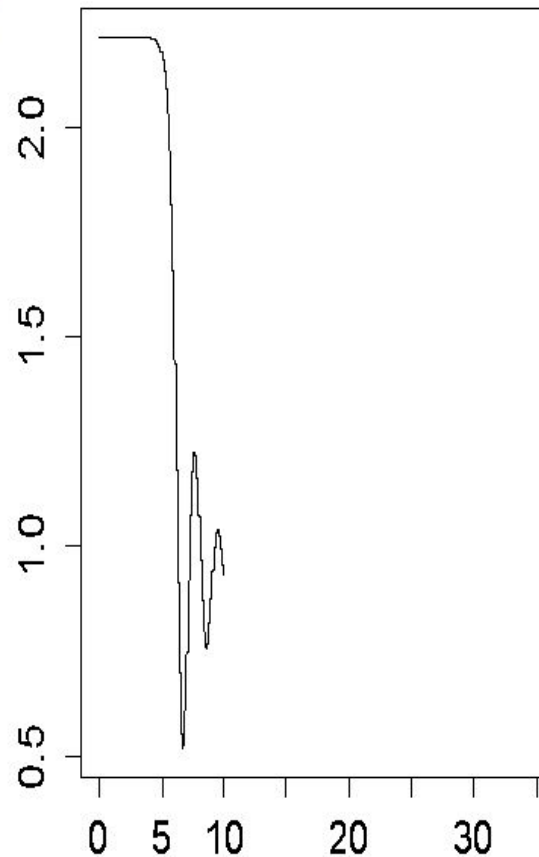
## Pm0-dP

```
7 state<-c(delta=delta0,omega=omega0)
8 Parallel<-function(t,state,parameters){
9   with(as.list(c(state,parameters)),{
10    if(1){
11     if(t>2){
12      Pm=1.59999;
13    }
14  }
}
```

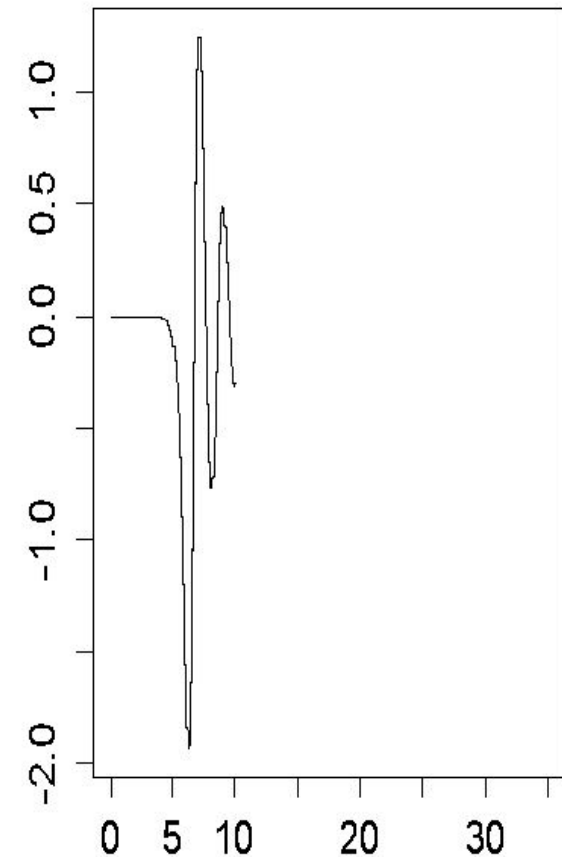
Снижение мощности  
на  $1e-5$  о.е.



delta



omega



# Работа в статически неустойчивой точке

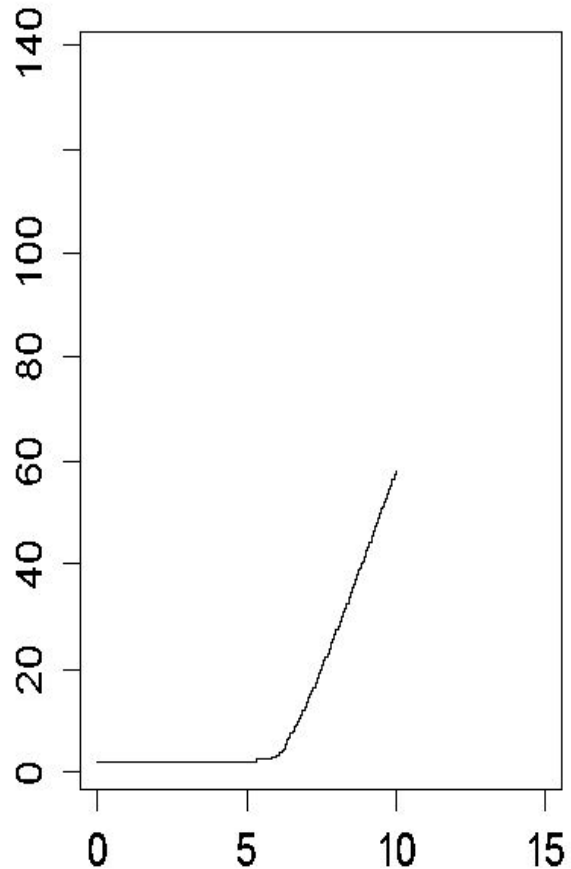
## $P_{m0} + dP$

```
7 state<-c(delta=delta0,omega=omega0)
8 Parallel<-function(t,state,parameters){
9   with(as.list(c(state,parameters)),{
10    if(1){
11     if(t>2){
12      Pm=1.60001;
13     }
14   }
}
```

Увеличение мощности  
на  $1e-5$  о.е.



delta



omega

