СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ГРАДИЕНТ. ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ.

Если в каждой точке M заданной области пространства (чаще всего размерности 2 или 3) поставлено в соответствии некоторое (обычно действительное) число u, то говорят, что в этой области задано ***скалярное поле***

$$u = u(M) = u(x, y, z)$$

Примеры скалярных полей на трёхмерном пространстве:

- поле температуры внутри тела (подразумевается, что она, вообще говоря, разная в разных точках тела);
- поле потенциала φ электрического заряда ;
- поле давления в жидкой среде.

Примеры плоских (двумерных) скалярных полей:

- глубина моря, отмеченная каким-либо образом на плоской карте;
- плотность заряда на плоской поверхности проводника.

Скалярное поле можно представить графически с помощью **поверхностей уровня** (также называемой изоповерхностями).

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек пространства, в которых функция *u* принимает одно и то же значение *C*, то есть поверхность уровня определяется уравнением .

$$u(x,y,z)=C$$

Важнейшей характеристикой скалярного поля является градиент (grad):

Градиентом дифференцируемого скалярного поля $u(M) = u(x, y, z)$ называется вектор

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Физический смысл градиента

Вектор $grad\, u$ указывает направление наиболее быстрого роста функции $u(M)$, а его величина $|grad\, u|$ дает скорость этого роста.

Если в каждой точке $M(x, y, z)$ некоторой области V пространства (или плоскости) определен вектор

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q\left(x, y, z\right)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

то говорят, что в области задано векторное поле

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = \vec{a}\left(x, y, z\right)$$

Примерами векторного поля являются

поля скорости и ускорения в текущей жидкости или газе, поле силы гравитации, поле интенсивности электростатического поля и тому подобные.

Вообще, примером векторного поля может служить поле сил любой природы.

Важнейшими характеристиками векторного поля являются дивергенция (*div*) и ротор (*rot*)

Дивергенцией (или расходимостью) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)=(P,Q,R)$ называется скаляр

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Если $div\,\vec{a}(M_0) > 0$, то т. M_0 называется источником.

Если $div\,\vec{a}(M_0) < 0$, то т. M_0 называется стоком.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю называется соленоидальным (то есть не имеет ни источников, ни стоков).

Ротором (или вихрем) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)=(P, Q, R)$ называется вектор

$$rot\ \vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Если для всех точек поля ротор равен нулю, то такое поле называется **потенциальным** (безвихревым).

Векторное поле называется **гармоническим**, если во всех точках поля

$$div\,\vec{a}(M) = 0 \quad \text{и} \quad rot\,\vec{a}(M) = 0$$

ПРОСТЕЙШИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

К простейшим векторным полям относятся :

- соленоидальное;
- потенциальное;
- гармоническое .

Производная по направлению

Пусть функция $u(M) = u(x, y, z)$ определена в некоторой области пространства V.
Из заданной точки $M(x, y, z)$ проведем вектор $\vec{s}$. На луче, задаваемом вектором $\vec{s}$ и точкой $M(x, y, z)$, отметим точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Расстояние между точками обозначим через Δs. Поэтому

$$\Delta s = \left|\overrightarrow{MM'}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Тогда при переходе из M в M' функция $u(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z)$$

Производная по направлению

Если существует предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$, когда

$\Delta s \to 0$, то он называется ***производной по направлению***

функции $u(x, y, z)$ в точке M ***по направлению вектора***

$\vec{s}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$.

Теорема. Если функция $u(x,y,z)$ дифференцируема в области V, то ее производная по любому направлению $\vec{s}$ существует в каждой точке области и равны

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, т.е. координаты единичного вектора $\vec{s}_0$ направления

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}=\vec{s}_0$$

Спасибо
за
внимание!