А. Б. ШУР

# Не роскошь, а хлеб насущный - МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЧАЙНИКОВ

1

Алчевск, 2008

# Авторское предисловие

Стало традицией жаловаться на математическое невежество “современной  молодежи”.  Действительно, латать на ходу дыры в предыдущем образовании приходится, отрывая дефицитное время от изучения профильных курсов.   ***Но массовость явления слишком велика, чтобы списывать его на простую недобросовестность или лень.***

Здесь нужна помощь, и я могу ее оказать.

Главная трудность проистекает от психологических установок: неверие в нужность математики для своей профессии,  неверие в возможность ее освоить и нежелание иметь с ней никакого дела. Первопричины разные: тут и морально-политический климат в обществе и государстве, и уровень жизни, и семейное воспитание… Часто говорят – вообще все рухнуло за последние 15-20 лет. Но это верно лишь отчасти.

На протяжении многих лет я преподавал в ДонГТУ металлургические и смежные дисциплины. Начиная любой учебный курс, давал простой тест на понимание понятия производной. В последнее время с ним, как правило, не справляется никто. Но ведь и в благополучные 60-е годы это удавалось не более, чем одному - двоим из группы.

Так что события последних лет лишь добили и до того невысокий уровень, и не будет большой натяжкой оценить КПД математического образования в 5%.

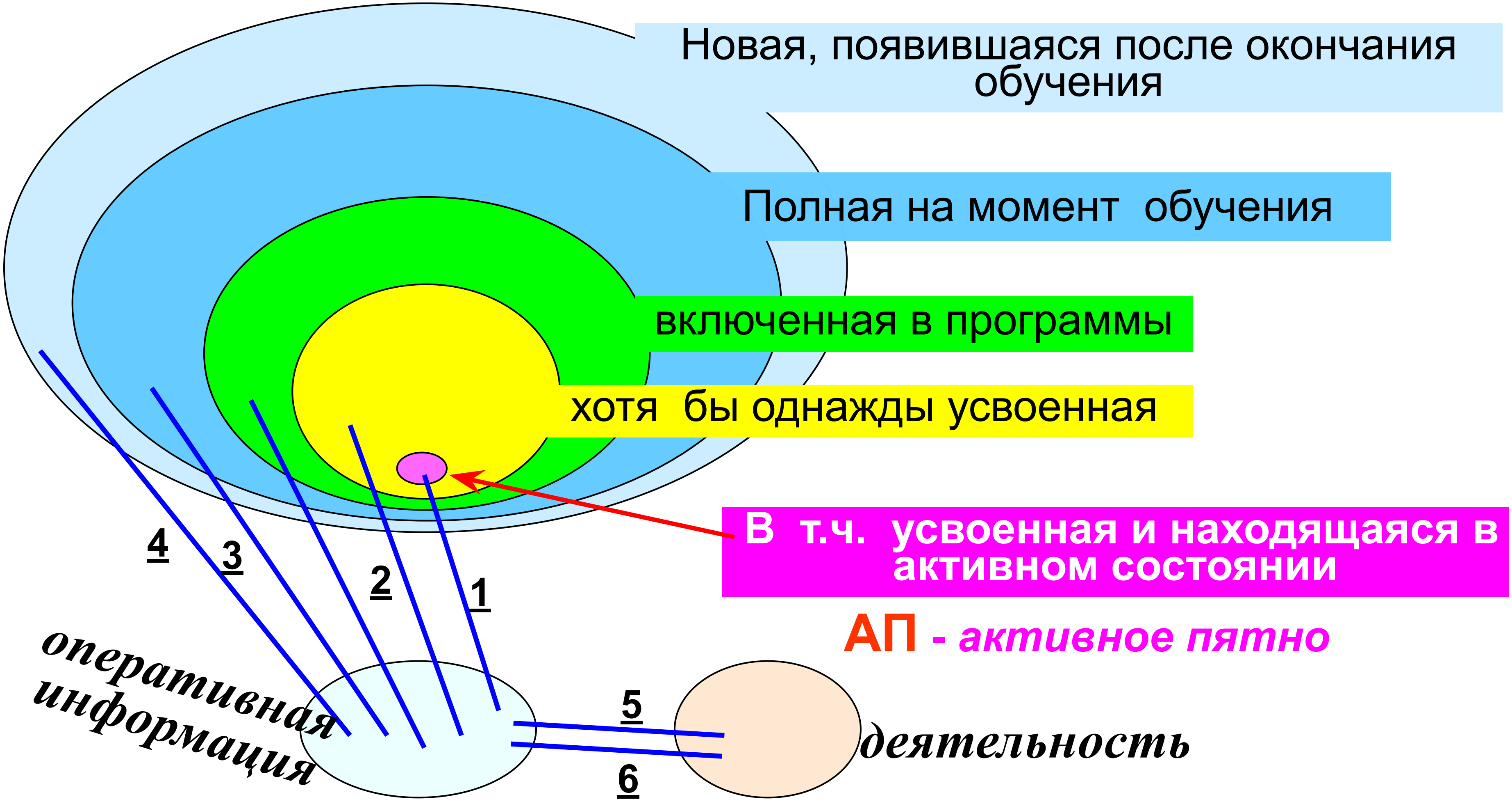
Ответ на вопрос «ЧТО ДЕЛАТЬ» можно получить, если задуматься над судьбой информации, получаемой в процессе обучения.

Вопрос: ***что такое образование?***

***Ответ: То, что остается, когда забудешь все, чему учили***.

«То, что остается» – позволит в нужную минуту восстановить или пополнить остальное. Как оно выглядит?

# ИНФОРМАЦИЯ:




**1** - использование активных знаний и умений, полученных при обучении
**2** - восстановление забытых или неусвоенных ранее знаний
**3** - расширение базы знаний
**4** - пополнение знаний из вновь полученной научной информации
**5** - использование стихийно поступающей информации
**6** - получение и использование необходимой информации по запросам

Если процесс забывания неизбежен, его нужно правильно организовать.

Состав и структура Активного Пятна – это и есть качество обучения!

Низкое

Высокое

АП – хаотический склад случайно запомнившихся сведений.

АП – хорошо структурированная система ключевых фактов и идей.

# Итак, задача – не гоняясь за объемом, сформировать хорошее активное пятно.

Это значит: ***надежно усвоить минимум – основной скелет знаний и умений*** (здесь – математических), и ***запомнить их навсегда***. Притом запомнить готовыми для практического использования – в любую минуту, как только потребуется.

***Практическое использование*** – не только прямая инженерная деятельность, но и последующее самообразование.

Для этого требуется:

**1) выделить из массы сведений ключевые;**

2) глубоко прочувствовать их смысл и содержание ***на простейших наглядных примерах***;

3) напрямую связать между собой теоретические первоосновы и практические приемы.

**Цель пособия – помочь именно в этом.**

**Оно содержит лишь минимум, необходимый для ее достижения, и ни в коей мере не претендует на полноту. Пособие соответствует скорее школьным, чем вузовским программам – но именно на этом уровне и возникают проблемы.**

# Основные отличия принятой схемы изложения от традиционной.

***Первое***. В отдельный раздел вынесено все, что касается ***линейных зависимостей*** (***1-й уровень***). **Для них понятия производной и интеграла вводятся одновременно и параллельно.**

После введения всего, что возможно, на *этом* уровне, те же понятия обобщаются для **нелинейных зависимостей** (***2-й уровень***).

И лишь ***после*** этого изучается техника дифференцирования и интегрирования.

*Обоснование*. При “обычном” размещении сплошь и рядом, добросовестно выучив определения производной и интеграла и даже формулы дифференцирования и интегрирования, проходят мимо главного: не владеют этими понятиями на интуитивном уровне, не осознают их единства и взаимосвязей. Словом, за деревьями не видят леса. А потому не могут ими пользоваться, что и выявляет тот самый тест.

Этот барьер и преодолевается выделением первого уровня: операции дифференцирования и интегрирования вырождаются в примитив, и можно говорить о главном, не отвлекаясь на усложнения и подробности.

В учебной задаче *главное* совсем не то, что составляет научную суть изучаемого материала. Ее, эту суть, освоить необходимо, но начинать нужно не с нее, а с более простого.

Напомним совет Я.Б. Зельдовича [2]: вначале пойми смысл основных понятий, а к вопросу о строгости доказательств вернись позже, став старше и образованнее.

***Второе.*** Техника дифференцирования вводится с использованием ***метода структурных схем*** (МСС), в связи с чем разделу о дифференцировании предшествует краткое введение в МСС.

Метод существенно облегчает жизнь. Он заимствован из теории автоматического управления, но это не частный вычислительный прием, каким его многие считают, а универсальный общенаучный аппарат.

Его невостребованность во многих областях – противоестественный анахронизм, который нужно преодолеть. Кратчайший путь к этому – включить его в состав базового математического образования.

Его преимущества проявляются уже при введении правил дифференцирования. Более ощутимы они становятся при дифференцировании сложных и особенно неявных функций. Но и это – лишь часть еще больших его достоинств, проявляемых в прикладных областях.

***Третье.*** Перед разделом о правилах дифференцирования функций одного переменного (**ПДФ1**) **кратко** вводятся понятия о функциях двух переменных (Ф2) и о частных производных. Это (особенно в совокупности с МСС) позволяет **явно** ссылаться на **Ф2** при изложении **ПДФ1**, где они на самом деле используются, но в традиционной схеме неявно и практически бессознательно – с ущербом для понятности.

***Четвертое.*** Интегральное исчисление, вопреки традиции, вводится начиная с определенного интеграла, а обратность действий дифференцирования и интегрирования не постулируется, а доказывается.

Смысл в том, что именно определенный интеграл имеет конкретный физический смысл и идет от реальных физических и технических задач. Неопределенный интеграл – подчиненное служебное средство, необходимое для вычислительных целей. Выпячивание его на первый план дезориентирует новичка, он вынужден долгое время решать трудные задачи, не зная, для чего они нужны. Изучая правила интегрирования, нельзя заслонять ими то, что требуется в первую очередь. Такой порядок изложения не новость (см., например, [2]), но на фоне обособленного линейного случая он становится еще прозрачнее и эффективнее.

После того, как материал будет пройден, повторять его можно в любом другом порядке. Более того, дальнейшее повторение и более глубокое изучение полезно вести по другим учебникам (например [1]), где материал изложен полнее и строже, и именно поэтому – труднее для начинающих или многое забывших.

Если кто-то сочтет предлагаемый уровень слишком для себя примитивным, это означает, что он уже созрел для чтения более серьезной литературы. Но и ему полезно проверить себя, решая самостоятельно приводимые примеры. Мой многолетний опыт свидетельствует о том, что этот уровень для большинства – необходимый промежуточный этап; нередко именно он затрудняет "прошедших" и "сдавших" математику на уровне, казалось бы, намного более высоком.

## *Обзор и пояснения к структуре пособия*

**В главе 1 вводятся понятия о производных и интегралах для линейных функций.**

**В главе 2 эти понятия обобщаются на функции произвольного вида.**

**В главе 3 дается введение в метод структурных схем в адаптированной форме**

**В главе 4 рассматривается техника дифференцирования и интегрирования, вначале для элементарных функций.**

Глава 1.

# ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

## (быстрое начало)

**Основные понятия математического анализа – *производная и интеграл*. Понять их суть и взаимосвязь – самое главное для уверенного движения дальше.**

**С точки зрения *знатока*, заголовок этого раздела несколько несуразен. Для линейного случая эти понятия вообще не требуются – связанные с ними задачи элементарно решаются и без них. Пусть Вас это не смущает и не кажется ненужным усложнением.**

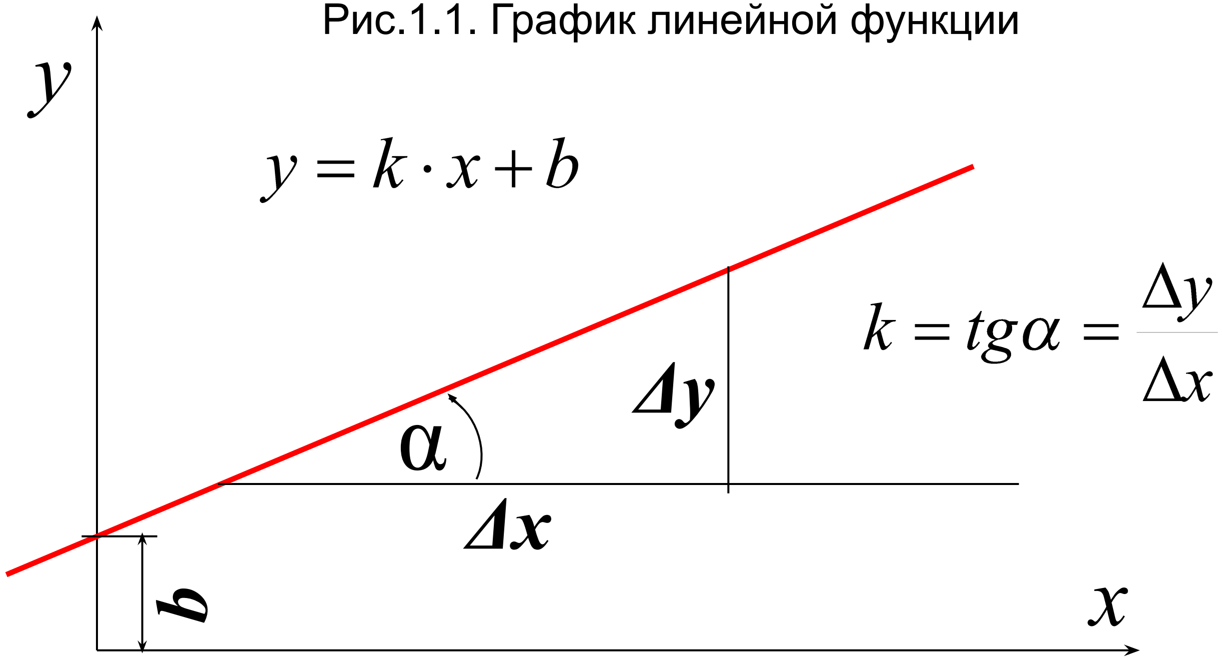
**Когда задача прозрачна и ответ очевиден, гораздо легче понять и усвоить то, что на самом деле понадобится позже – для задач нетривиальных.**

***Откладывать знакомство с ними до этого момента – то же самое, как, по пословице, идя на охоту, начинать кормить собак.***

# 1.1. Производная

1.1.1. Линейная функция, по определению, есть функция первого порядка. Простейшее выражение для нее: $\boldsymbol{y = k \cdot x + b}$, а график в прямоугольных координатах имеет вид прямой линии. И обратно: любой (не вертикальной) прямой линии соответствует вполне определенная линейная функция.

Рис.1.1. График линейной функции




**Название неточное – линии бывают и кривые. Но к этому все привыкли, и нужно просто помнить, что термин применяется не в своем точном значении.**

1.1.2. ***Главное свойство линейной функции*** – в том, что ее приращение *пропорционально* приращению аргумента:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x$$

*Коэффициент пропорциональности* в этом выражении и есть **производная – отношение приращений функции и аргумента:**

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Подчеркнем: ***такое определение производной относится лишь к простейшему частному случаю – линейным функциям.*** Но *для них* оно справедливо при любых, сколь угодно больших приращениях, и для выбранной функции *значение производной постоянно при любых значениях аргумента*. Более точное определение для общего случая см. в главе 2.

Геометрически ***производная*** есть ***мера крутизны***, то есть, отношение величины подъема к величине продвижения вперед. Для лестницы (точнее, для сопровождающего ее пандуса) – отношение высоты ступеньки к ее длине (по ходу).

1.1.3. Тригонометрически производная – это ***тангенс*** угла между горизонтальной линией и графиком функции. Или, построив на этих линиях прямоугольный треугольник – отношение его вертикального катета к горизонтальному. Обычно говорят: ***противолежащего к прилежащему***.

Но в таком определении недостает эмоциональности: ничего не стоит забыть его, или запомнить с точностью до наоборот, или перепутать с синусом. Для мнемоничности стоит его дополнять для себя менее научным, но более понятным: тангенс – мера крутизны, и чем круче подъем, тем больше тангенс. Синус – тоже мера крутизны, но он меняется от 0 до единицы, а тангенс – до бесконечности.

Как видим, для преемственности с элементарной математикой из всей тригонометрии нам пока понадобился один лишь тангенс. ***В аналитической геометрии ту же величину называют еще угловым коэффициентом.***

1.1.4. Итак, тангенс, угловой коэффициент, производная – все это об одном и том же. И, однако, это не просто синонимы – между ними есть и различия:

- **тангенс – принадлежность *угла*,**
- **угловой коэффициент – принадлежность *прямой*,**
- **производная – понятие, приложимое *не только к линейной* функции.**

Кроме того, если по осям отложены величины с разными размерностями или в разных масштабах, ***значения тангенса угла и углового коэффициента различны*** – для перехода от одного к другому обязательно нужно учесть масштабные коэффициенты (сколько единиц изображаемой величины укладывается в единицу длины каждой координатной оси). **Угловой коэффициент равен тангенсу, умноженному на отношение масштабных коэффициентов функции и аргумента**.

1.1.5. Если по оси абсцисс откладывать время, а по оси ординат – пройденный путь, то производная есть *скорость* движения. Если ***путь*** понимать в обобщенном смысле, то так же выражается и скорость любого изменения – например, скорость протекания химической реакции или скорость нагрева воды в чайнике.

1.1.6. С другой стороны, производная – это мера влияния аргумента на функцию. В экономике для нее применяют свое название – эластичность (относимое к спросу или предложению) – отношение изменений цены и числа продаж. Впрочем, и сама цена – тоже производная: отношение порции дохода к порции проданного товара. В автоматике – коэффициент усиления или коэффициент передачи. Итак, скорость, эластичность, цена, коэффициент усиления, коэффициент передачи –неполный список синонимов, часть из которых общеупотребительны.

**1.1.7. Терминологическое замечание. Существует магия слов. Подходящее название – ключ к пониманию. И наоборот, неудачное – отпугивает, создает впечатление сложности, чуждости, уводит в сторону от понимания сути.**

***Производная*** **– название весьма неудачное. Оно никак не характеризует обозначаемое понятие – ни его сущность, ни способ получения, ни область применения. Всего лишь некая функция, происходящая от другой функции.**

**Но ведь существует множество объектов, происходящих от других объектов, и к каждой такой паре (исходное– вторичное) приложимо то же название. Например, в химии: вещество** ***B*****,** ***производное*** **от вещества** ***A*** **– в смысле, не имеющем ничего общего с изучаемым здесь.**

**Об этом нужно помнить и противостоять ложному ощущению трудного и непонятного. На самом деле понятием про*****изводная*** **(в математическом смысле) владеет каждый человек на житейском уровне, даже если он не слыхал этого слова. И каждому знакомы термины, применяемые в разных науках и в быту: скорость, крутизна, плотность, цена, и т.д., но люди в большинстве не знают или не задумываются о том, что каждое из этих слов – и есть производная на языке конкретной задачи.**

1.1.8. Производную функции принято обозначать как ту же функцию со штрихом. Например, ***y'*** – производная функции ***y***. Другое ее обозначение рассмотрим позже.

1.1.9. Процедура нахождения производной называется дифференцированием. Существуют два разных подхода к ней, называемые численным и аналитическим. В основу их обоих положена формула: $y' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, которой мы пока и ограничимся.

1.1.10. Для линейной функции вида $y = k \cdot x + b$, по определению, как уже говорилось, производная есть угловой коэффициент: $y' = k$.

В частном случае постоянной величины график функции есть горизонтальная линия, угол ее наклона к оси абсцисс, а значит, и его тангенс, равны нулю. Поэтому для $y = const$ имеем $y' = 0$.

---

***Пока ограничимся приведенными сведениями о производной и вернемся к ней после столь же кратких сведений об интеграле.***

# 1.2. Интеграл

## 1.2.1. Определенный интеграл, как площадь

В отличие от производной, название “интеграл” вполне содержательно. В переводе – сумма, и в этом или сходных смыслах оно употребляется не только в математике.

Причину такого названия раскроем позже (см. гл.2, п.2.2).

Пусть некоторая функция задана своим графиком в прямоугольных координатах. Назовем определенным интегралом этой функции в пределах от $a$ до $b$ площадь, заключенную между осью абсцисс, графиком функции и двумя вертикальными отрезками с абсциссами $a$ и $b$, соединяющими график с осью. Величины $a$ и $b$ называют нижним и верхним пределами интегрирования.

Для частного случая функции – положительной постоянной величины, графиком служит горизонтальная линия, расположенная выше оси абсцисс. Для этого случая определенный интеграл вычисляется элементарно, как площадь прямоугольника.

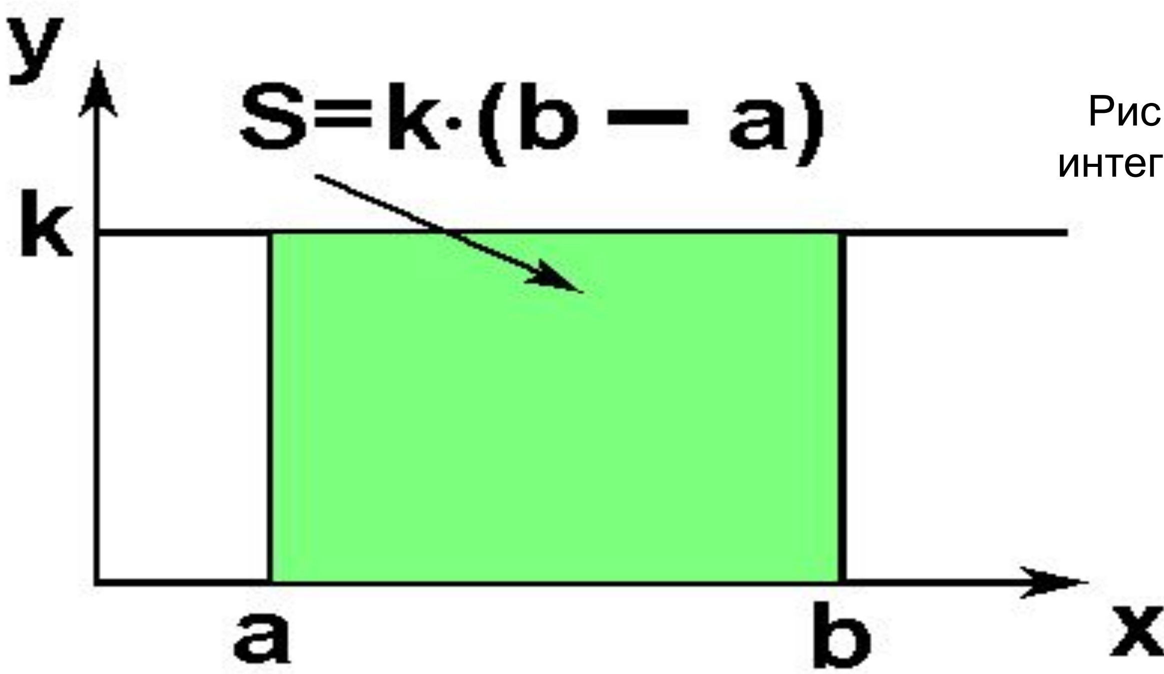



Рис.1.2. Определенный интеграл для простейшего случая.

Временно будем пользоваться показанным упрощенным обозначением интеграла. Обратим внимание на то, что определенный интеграл ***с постоянными пределами*** есть не функция, а ***число***.

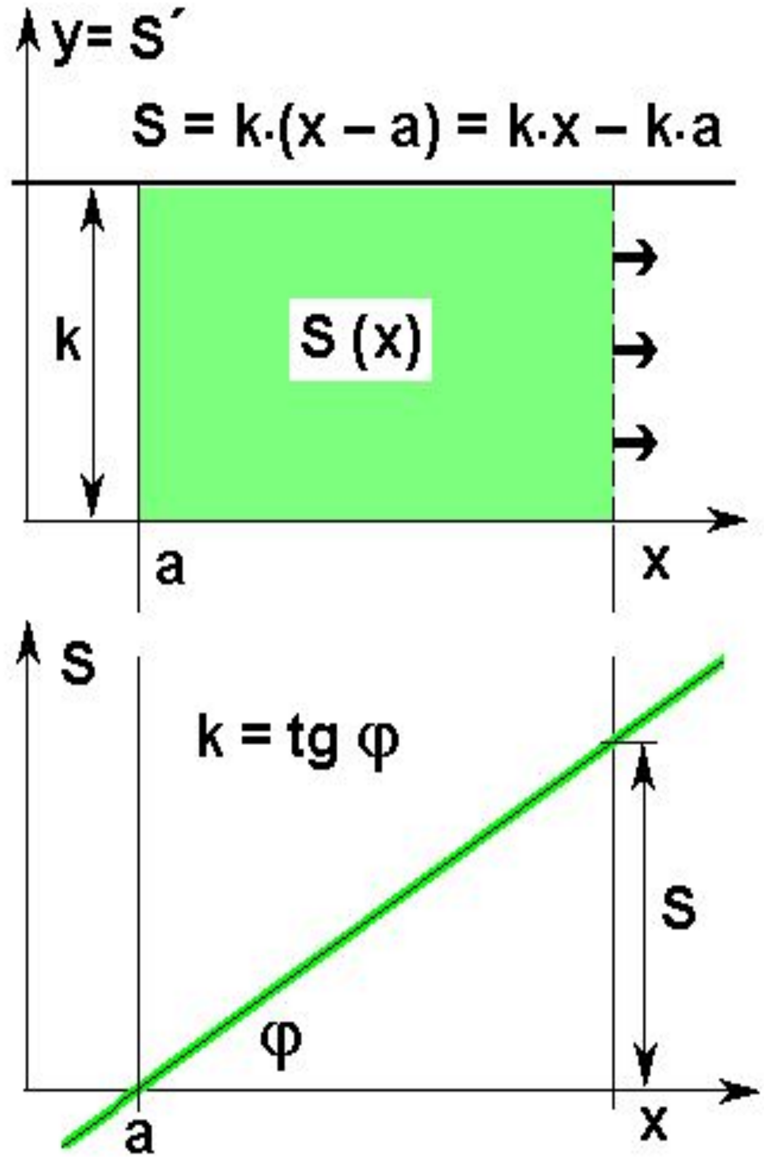
## 1.2.2. Интеграл с переменным верхним пределом и взаимная обратность действий дифференцирования и интегрирования

Теперь обозначим верхний предел через $x$ и будем непрерывно двигать его вправо. Как видим, если верхний предел ***переменный***, то интеграл есть уже ***не число, а функция*** того же аргумента, а график ее (в нашем случае) – прямая линия с угловым коэффициентом $k$, равным высоте прямоугольника: ***площадь, как функция абсциссы, пропорциональна этой высоте***. График пересекает ось абсцисс в точке $x = a$ (нижний предел).

Мы уже знаем (см. п. **1.1**), что производная ***такой*** функции равна ее угловому коэффициенту, а он равен $k$ – ординате исходного горизонтального графика.

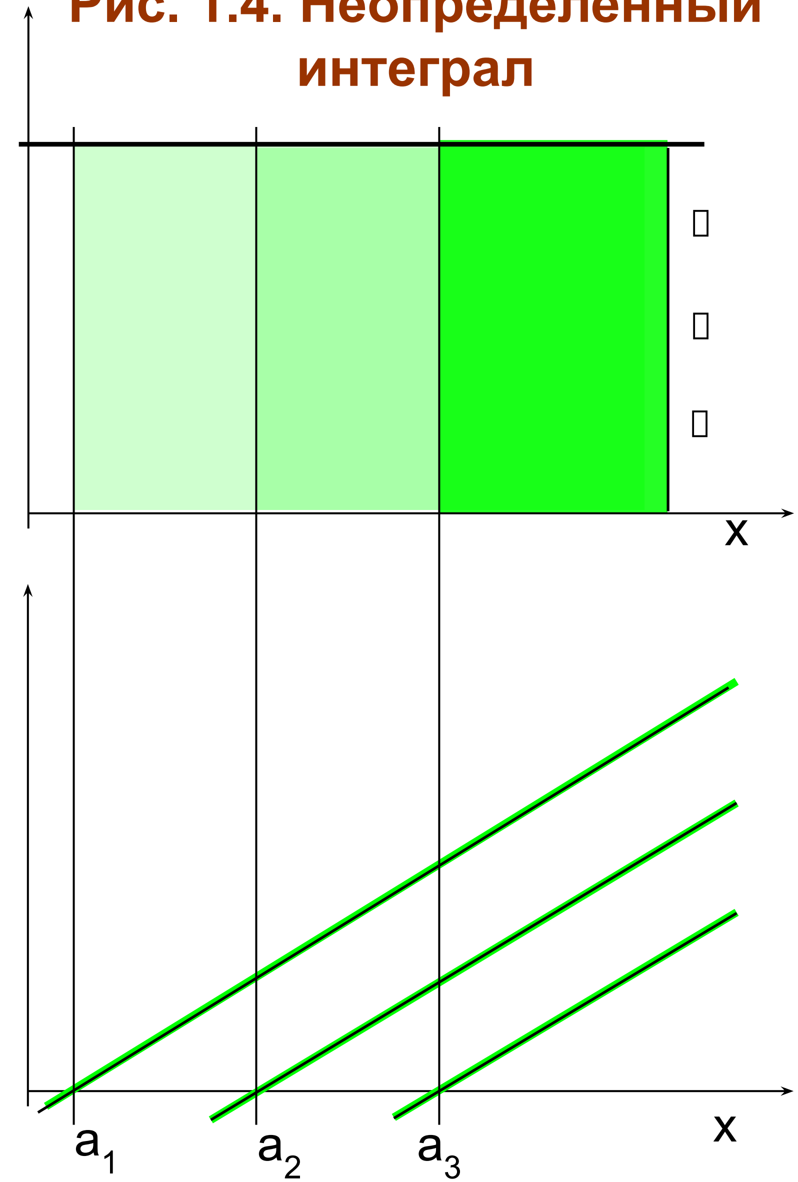
А значит, ***интегрирование – не только вычисление площади, но и действие, обратное дифференцированию.*** Отсюда еще одно название для получаемой функции: это ***первообразная***, для которой исходная функция есть производная.

**Рис. 1.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом**



Далее. Легко видеть, что наш исходный график есть график производной ***не только для полученной прямой, но и для любой другой, параллельной ей.*** Эти другие прямые можно получать, меняя положение левой границы (подчеркнем: не двигая ее непрерывно, как двигаем правую, а фиксируя ее по желанию в разных точках оси абсцисс). И сразу же видим, что входящая в формулу для S постоянная произвольна – ей можно придавать разные значения. Поэтому первообразную называют еще ***неопределенным интегралом***, а величину ***C*** константой интегрирования. ***Итак, неопределенный интеграл – это не просто функция, а целое семейство функций:***

**Рис. 1.4. Неопределенный интеграл**




$$S = k \cdot (x - a) = k \cdot x - k \cdot a = k \cdot x + C.$$

## 1.2.3. Формула Ньютона-Лейбница

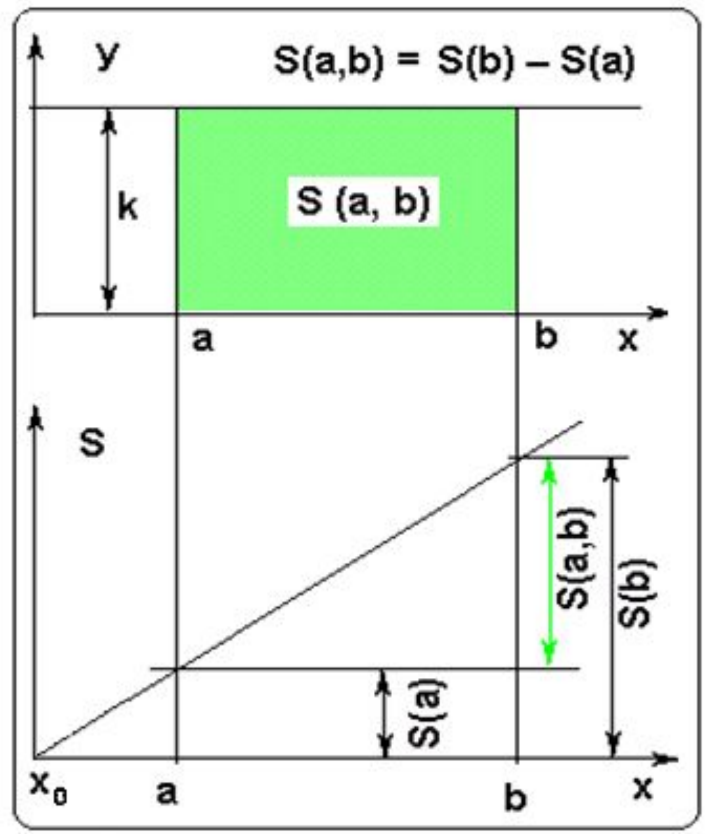
А сейчас мы увидим, что ***определенный интеграл можно вычислить через посредство неопределенного***. Для нашего частного случая это не нужно – проще вычислить площадь прямоугольника простым умножением.

Но ведь когда-то придется переходить к более сложным задачам, с графиками разной формы. Там одним умножением не обойдешься – потребуется универсальный прием, а показать его удобнее на простом примере, где легко сравнить оба подхода.

Потому для начала и воспользовались тем, что площадь прямоугольника умеют определять все – но только для начала.

Выберем для нашей первообразной некую точку отсчета $x_0$ (например, $x_0=0$), не совпадающую ни с одной из заданных границ – пределов интегрирования. В таком совпадении не было бы ничего противозаконного, но лучше не создавать впечатление, что оно для чего-нибудь нужно. Построив затем ее график, пересекающий ось абсцисс в точке $x_0$, отметим на нем точки для заданных нижнего (левого) и верхнего (правого) пределов. Проведем через них горизонтальные линии-засечки, и покажем расстояние между ними с помощью вертикального отрезка. В каждой из двух отмеченных точек график изображает площадь прямоугольника в пределах от начальной точки до соответствующего предела. А значит, вертикальный отрезок между горизонтальными засечками равен искомой площади в заданных границах. Численно это есть разность значений первообразной на границах интервала – верхнем и нижнем пределах. Отсюда сразу получаем формулу для вычисления определенного интеграла:

**Рис. 1.5. Формула Ньютона-Лейбница**



$S(a,b) = S(x_0, b) - S(x_0, a)$, или, упростив запись:

$$S(a,b) = S(b) - S(a).$$

Это и есть ***знаменитая формула Ньютона - Лейбница*** (далее будем именовать ее ФНЛ).

**Она на самом деле справедлива не только для линейных функций. В самом деле, при ее выводе мы нигде не использовали специфических свойств именно этих функций.**

**Для обобщения нам не хватает только одного: доказательства того, что дифференцирование и интегрирование есть взаимно-обратные действия для всех, а не только для линейных функций.**

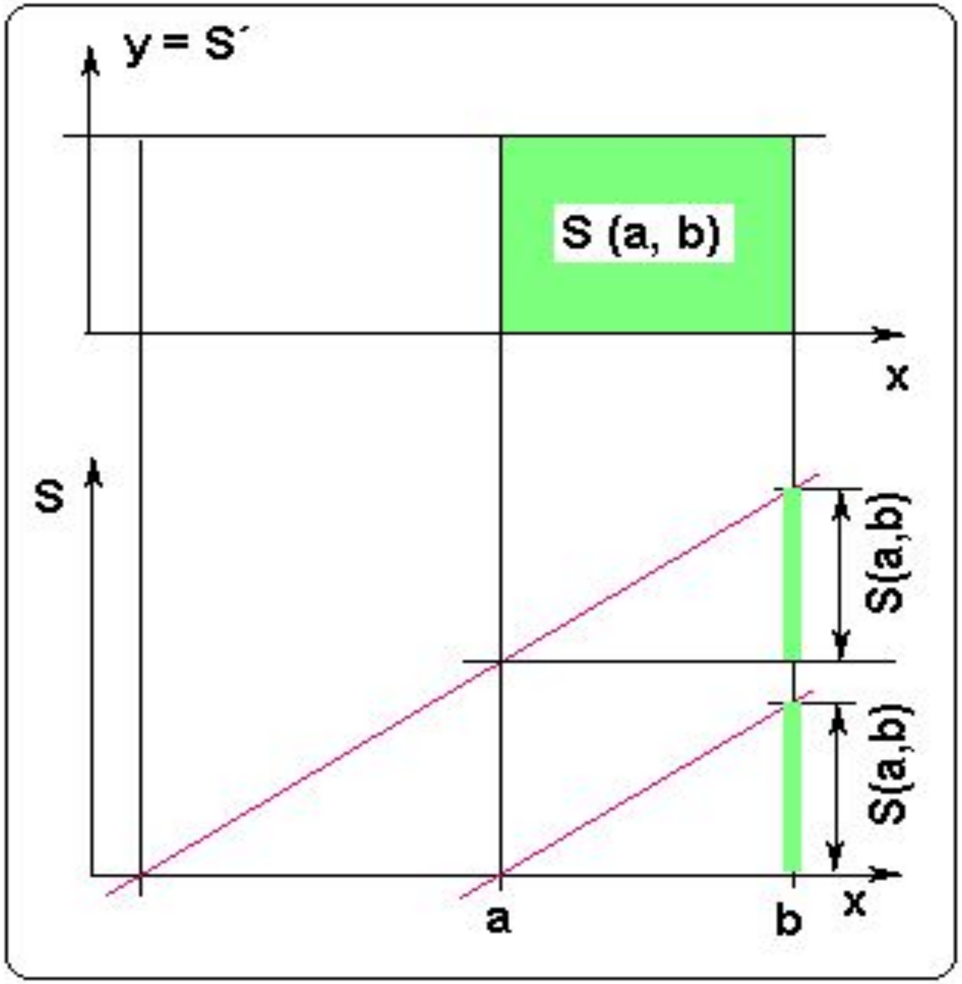
**(Об этом см. в главе 2).**

Чрезвычайно важно понять и запомнить следующее. Все, что на исходном графике изображается площадью, на новом графике изображается его ординатами или их разностями. И обратно, все, что на нижнем рисунке изображено отрезками ординат, на верхнем изображается площадями.

И еще одно важнейшее замечание. Для подстановки пределов интегрирования можно брать *любую* первообразную, но обязательно *одну и ту же для обоих*. Это настолько само собой разумеется, что в учебниках даже не считают нужным о нем упоминать. А между тем, это – ключевой момент для понимания.

Построим прямоугольный треугольник (рис. 1.6), гипотенуза которого – отрезок первообразной, заключенный между пределами интегрирования. Он остается самим собой при любых перемещениях вверх – вниз (то есть, при переходе к другим первообразным), и, естественно, величина его правого катета – а это и есть интеграл – от них не зависит. В этом и состоит смысл ФНЛ на геометрическом языке.

Рис. 1.6. Геометрический смысл теоремы Ньютона-Лейбница



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ
## к главе 1

Материал, который мы рассмотрели, в «обычной» математике отдельно не рассматривают. Линейные функции – простейший частный случай, упоминаемый мимоходом. Для них вообще не требуются понятия  производной и интеграла и методы дифференциального и интегрального исчислений. И мы применяли их вовсе не для решения линейных задач.

Мы как бы повторили элементы аналитической геометрии на другом языке. Но введенный на задачах, где он еще не нужен, этот язык оказывается совсем простым и прозрачным. Тем самым облегчается его освоение там, где он становится необходим.

Прозрачность оттого, что нам не потребовались понятия предела, предельного перехода, дифференциала, интегральной суммы. А когда они потребуются, действия с ними облегчатся благодаря уже известным другим сведениям о производных и интегралах.

Мы уже знаем о них:

1) Производная есть мера крутизны, скорости изменения функции, степени влияния аргумента на функцию.

2) Интегрирование есть способ определения площадей.

3) Интегрирование есть действие обратное дифференцированию, и производная интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции.

4) Для вычисления определенного интеграла можно использовать неопределенный интеграл через формулу Ньютона-Лейбница.

Вот еще неполный перечень свойств, которые мы не рассматривали, но которые можно узнать из линейного случая.

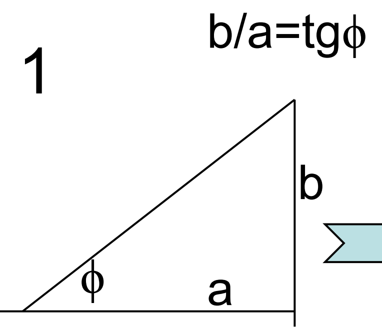
1) Интеграл суммы равен сумме интегралов.

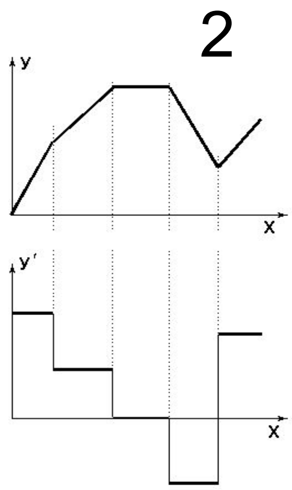
2) Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

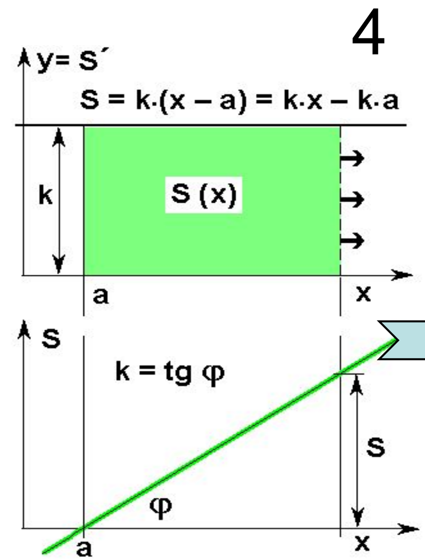
3) Площадь, образованная графиком с отрицательными ординатами, считается отрицательной.

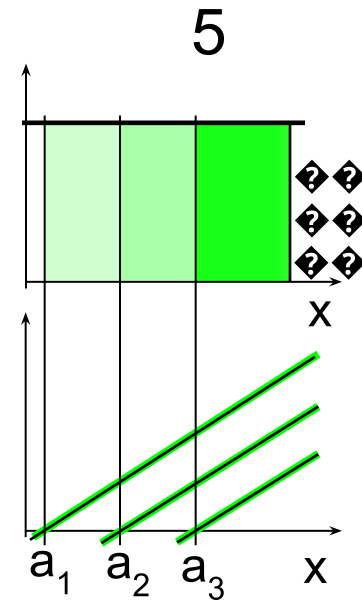
4) При перемене местами пределов интегрирования знак интеграла меняется.

# Ариаднина нить для формирования активного пятна для основ математического анализа




1)тангенс

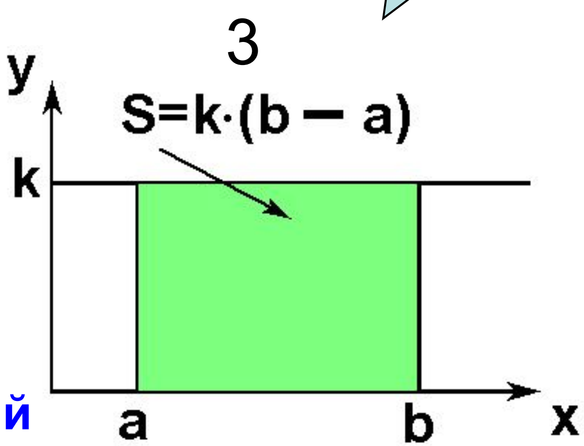
2) производная

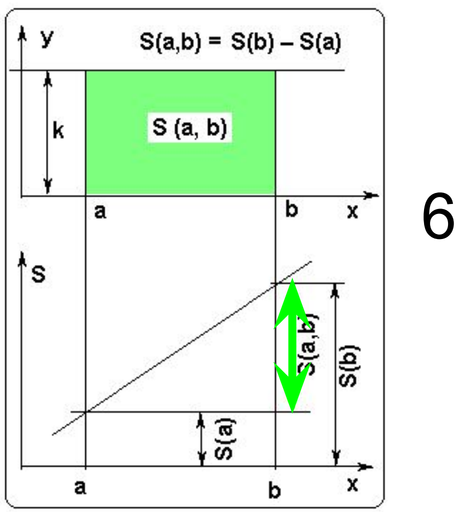
3) определенный интеграл

4) определенный интеграл – функция верхнего предела

5) неопределенный интеграл

6) Формула Ньютона- Лейбница



# Литература


1. МАТЕМАТИКА . Электронный учебник 1996-1999,
Институт Искусственного интеллекта, Институт содержания и методов обучения,
Рекомендовано Минобразования Украины,
Авторы А.И. Шевченко, А.С Миненко,
Автор методического обеспечения А.И. Ляшенко, программирование А Лошак.
2. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих М.: Наука 1965.
3. А.Б. Шур. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций для инженерных и иных приложений. Учебное пособие для студентов, изд. 2, дополненное и исправленное, Алчевск, ДГМИ, 2002. Допечатка тиража с исправлением мелких погрешностей. Алчевск, ДГМИ, 2004