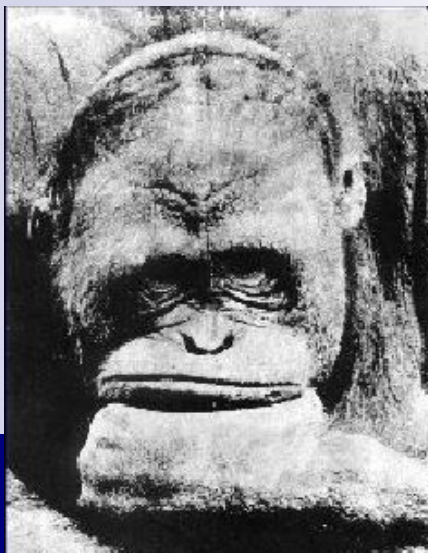
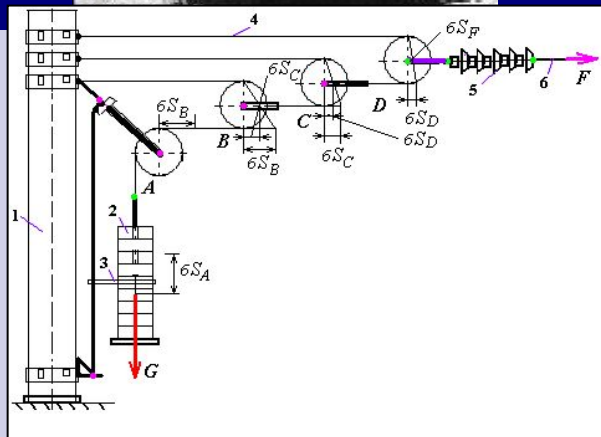


Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике



Динамика (II часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru.

Москва - 2007

Содержание

-
- **Лекция 7.** Аналитическая механика. Обобщенные координаты. Уравнения связей. Возможные перемещения. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Примеры использования принципа возможных перемещений при определении реакций связей.
- Общее уравнение динамики. Пример решения задачи на применение общего уравнения динамики. Обобщенные силы. Уравнение Лагранжа II рода.
-

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4. Бондаренко А.Н. “Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика” (электронное пособие www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm), 2004 г.

Лекция 7

- **Аналитическая механика** – устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия любых самых сложных материальных систем средствами математического анализа. Для этого вводятся новые понятия и обобщаются старые.
- **Связи** – рассматриваются теперь как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Они содержат соотношения (уравнения или неравенства) между координатами, компонентами скоростей и ускорений и, возможно, времени.

Классификация связей: По интегрируемости:

Голономные (геометрические) – выражаются конечными уравнениями относительно координат или интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат:

Неголономные (кинематические) – выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат,

т.е. уравнениями, содержащими не только координаты точек системы, но и их производные по времени:
Неинтегрируемость состоит в том, что их нельзя привести к виду уравнения голономной связи.

По зависимости от времени:

Склерономные (стационарные) – не зависящие от времени:

Например, уравнение траектории, полученное для некоторой точки шатуна кривошипно-шатунного механизма:

рассматривается как уравнение склерономной голономной связи:

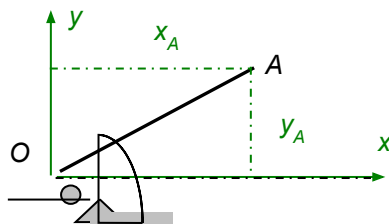
Реономные (нестационарные) – зависящие от времени. Например, кинематическое возбуждение колебаний.
По освобождаемости:

Неосвобождающие (удерживающие или двухсторонние) – описываются *уравнением*, исключающим возможность покидания точкой траектории

или поверхности, описываемой уравнением. Этому соответствует, например, жесткая связь в виде шарнирного стержня.

Освобождающие (неудерживающие или односторонние) – выражаются *неравенством*, регламентирующим связь лишь в одном направлении, например, гибкая нить или гладкая поверхность.

- **Обобщенные координаты** – независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы при ее движении. Обобщенность состоит в том, что они могут иметь различную природу (линейные или угловые перемещения относительно некоторого начального положения или какие-либо другие величины). Общее обозначение – q_i ($i = 1, \dots, n$).
- **Число степеней свободы** – число независимых обобщенных координат, через которые можно выразить декартовы координаты всех точек системы. Например:



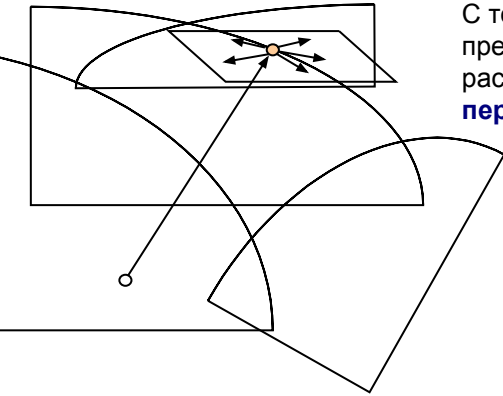
Здесь положение любой точки стержня (например, A) однозначно определяется значением всего *одной* величины – угла α , который является *обобщенной* координатой ($q = \alpha$). Число степеней свободы равно $n = 1$.

Уравнение связи для рассматриваемой точки A:

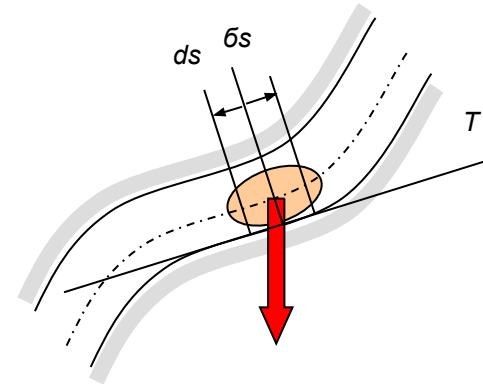
Лекция 7 (продолжение – 7.2)



- **Возможные перемещения** – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.

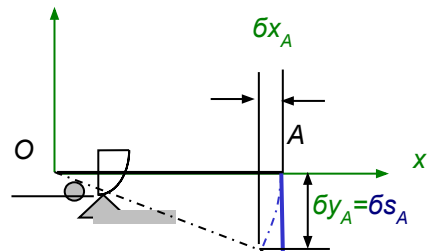


С точностью до бесконечно малых **приращения радиуса-вектора** лежат в касательной плоскости к поверхности связи и представляют собой **возможные перемещения**. В случае нестационарной голономной связи $f(x, y, z, t) = 0$ возможные перемещения рассматриваются для положения и формы поверхности связи, соответствующих данному моменту времени. **Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.**



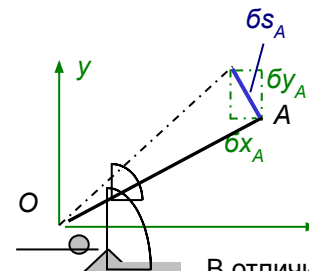
- **Вычисление возможных перемещений:**

Геометрический способ - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

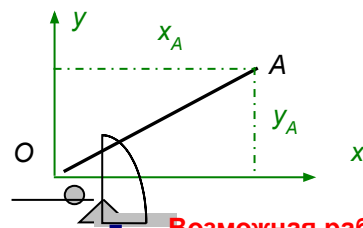


Для малых углов $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда:

Например, для наклонного стержня:



Аналитический способ – вычисляется вариация от координат:



В отличие от геометрического способа знаки возможного приращения координат получаются автоматически. При использовании геометрического способа в дальнейших вычислениях, например, работы, необходимо учитывать направление полученного приращения (перемещения).

- **Возможная работа силы** – элементарная работа силы на том или ином возможном перемещении:

В координатном виде:

В естественном виде:

Лекция 7 (продолжение – 7.3)



- Идеальные связи** – связи, при которых сумма элементарных работ сил реакций связи на любом возможном перемещении равна нулю:

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность, абсолютно твердая поверхность при качении без скольжения. Любую неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, если соответствующие реакции связи (совершающие работу на возможных перемещения) причислить к задаваемым (активным) силам.

- Принцип возможных перемещений** – Для равновесия материальной системы, подчиненной голономным, стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялась нулю:

- Примеры использования принципа возможных перемещений для определения реакций связей:**

Пример 1. Определить реакцию балки в правой опоре:

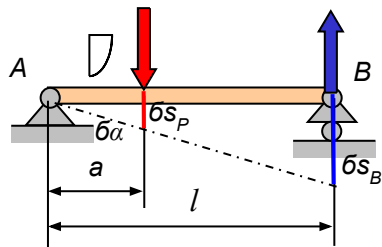
- 1. Покажем заданные силы:

Балка неподвижна и не имеет ни возможных, ни действительных перемещений. Отбросим связь, реакция которой отыскивается, и заменим ее реакцией:

Без правой опоры балка может поворачиваться под действием активных сил, реакцию R_B причисляем к активным силам. Зададим малое возможное перемещение:

Вычислим возможные перемещения:

Запишем сумму работ:

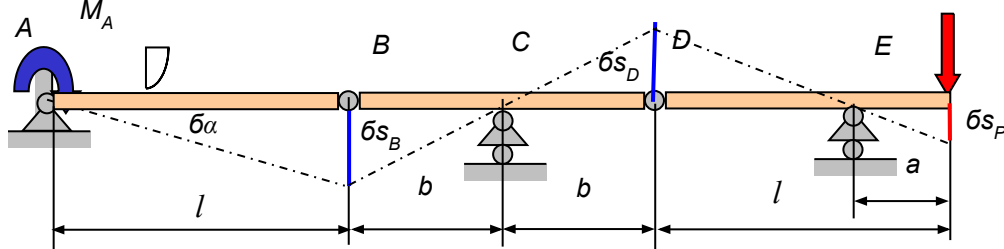


Пример 2. Определить опорный момент многопролетной составной балке в левой опоре:

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A :

Вычислим возможные перемещения:

Запишем сумму работ:





Лекция 7 (продолжение-7.4)



- **Общее уравнение динамики** – Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить к решению задач динамики, а именно:

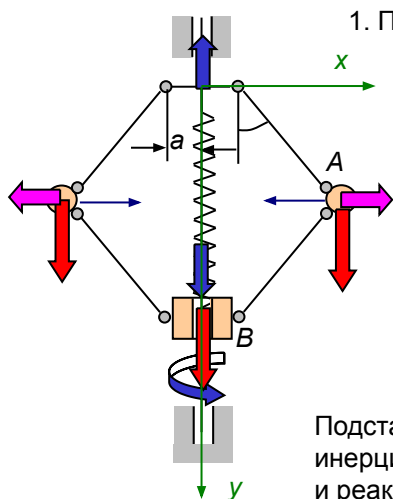
1. Применить **принцип Даламбера**, сводящий задачу динамики с задаче статики:
2. Применить **принцип возможных перемещений**, решающий эту статическую задачу:

Общее уравнение динамики:

В любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции несвободной механической системы идеальными связями на любом возможном перемещении равна нулю.

Или еще короче: где δA – возможная работа всех задаваемых сил и сил инерции на любом возможном перемещении.

Пример. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью. При $\alpha = 0$ пружина не деформирована. Жесткость пружины c . Длина каждого из стержней l . Плечо подвески a . Вес каждого из шаров G , вес муфты G_1 . Определить угловую скорость установившегося вращения для данного угла α .



1. Покажем заданные силы:

2. Добавим силы инерции:

3. Упругая связь (пружина), не являющаяся идеальной (совершает работу на возможных перемещениях), должна быть отброшена и заменена реакцией, которая включается в число заданных сил:

Модуль реакции пружины пропорционален изменению длины (укорочению) пружины:

4. Определим проекции возможных перемещений (вариации координат) точек приложения сил:

5. Составим общее уравнение динамики:

Подставим значения сил инерции и реакции пружины:
Отсюда после некоторых сокращений и упрощений:





Лекция 7 (продолжение – 7.5)



■ Обобщенные силы

-обобщенная сила Q_j , соответствующая обобщенной координате q_j – скалярная величина, равная отношению элементарной работы заданных сил на всех перемещениях системы, вызванных элементарным приращением $\delta q_j \neq 0$ координаты q_j к величине этого приращения.

1. Размерность этой силы определяется размерностью обобщенной координаты. Например, если q_j есть линейная обобщенная координата, то размерность обобщенной силы Q_j соответствует силе (Н). Если q_j есть угловая обобщенная координата, то размерность обобщенной силы Q_j соответствует паре сил или моменту (Нм).

2. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат. Размерность каждой из обобщенных сил определяется размерностью соответствующей обобщенной координаты.

- **Уравнение Лагранжа II рода** – Уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения системы относительно обобщенных координат системы. Воспользуемся общим уравнением динамики: