Лекция 3
Орбитальное движение спутников

3.1 Уравнения невозмущенного траекторного движения навигационного спутника в инерциальной системе координат

В соответствии со вторым законом Ньютона движение центра масс спутника в инерциальной системе координат $OX_0Y_0Z_0$ описывается уравнением

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F} \qquad (3.1)$$

где m — масса спутника; **g** — вектор центростремительного ускорения; **F** — вектор силы притяжения Земли.

По закону всемирного тяготения сила притяжения Земли

$$F = kMm/r^2 = \mu m/r^2$$

где $k = 6{,}672 \times 10^{-11}$ м^3/(кг×с^2) — универсальная гравитационная постоянная; $M = 5{,}974242 \times 10^{24}$ кг — масса Земли; r — расстояние от центра Земли до спутника; $kM = 3{,}9860044 \times 10^{14}$ м^3/с^2 — геоцентрическая гравитационная постоянная Земли.

Пространственная траектория невозмущенного движения спутника в проекциях на оси инерциальной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ описывается уравнениями

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\mu\frac{x_0}{r^3} \qquad \frac{d^2y_0}{dt^2} = -\mu\frac{y_0}{r^3} \qquad \frac{d^2z_0}{dt^2} = -\mu\frac{z_0}{r^3} \qquad (3.2)$$

Здесь x_0, y_0, z_0 — текущие координаты спутника.
Уравнение (3.2) описывает траекторию движения НС – его орбиту.

3.2 Классические элементы орбиты спутника

Ориентацию орбитальной плоскости характеризуют ее положением относительно экваториальной плоскости *XOY* (рис. 3.1). Линию пересечения этих плоскостей называют *<u>линией узлов</u>*. *Узлами* орбиты спутника являются точки пересечения орбиты с экваториальной плоскостью.

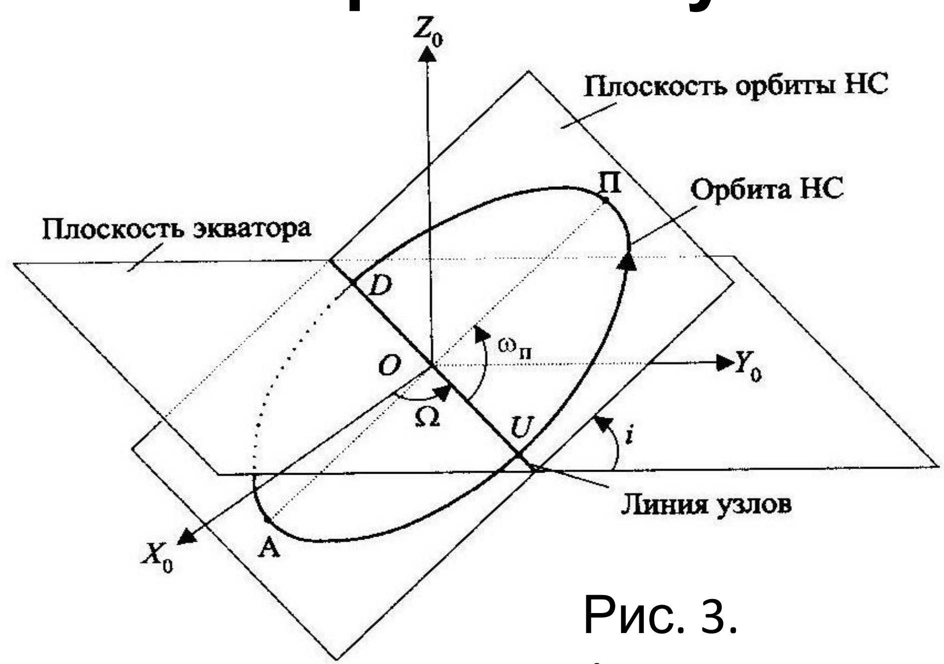


Рис. 3.1

Узел *U,* соответствующий движению спутника из южной небесной полусферы в северную, называют *восходящим,* а узел *D,* соответствующий движению из северной небесной полусферы в южную, — *нисходящим.*

Положение орбитальной плоскости относительно экваториальной характеризуется двумя орбитальными элементами — *долготой восходящего узла* Ω и *наклонением орбиты i.*

Угол Ω отсчитывается в экваториальной плоскости от оси *OX* до линии узлов и изменяется в диапазоне от 0 до 360°.

Угол *i* определяется как угол между экваториальной и орбитальной плоскостями и изменяется в диапазоне от 0 до 180°. При *i* = 90° орбиту называют *полярной,* при *i* ≈ 90° – *приполярной,* при *i* = 0°– *экваториальной,* при 0 < *i* < 90° – *наклонной.*

Уравнение орбиты спутника в орбитальной плоскости в полярной системе координат (r, ϑ) с центром, совпадающим с центром Земли, имеет вид

$$r = p/[1 + e\cos(\vartheta - \vartheta_0)] \qquad (3.3)$$

где *p — фокальный параметр; e — эксцентриситет;* ϑ_0 — угол между положительным направлением полярной оси и фокальной осью.

При $\vartheta_0 = 0$ полярная ось направлена от центра к ближайшей вершине кривой (3.3), а при $\vartheta_0 = \pi$ — в противоположную сторону. В дальнейшем для определенности будем полагать $\vartheta_0 = 0$. Угол ϑ называют *истинной аномалией.*

При $e = 0$ орбита спутника является кругом; при $0 < e < 1$ – эллипсом, степень вытянутости которого определяется орбитальными параметрами p и e; при $e = 1$ – параболой; при $e > 1$ – гиперболой. Для НС характерны эллиптические орбиты, т. е. $0 < e < 1$.

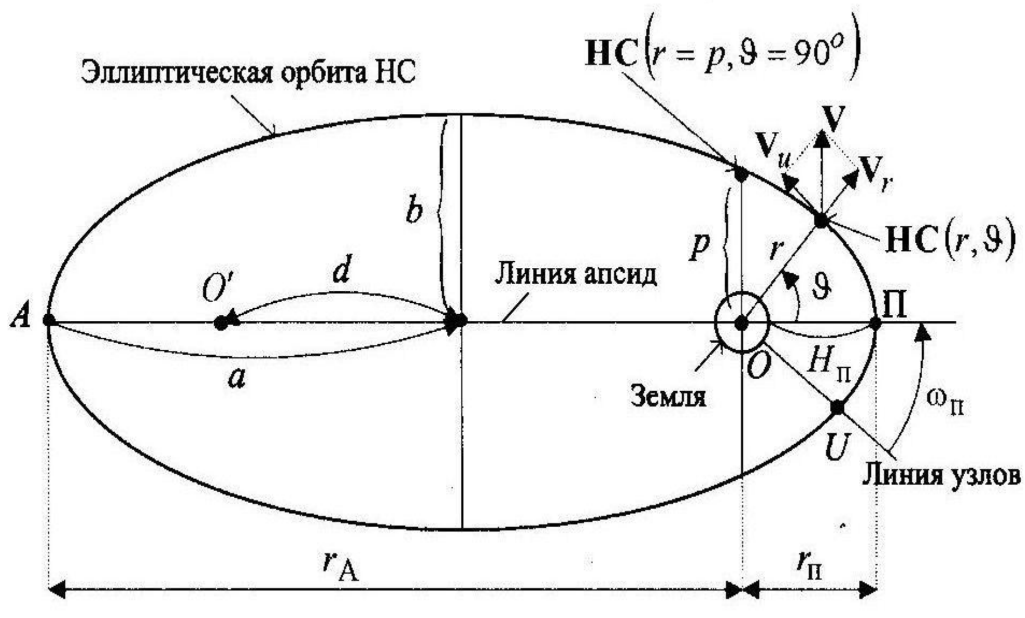
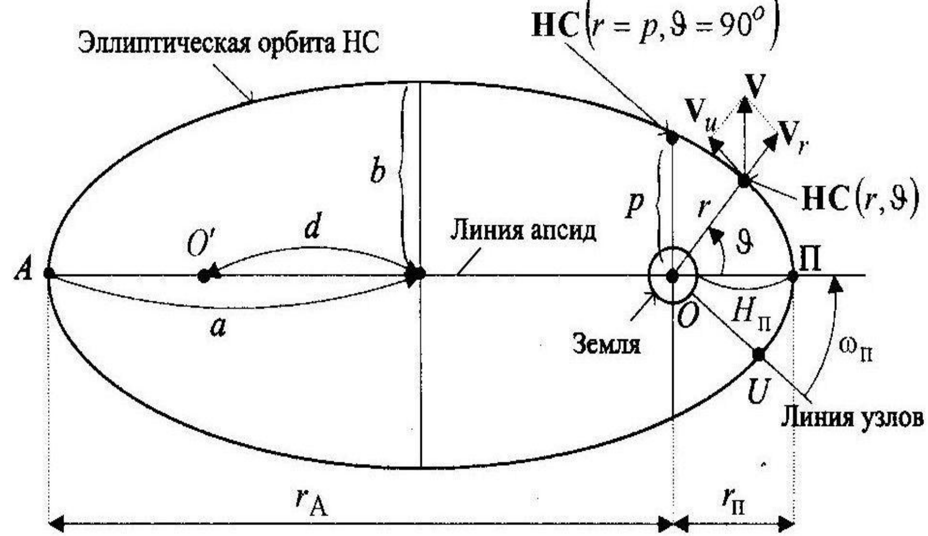


Рис. 3.2

На рис. 3.2 приведена эллиптическая орбита спутника в орбитальной плоскости. В одном из фокусов (*O*) находится Земля. Прямую линию, проходящую через фокусы эллипса, называют *линией апсид*.

Точки пересечения этой линии с эллипсом называют *<u>апсидами</u>*. Ближайшую к силовому центру (точке *O)* вершину кривой называют *<u>перицентром</u>*, а удаленную вершину (которая имеется только у эллипса) — *<u>апоцентром</u>*. При движении вокруг Земли – это *<u>перигей и апогей</u>*. Ориентация орбиты в орбитальной плоскости характеризуется *<u>углом перигея</u>* *(аргументом)* $\omega_П$ между направлением на перигей и линией узлов.



Размеры орбиты спутника можно характеризовать различными комбинациями следующих параметров:

$$a = p/(1-e^2) = (r_A - r_П)/2$$

– большая полуось эллипса;

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

– малая полуось

$d = a{\times}e = (r_A - r_П)/2$ — линейный эксцентриситет;

где $r_A = OA$, $r_П = OП$ — апогейное и перигейное расстояние соответственно.

3.3. Движение спутника по невозмущенной орбите

Пять параметров орбиты Ω, i, ω_{Π}, p, e постоянны и не меняются при движении спутника по орбите, а шестой параметр (истинная аномалия) характеризует положение спутника на орбите в каждый момент времени t, который часто называют *эпохой.*

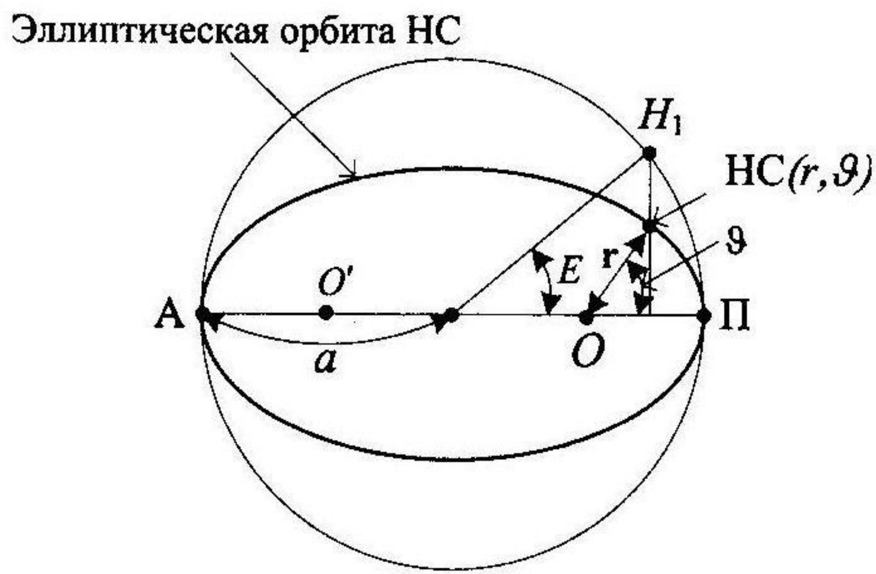
Другим широко распространенным орбитальным элементом является время τ прохождения спутником характерной точки орбиты, например, перигея τ = t_{Π} (поэтому иногда τ называют *временем перигея).*

Используя этот элемент, положени НС на орбите в произвольный момент времени t определяется с помощью *уравнения Кеплера:*

$$t-\tau=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(E-e\sin E\right) \qquad (3.4)$$

где E — *эксцентрическая аномалия* НС, определяемая из соотношения

$$tg\,\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tg\,\frac{\vartheta}{2} \qquad (3.5)$$



Движение спутника по эллиптической орбите, в отличие от движения по круговой орбите, является неравномерным, а зависит от положения спутника на орбите. Чтобы использовать удобное равномерное движение, т. е. движение с постоянной угловой скоростью, вводят угловой параметр *M* — *средняя аномалия* для момента времени *t* (*средняя аномалия эпохи i*);

$$M = 360(t - t_0)/T = n(t - \tau) \qquad (3.6)$$

где t_0 — какой-либо определенный (начальный) момент времени, например $t_0 = \tau$; $n = 360°/T = \sqrt{\mu / a^3}$ среднее движение НС или *средняя угловая скорость* НС.

Если истинная аномалия ϑ определяет истинное положение НС на орбите, то параметр *M* характеризует гипотетическое положение НС при условии равномерного орбитального движения с угловой скоростью, равной средней скорости *n*. Поэтому в соответствии с (3.6) *M* – угол между линией апсид и направлением на предполагаемое положение НС на орбите, в котором он находился бы при равномерном движении. Чем меньше отличие орбиты НС от круговой, тем больше соответствует средняя угловая скорость *n* истинной угловой скорости и тем ближе значения *M* и ϑ.

Уравнение Кеплера можно представить в виде: $M = E - e\sin E$
(3.7)

Тогда для каждого заданного момента времени *t* рассчитывается средняя аномалия *M*, которая используется в (3.7) для вычисления эксцентрической аномалии *E*. При этом решение равенства (3.7) проводится итерационным методом. Зная *E* можно определить истинную аномалию $\vartheta(t)$.

3.4 Уравнения невозмущенного движения спутника в инерциальной системе координат с использованием орбитальных элементов

Получим уравнения движения спутника в геоцентрической прямоугольной системе координат $OX_0Y_0Z_0$, переходя от орбитальных координат к инерциальным.

В плоскости орбиты положение НС в каждый момент времени дается полярными координатами (r, ϑ).

Введем геоцентрическую декартову систему координат $OX_{or}Y_{or}Z_{or}$, центр которой совмещен с центром Земли, плоскость $X_{or}OY_{or}$ совмещена с орбитальной плоскостью, ось OX_{or} направлена вдоль линии апсид в сторону перигея; ось OY_{or} расположена перпендикулярно оси OX_{or} так, что при повороте оси OX_{or} на 90° против часовой стрелки ее направление совпадет с направлением оси OY_{or}; ось OZ_{or} дополняет систему координат до правосторонней. В такой системе координат положение НС задается вектором $\mathbf{x}_{or}=|r\cdot\cos(\vartheta)\quad r\cdot\sin(\vartheta)|^{T}$.

Перейдем от системы координат $OX_{or}Y_{or}Z_{or}$ к инерциальной системе $OX_0Y_0Z_0$ в результате трех последовательных вращений: на угол $-\omega_{П}$ относительно оси OZ_{or}; на угол $-\boldsymbol{i}$ относительно оси OX_{or}; на угол $-\Omega$ относительно оси OZ_{or}. Тогда для вектора координат $\mathbf{x}_{or}=|x_0\ \ y_0\ \ z_0|^{T}$ НС в инерциальной системе координат

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{U}_3(-\Omega)\mathbf{U}_1(-i)\mathbf{U}_3(-\omega_0)\mathbf{x}_{or}$$

$$x_0=r[\cos(\vartheta+\omega_{п})\cos\Omega-\sin(\vartheta+\omega_{п})\sin\Omega\cos i]$$

$$y_0=r[\cos(\vartheta+\omega_{п})\sin\Omega+\sin(\vartheta+\omega_{п})\cos\Omega\cos i]$$

$$z_0=r\sin(\vartheta+\omega_{п})\sin i \qquad (3.8)$$

Для определения скорости движения НС продифференцируем соотношения (3.8) по времени:

$$\frac{dx_0}{dt} = V_{x_0} = V_{r_0}\frac{x_0}{r} - V_u\left[\sin(\vartheta + \omega_{\text{п}})\cos\Omega + \cos(\vartheta + \omega_{\text{п}})\sin\Omega\cos i\right]$$

$$\frac{dy_0}{dt} = V_{y_0} = V_{r_0}\frac{y_0}{r} - V_u\left[\sin(\vartheta + \omega_{\text{п}})\sin\Omega - \cos(\vartheta + \omega_{\text{п}})\cos\Omega\cos i\right] \qquad (3.9)$$

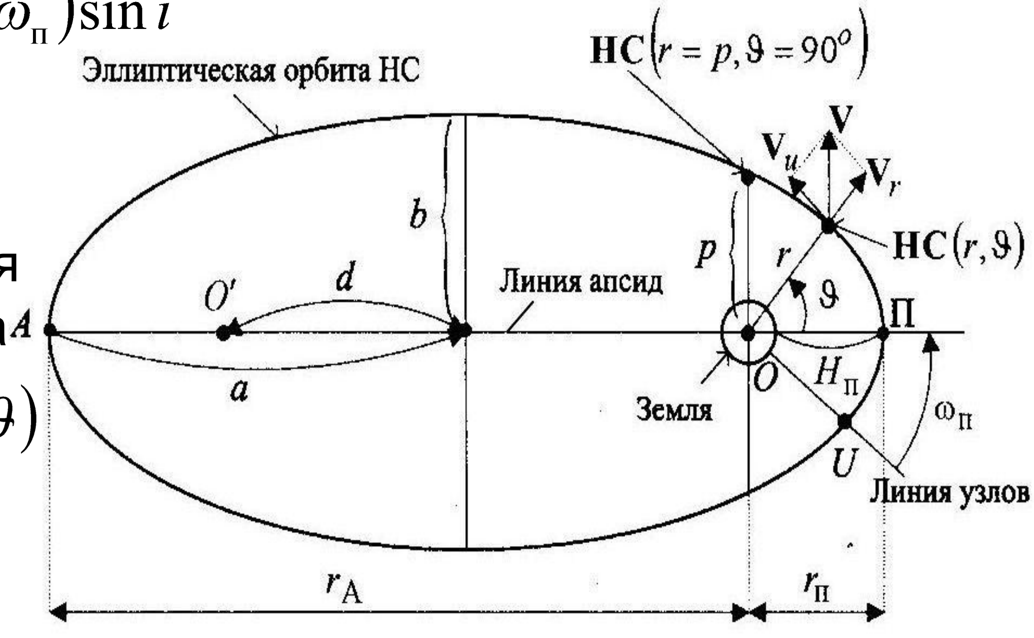
$$\frac{dz_0}{dt} = V_{z_0} = V_{r_0}\frac{z_0}{r} - V_u\cos(\vartheta + \omega_{\text{п}})\sin i$$

$$V_{r_0} = dr/dt = \sqrt{\mu/p}\, e\sin\vartheta$$

– радиальная составляющая вектора **V** скорости спутника

$$V_u = r d\vartheta/dt = \sqrt{\mu/p}\,(1 + e\cos\vartheta)$$

- трансверсальная (попе речная) составляющая вектора **V**



При рассмотрении движения НС на эллиптических орбитах часто оперируют таким параметром, как векториальная скорость $V_{СК}$, под которой понимают площадь сектора эллипса, описываемого радиусом-вектором НС в единицу времени

$$V_{\text{ск}} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{p\mu}$$

Время полного оборота радиус-вектора НС.

$$T = S_{\text{эл}} / V_{\text{СК}} = 2\pi\sqrt{a^3/\mu} \quad (3.10)$$

Период обращения НС, вычисленный по (3.10), называют *сидерическим* или звездным

В зависимости от периода обращения НС подразделяют на суточные при $T = T_з$ (звездные сутки или звездный период обращения Земли вокруг своей оси) и на синхронные – при периоде *T*, кратном звездным суткам. В свою очередь, суточные НС, орбитальная плоскость которых лежит в плоскости экватора, называют геостационарными, так как они неподвижны относительно одной из точек экватора.

В СРНС "Транзит", "Цикада" период обращения НС *T* =105 мин; в СРНС ГЛОНАСС
T =11,2 ч; в GPS *T* =12 ч ; у геостационарных НС *T* – 23 ч 56 мин 04,1 с. Видно, что синхронный спутник системы GPS один раз в сутки проходит над одной и той же точкой поверхности Земли.

Скорость движения НС по эллиптической орбите в общем случае: $V_{и\ эл} = \sqrt{\mu(2/r - 1/a)}$

Видно, что скорость максимальна в перигее и минимальна в апогее.

При движении по эллиптической орбите угловая скорость движения НС меняется во времени, что усложняет расчеты по прогнозированию движения. Однако движение по таким орбитам более экономично по энергетическим затратам и позволяет при выборе соответствующих параметров орбиты (i, $r_а$, $r_п$) обеспечить почти круглосуточное использование НС для навигационных

Так, НС с сильно вытянутыми эллиптическими орбитами предусмотрено использовать при формировании региональных СРНС, в которых апогей орбиты располагается над заданным районом. При этом НС будет находиться максимальное время над этим районом. Но в бортовой аппаратуре СРНС в данном случае могут возникать сложности в связи с необходимостью учета большого динамического диапазона сигналов НС и значительной неравномерности параметров орбитального движения. Кроме того, эллиптические орбиты характеризуются меньшей