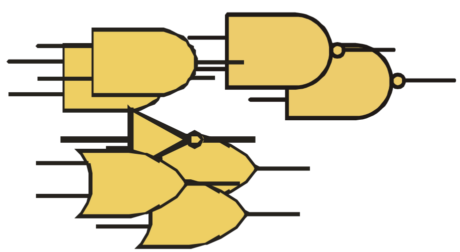
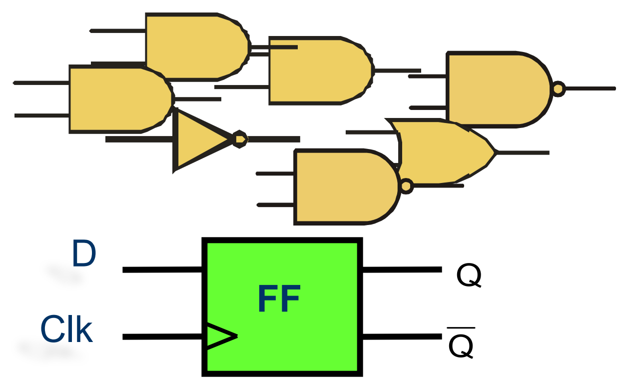
Układy logiczne

Układy logiczne to dział *techniki cyfrowej*, w której układy cyfrowe konstruowane są na poziomie bramek logicznych i przerzutników.

kombinacyjne



sekwencyjne



I T P W

ZPT

Pojęcia podstawowe

Algebra Boole'a

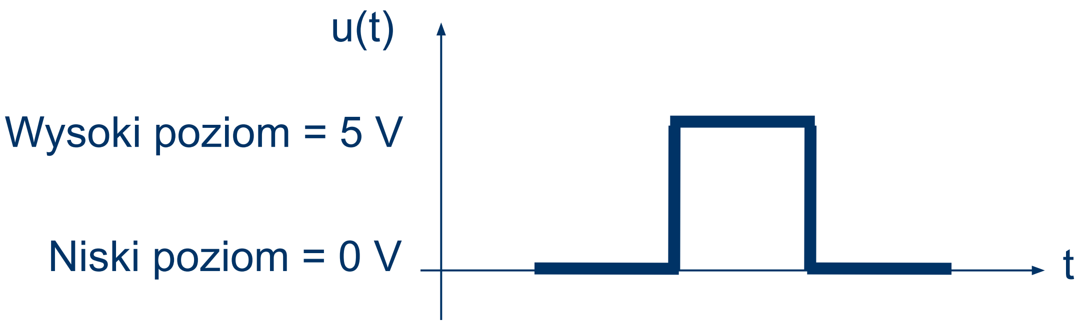
...

I T P W

ZPT

Dwuelementowa algebra Boole'a

Algebra Boole'a jest modelem matematycznym operacji na sygnałach binarnych reprezentujących sygnały elektryczne o dwóch wartościach: 0 lub 1. Wartości te są przyporządkowane dwom poziomom napięcia wytwarzanego przez (elektroniczne) układy logiczne. Najczęściej przyjmuje się, że napięciu wysokiemu jest przyporządkowana wartość sygnału 1, natomiast napięciu niskiemu – wartość 0.



Ciąg bitów .....

.... 0 1 0.....

I T P W ZPT

Dwuelementowa algebra Boole'a

Algebra Boole'a jest algebrą z trzema operacjami na dwuwartościowych argumentach, które przyjmują wartości: **0** i **1**. Rezultaty tych operacji są także dwuwartościowe.

Te trzy operacje to:

- **suma logiczna** (suma boolowska, alternatywa, lub),

- **iloczyn logiczny** (iloczyn boolowski, koniunkcja, i),

- **negacja** (inwersja, nie).

Dwie pierwsze operacje są wieloargumentowe, a trzecia jest jednoargumentowa.

Operacja sumy logicznej (OR)…

…jest zdefiniowana następująco: jeżeli co najmniej jeden z argumentów jest równy **1**, to wynik jest równy **1**, zatem suma logiczna jest równa **0** tylko dla przypadku, gdy wszystkie argumenty są równe **0**.

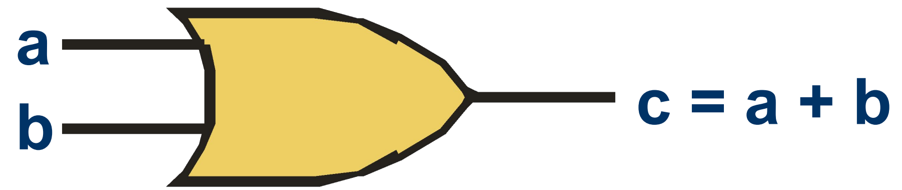
$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 1$

Bramka OR



gdzie + oznacza operację **OR**

Operacja iloczynu logicznego (AND)…

…jest zdefiniowana następująco: wynik iloczynu jest równy **1**, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie argumenty przyjmują wartość **1**.

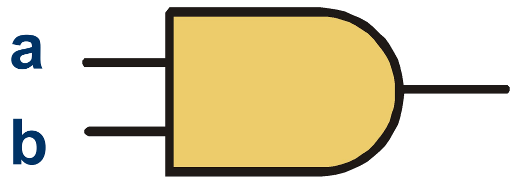
$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

Bramka AND



$c = a \bullet b$

gdzie • oznacza operację **AND**

I
T
P
W

ZPT

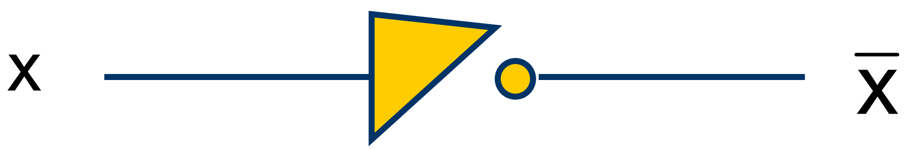
Operacja negacji (NOT)…

…zmienia wartość argumentu na przeciwny. Negacją 0 jest 1, a negacją 1 jest 0, co zapisujemy…

$$\overline{1} = 0$$

$$\overline{0} = 1$$

Bramka NOT



Operacja NOT zmiennej X, jest oznaczana $\overline{X}$

Prawa i własności algebry Boole'a

Własności stałych

a + 0 = a

a · 0 = 0

a + 1 = 1

a · 1 = a

Własności negacji

$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$

$\mathbf{a} \bullet \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$

Podwójna negacja

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Idempotentność

a + a = a

a · a = a

I T P W

ZPT

Prawa i własności algebry Boole'a c.d.

Przemienność

a + b = b + a   a · b = b · a

Łączność

a + (b + c) = (a + b) + c   a·(b·c) = (a·b)·c

Rozdzielność

a + b·c = (a + b)·(a + c)   a· (b + c) = a·b +a·c

Prawa De Morgana

$$y = \overline{a \bullet b} = \overline{a} + \overline{b} \qquad y = \overline{a + b} = \overline{a} \bullet \overline{b}$$

I T P W

ZPT

Wyrażenie boolowskie

Wyrażenie boolowskie to formuła, w której zmienne boolowskie połączone są operatorami: + (OR), · (AND), (NOT) $\overline{X}$

Przykład:

a+b+c•d+e

a+b+cd+e

a+b(d+e)

Kropkę często pomijamy

Kolejność operacji:

1. **NOT**
2. **AND**
3. **OR**

(Może być zmieniona przez stosowanie nawiasów).

Iloczyn kartezjański

Iloczynem kartezjańskim zbiorów *A* i *B* , oznaczanym *A* × *B* nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b), takich że pierwszy element pary należy do zbioru A (a ∈ A), natomiast drugi do B (b ∈ B).

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Przykładzik

$\{0, 1\}^3$ ⇒

000
001
011
010
110
111
101
100

ITPW ZPT

Funkcja boolowska

Funkcją boolowską zmiennych binarnych $x_1,\dots,x_n$ nazywamy odwzorowanie:

$$f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$$

gdzie:

$\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{B}^n = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{-razy}}$, $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{B}^m$

Jeżeli $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^n$, to funkcję nazywamy zupełną; w przeciwnym przypadku jest to funkcja niezupełna, zwana również funkcją nie w pełni określoną.

Reprezentacje:

Tablica prawdy

Formuła (wyrażenie) boolowskie

... i wiele innych sposobów opisu (np. BDD)

ITPW ZPT

Tablica prawdy

tablicowe przedstawienie odwzorowania *f*

$f: B^3 \rightarrow B$ $\quad$ $f(x_1, x_2, x_3)$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	—
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	—
7	1	1	1	1

Funkcja niezupełna

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
7	1	1	1	1

$$A_D = L(A_{NKB}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j$$

I T P W ZPT

Tablica prawdy...

$$A_D = L(A_{NKB}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j =$$

$$= a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + ... + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

$$(0101)_B = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_D$$

$$(1010)_B = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10_D$$

I T P W

ZPT

Uproszczony zapis tablicy prawdy

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$f = \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	—
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	—
7	1	1	1	1

$f = \Sigma[1, 3, 5, 7, (2, 6)]$

ITPW ZPT

Wyrażenie boolowskie

Znacznie wygodniejsza w praktyce jest reprezentacja funkcji boolowskich w postaci wyrażenia boolowskiego.

I T P W ZPT

Wyrażenie boolowskie - przykład

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

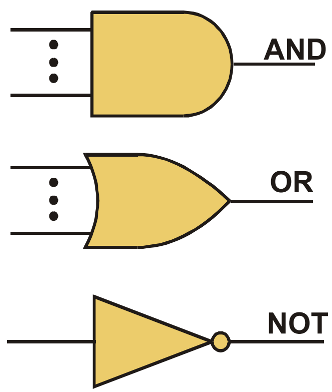
$$f=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3$$

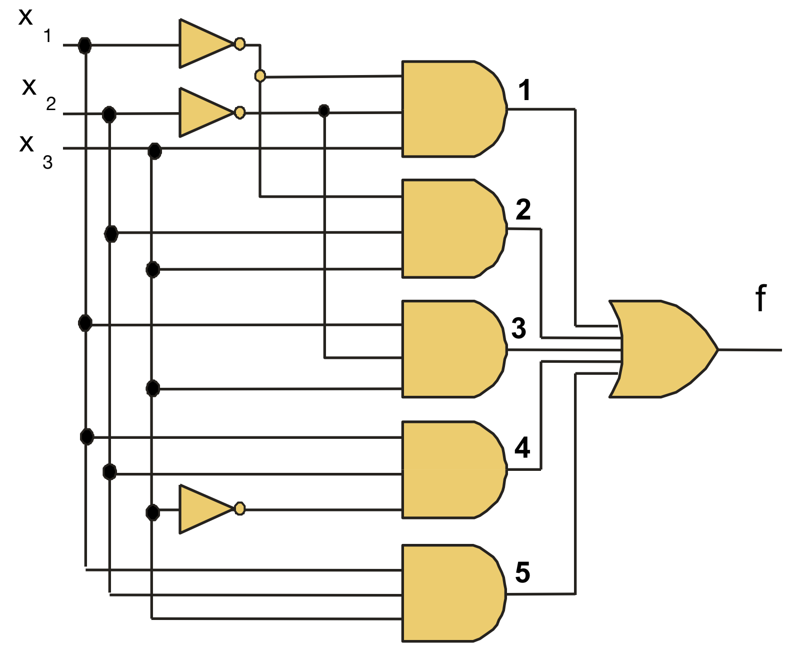
$$f=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3$$

Ogromne znaczenie formuł boolowskich ...

Operatory logiczne

mają swoje realizacje techniczne - bramki logiczne



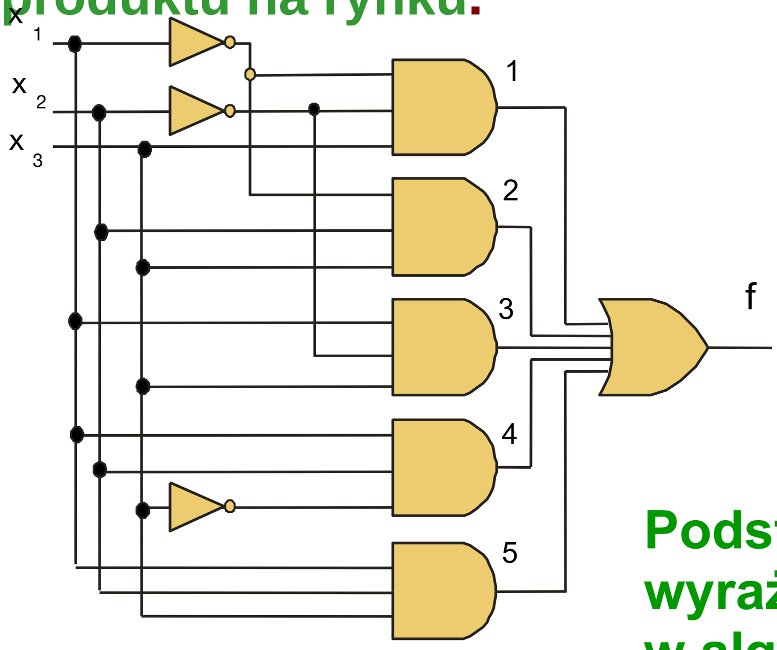


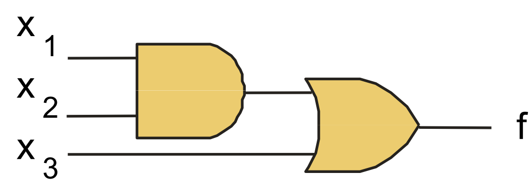
Realizacja funkcji *f*

$$f = \underset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3} + \underset{2}{\bar{x}_1x_2x_3} + \underset{3}{x_1\bar{x}_2x_3} + \underset{4}{x_1x_2\bar{x}_3} + \underset{5}{x_1x_2x_3}$$

Komentarz

Zatem upraszczając wyrażenia boolowskie będziemy mogli jednocześnie uprościć ich realizację, np. zmniejszyć liczbę zastosowanych bramek co decyduje o kosztach realizacji i tym samym jest głównym czynnikiem zwiększającym konkurencyjność naszego produktu na rynku.





Podstawy teoretyczne upraszczania wyrażeń boolowskich zawarte są w algebrze Boole'a.

Transformacja formuły

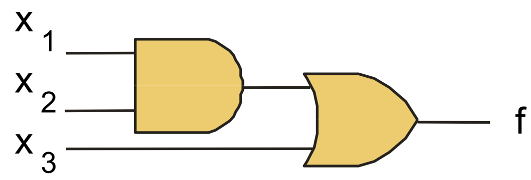
$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 =$$

$$= \bar{x}_1x_3\underbrace{(\bar{x}_2 + x_2)}_{=1} + x_1x_3\underbrace{(\bar{x}_2 + x_2)}_{=1} + x_1x_2\underbrace{(\bar{x}_3 + x_3)}_{=1} =$$

$$= \bar{x}_1x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 =$$

$$= x_3 + x_1x_2$$



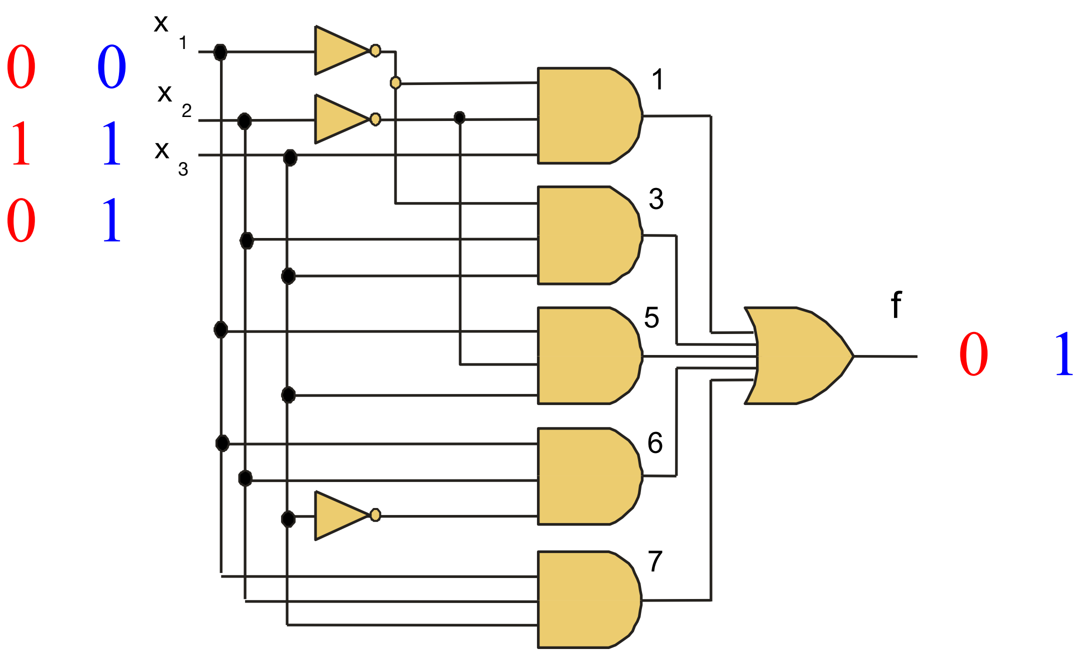
Realizacja uproszczonej funkcji *f*

Minimalizacja funkcji boolowskich!!!

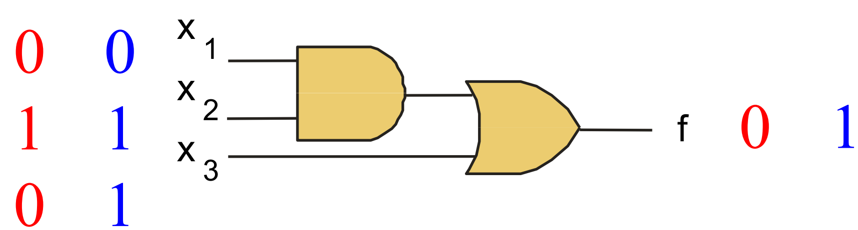
I T P W

ZPT

Sens fizyczny minimalizacji



	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



I T P W ZPT

Postaci (formy) kanoniczne

Kanoniczna postać sumacyjna
(suma iloczynów)

Kanoniczna postać iloczynowa
(iloczyn sum)

I T P W

ZPT

Kanoniczna postać sumacyjna

$$f(X) = \bigvee_{k=0}^{2^n-1} x_1^{e_{1k}} x_2^{e_{2k}} \cdots x_n^{e_{nk}} f(X_k)$$

$$x^e = \begin{cases} x, & \text{gdy } e = 1 \\ \bar{x}, & \text{gdy } e = 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Minterm

$$f(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$

I T P W ZPT

Kanoniczna postać iloczynowa

$$f(X)=\bigwedge_{k=0}^{2^n-1}\left(x_1^{e_{1k}}+x_2^{e_{2k}}+\cdots+x_n^{e_{nk}}+f(X_k)\right)$$

$$x^e=\begin{cases} x, & \text{gdy } e=0 \\ \bar{x}, & \text{gdy } e=1 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Maxterm

$$f=(x_1+x_2+x_3)(x_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+x_2+x_3)$$

ITPW ZPT