Матричная модель МОБ в динамической постановке. Ее особенности. Коэффициенты вложений, их экономическое содержание и методика расчета.

Производящие отрасли	Межотраслевые потоки текущих затрат					Межотраслевые потоки производственных капиталовложений (прирост фондов)					Конечный продукт	Валовая продукция
	1	2	3	…	n	1	2	3	…	n	z_1	x_1
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	$\Delta Ф_{11}$	$\Delta Ф_{12}$	$\Delta Ф_{13}$	…	$\Delta Ф_{1n}$	z_2	x_2
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	$\Delta Ф_{21}$	$\Delta Ф_{22}$	$\Delta Ф_{23}$	…	$\Delta Ф_{2n}$	z_3	x_3
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	$\Delta Ф_{n1}$	$\Delta Ф_{n2}$	$\Delta Ф_{n3}$	…	$\Delta Ф_{nn}$	z_n	x_n

Матрица текущих затрат совпадает с 1-м квадрантом статической модели МОБ.

Элементы 2-ой матрицы, показывают количество продукции i-ой отрасли, направляемое в текущем периоде в j-ю отрасль в качестве производственных капиталовложений в ее основные фонды (материально это выражается в приросте в потребляющих отраслях производственного оборудования, сооружений, площадей транспортных средств и т.п.). В статическом же балансе капитальные вложения не дифференцируются по отраслям потребителям, а отражаются суммарной величиной в составе конечной продукции. В динамической модели капиталовложения выделяются в составе конечной продукции:

$$y_i = \sum_j \boldsymbol{\Delta\Phi}_{ij} + z_i$$

где z_i – конечный продукт.

В результате уравнение

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j + y_i \quad i = 1,2,\ldots n$$

преобразуется в

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j \boldsymbol{\Delta\Phi}_{ij} + z_i$$

Следующим отличием динамической МОБ от статической является то, что в ней учитывается прирост продукции Δx_j, который обуславливается потоками вложений:

$$\Delta x_j = x_j^t - x_j^{t-1}$$

Полагая, что прирост продукции пропорционален приросту фондов, можно записать:

$$\Delta \Phi_{ij} = b_{ij} \Delta x_j$$

$b_{ij} = \dfrac{\Delta \Phi_{ij}}{\Delta x_j}$ - называются коэффициентами вложений или коэффициентами приростной фондоемкости. Их экономический смысл: b_{ij} показывает , сколько фондов i - ой отрасли должно быть вложено в j - ую отрасль для увеличения производственной мощности последней на единицу годового объема продукции. Каждый столбец матрицы $(b_{ij})_{nxn}$ характеризует для отрасли величину и структуру фондов, необходимых для увеличения на единицу производственной мощности j-ой отрасли.

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j b_{ij} \Delta x_j + z_i$$

Оно представляет собой систему так называемых разностей уравнений первого порядка. Ее можно привести к обычной системе линейных уравнений, если исходить из того, что объемы производства и конечная продукция относятся к некоторому периоду t, а прирост продукции определяется по сравнению с t-1 периодом:

$$x_i^t = \sum_j a_{ij} x_j^t + \sum_j b_{ij} (x_j^t - x_j^{t-1}) + z_i^t ,$$

$$x_i^t = \sum_j (a_{ij} + b_{ij}) x_j^t - \sum_j b_{ij} x_j^{t-1} + z_i^t$$

В матричном виде:

$$X^t = \left(A + B \right) X^t - BX^{t-1} + Z^t$$

При решении уравнения обычно известны уровни производства всех отраслей в предшествующем периоде, коэффициенты затрат и вложений, конечный продукт планового периода и требуется определить уровни производства всех отраслей в плановом периоде (x^t_j)

Оптимизационные модели народнохозяйственного планирования.

Статическая модель МОБ имеет следующие недостатки:

1. Каждый продукт производится единственным образом , альтернативные технологические способы игнорируются.
2. При каждом способе производства выпускается единственная продукция, т.е. отсутствуют комплексные производства.
3. В уравнении распределения продукции не учитываются объемы трудовых, природных ресурсов и производственных мощностей, т.е. предполагается их неограниченность.
4. Состав и объем конечной продукции предполагается фиксированным, заданным.
5. Предполагается линейная зависимость между объемом продукции и затратами ресурсов на ее производство.
6. Статическая модель МОБ отражает состояние, а не процесс развития экономики.
7. Параметры МОБ детерминированы, т.е. исключаются случайные воздействия.

Оптимизационные модели народнохозяйственного планирования.

Статическая модель МОБ имеет следующие недостатки:

1. Каждый продукт производится единственным образом , альтернативные технологические способы игнорируются.
2. При каждом способе производства выпускается единственная продукция, т.е. отсутствуют комплексные производства.
3. В уравнении распределения продукции не учитываются объемы трудовых, природных ресурсов и производственных мощностей, т.е. предполагается их неограниченность.
4. Состав и объем конечной продукции предполагается фиксированным, заданным.
5. Предполагается линейная зависимость между объемом продукции и затратами ресурсов на ее производство.
6. Статическая модель МОБ отражает состояние, а не процесс развития экономики.
7. Параметры МОБ детерминированы, т.е. исключаются случайные воздействия.

Важным отличаем оптимизационной модели является то, что вместо единственного столбца коэффициентов затрат каждому виду продукции может соответствовать несколько столбцов, отражающих затраты при различных производственных способах получения этой продукции.

При производстве n видов продукции (j=1..n) r способами (s=1..r) используют ресурсы m видов, предельные объемы которых равны A_i.

По каждому виду продукции заданы коэффициенты k_j, отражающие долю каждого вида продукции в общем объеме конечной продукции или количество продуктов в единичном наборе. При однократном применении (единичной интенсивности) s-ого производственного (технологического) способа затрачивается a_{is} единиц ресурсов и производится b_{js} единиц продукции.

Очевидно, некоторые a_{is} и b_{js} равны нулю, некоторые b_{js} <0, если продукция данного вида при s-м техническом способе не производится, а затрачивается в качестве средств производства.

В рамках народнохозяйственной модели разграничение на продукцию и ресурсы условно.

Требуется определить, с какой интенсивностью следует использовать s-й технологический способ, чтобы общий объем конечной продукции был максимальным.

В качестве переменных величин примем x_s – интенсивность применения s-го технологического способа и y – количество наборов (комплектов) конечной продукции. Тогда общее количество продукции первого вида равно $k_1 y$, второго вида - $k_2 y$, ... j-го вида продукции - $k_j y$. Тогда задача примет вид :

$$
\begin{aligned}
& y \Rightarrow max \\
& a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r \le A_1 \\
& a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r \le A_2 \\
& \dots \\
& a_{m1}x_1 + \dots + a_{mr}x_r \le A_m \\
& b_{11}x_1 + \dots + b_{1r}x_r \le k_1 y \\
& b_{21}x_1 + \dots + b_{2r}x_r \le k_2 y \\
& \dots \\
& b_{n1}x_1 + \dots + b_{nr}x_r \le k_n y \\
& x_s \ge 0, \;\; s = 1,2,\dots r, \;\; y \ge 0
\end{aligned}
$$

№	Виды продукции и ресурсов	Технологические способы				Объемы ресурсов продукции
		1	2	...	r	
	Ресурсы					
1		a_{11}	a_{12}		a_{1r}	A_1
2		a_{21}	a_{22}		a_{2r}	A_2
		...				
m		a_{m1}	a_{m2}		a_{mr}	A_m
	Продукция					
1		b_{11}	b_{12}		b_{1r}	k_1y
2		b_{21}	b_{22}		b_{2r}	k_2y
		...				
n		b_{n1}	b_{n2}		b_{nr}	k_ny

В этой модели в качестве ресурсов могут выступать трудовые ресурсы с подразделениями по категориям и профессиям, природные ресурсы (полезные ископаемые, посевные площади и т.д.), производственные площади и др. В качестве конечной продукции указываются все виды промежуточной и конечной продукции, включая сырье, материалы, топливо, электроэнергию, потребительские продукты.

По сравнению со статической моделью МОБ здесь отсутствуют первые три недостатка. Ослабляется и четвертая условность: в оптимальной модели фиксируется не объем, а только структура конечной продукции. Однако данная модель остается линейной, детерминированной и статической. Кроме того, поскольку продукция измеряется в натуральных единицах, весь объем конечной продукции нельзя выразить одной величиной, поэтому ее состав задается заранее в виде некоторого стандартного единичного набора. В этой связи модель с таким критерием отвечает на вопрос: как производить продукцию но не отвечает на вопрос : что производить, т.е. набор формируется с учетом производственных возможностей промышленности , но без учета спроса.

Динамическая модель межотраслевого баланса Фон Неймана

Следующим представителем класса линейных моделей экономики является модель, построенная в середине 1930-х годов австрийским математиком Джоном фон Нейманом. По сравнению с моделью Леонтьева, которую можно использовать для планирования производства на одном плановом периоде в целом (год, пятилетка и т.д.), модель Неймана отслеживает производственный процесс внутри планового периода, т.е. затраты и выпуск, осуществляемые в каждый период времени (от квартала в квартал, от года в год и т.д.). Поэтому она обобщает модель Леонтьева в двух аспектах: в динамическом плане и в плане многопродуктовых отраслей.

В модели Неймана предполагается, что экономика функционирует эффективным образом сколь угодно долго. Логическим следствием такой предпосылки является рост производственных возможностей во времени с нарастающими темпами. Поэтому модель Неймана описывает "расширяющуюся" экономику.

Для вывода этой схемы рассмотрим функционирование экономики на некотором конечном периоде времени [0,T]. Отрезок [0,T] разобьем точками t_k, k=0,1,...,T, так, чтобы получилась возрастающая последовательность моментов времени:

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_T = T$$

Тогда получаем последовательность полуинтервалов $[t_k, t_{k+1})$ длины $t_{k+1}-t_k$, покрывающих весь отрезок [0,T]. Момент $t_0=0$ будем трактовать как начальный момент планирования производства товаров, а момент $t_T=T$ - как плановый горизонт. В дальнейшем во всех отношениях удобно полагать и трактовать моменты t_k как годы. При этих обозначениях мы будем писать t=0,1,…,T.

Под планом производства на отрезке времени *[0,T]* будем понимать совокупность

$$(y,\xi,\eta,l) = \begin{pmatrix} y^1 & \xi^1 & \eta^1 & l^1 \\ y^2 & \xi^2 & \eta^2 & l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^t & \xi^t & \eta^t & l^t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^T & \xi^T & \eta^T & l^T \end{pmatrix}$$

Здесь каждая строка соответствует плану (y^t,ξ^t,η^t,l^t) в год t

$y^t = \left(y_1^t,..,y_n^t\right)$- вектор запасов товаров,

$\xi^t = \left(\xi_1^t,..,\xi_n^t\right)$- вектор валового выпуска. Каждая компонента считается максимально возможным при существующих основных фондах выпуском отрасли j. Валовый выпуск отрасли может быть увеличен путем дополнительных вложений, и этот показатель также включается в план.

$\eta^t = \left(\eta_1^t,..,\eta_n^t\right)$

- обозначает планируемое в год t увеличение (приращение) валового выпуска.

l^t показывает общее количество нанятых во всех отраслях рабочих в год t.

Труд, как вид товара, не рассматривался в исходной модели Леонтьева. Особенность данного товара заключается в том, что он, во-первых, являясь воспроизводимым ресурсом, в то же время не является продуктом какой-либо отрасли, во-вторых, как фактор в производственном процессе, занимает промежуточное положение между материальными ресурсами и готовой продукцией. Никакое производство не может обходиться без трудовых затрат. Единицей ее измерения является рабочая сила. Необходимое для отрасли количество рабочей силы определяется трудовыми затратами, вложенными в выпуск одной единицы продукции.

Данный параметр для отрасли j обозначим l_j. Тогда число рабочих в отрасли j в год t равно $l_j y_j$. Вектор $l=(l_1,\dots,l_n)$ называется вектором трудовых затрат.

Обозначим через d_{ij}, j=1,...,n, объемы материальных затрат, необходимых для приращения на одну единицу выпуска товара i. Тогда материальные затраты на одновременное приращение выпусков всех отраслей на величины $(\eta_1^t,\dots,\eta_n^t)$ будут исчисляться как $D\eta^t$,

где $D=\|d_{ij}\|_n$ - технологическая матрица приращения производства.

Схема динамического межотраслевого баланса.

Схема составляется для каждого года t.

<table>
<tr><th rowspan="3">Отрасли</th><th rowspan="3">Совокупный запас товаров</th><th colspan="3">Производство</th><th colspan="2">Приращение производства</th><th rowspan="3">Конечное потребление на одного рабочего</th><th rowspan="3">Трудовые затраты</th></tr>
<tr><th colspan="2">Валовый выпуск</th><th rowspan="2">Технология</th><th rowspan="2">Приращ. валового выпуска</th><th rowspan="2">Технология</th></tr>
<tr><th>в год $t-1$</th><th>в год t</th></tr>
<tr><td>1</td><td>y_1^t</td><td>ξ_1^{t-1}</td><td>ξ_1^t</td><td rowspan="4">A</td><td>η_1^t</td><td rowspan="4">D</td><td>s_1</td><td>l_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>y_2^t</td><td>ξ_2^{t-1}</td><td>ξ_2^t</td><td>η_2^t</td><td>s_2</td><td>l_2</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>n</td><td>y_n^t</td><td>ξ_n^{t-1}</td><td>ξ_n^t</td><td>η_n^t</td><td>s_n</td><td>l_n</td></tr>
</table>

Рис. 6.2. Схема динамического межотраслевого баланса.

Балансовый характер этой схемы заключается в том, что ее элементы должны удовлетворять следующим (балансовым) соотношениям:

$$Ay^t + D\eta^t + l^t s \le y^t, \tag{6.3.1}$$

$$\langle l, y^t \rangle \le l^t, \tag{6.3.2}$$

$$y^t \le \xi^{t-1}, \tag{6.3.3}$$

$$\xi^t = \xi^{t-1} + \eta^t, \tag{6.3.4}$$

$$y^t \ge 0,\ \xi^t \ge 0,\ \eta^t \ge 0,\ l^t \ge 0,\ t = 1,\ldots,T. \tag{6.3.5}$$

Ay^t – производственные затраты

$D\eta^t$ – дополнительные затраты, соответствующие приращению производства на вектор η^t

$l^t s$ – конечное потребление в год t.

Поэтому условие (6.3.1) требует, чтобы весь годичный запас товаров покрывал все годичные затраты ежегодно. Неравенство (6.3.2) задает условие на необходимый объем трудовых ресурсов, неравенство (6.3.3) говорит о том, что запасы на данный год не могут превышать результатов производства предыдущего года, и, наконец, уравнение (6.3.4) описывает динамику роста валового выпуска из года в год.

Если сравнить систему (6.3.1)-(6.3.5) с моделью Леонтьева, то можно заметить, что последняя получается из (6.3.1) при отсутствии приращения производства.

Дополнительные условия (6.3.2)-(6.3.4) вызваны необходимостью учета трудовых ресурсов и динамического характера развития производства. Как и модель Леонтьева, данная схема может быть обобщена и детализирована по ряду параметров.

В приведенном здесь виде наиболее нереальным является условие (6.3.4), которое предполагает (при $\eta^t \neq 0$) получение результатов от затрат, осуществляемых в начале периода
[t-1,t), уже к концу этого периода. Условие (6.3.4) можно переписать так:

$$\xi^t = \xi^0 + \sum_{\tau=1}^{t} \eta^\tau, \ t = 1,\ldots,T.$$

В этом равенстве последнее слагаемое имеет смысл приращения производства за первые *t* лет по сравнению с начальным объемом выпуска. Доля такого приращения, приходящаяся на одну единицу начального валового выпуска, есть

$$\nu^t = \frac{1}{\xi^0} \cdot \sum_{\tau=1}^{t} \eta^\tau$$

Тогда уравнение (6.3.4) можно написать в виде $\xi^t = \nu^t \xi^0, \ t = 1,\dots,T$. Или:

$$\xi^t = \xi^{t-k_t} + \eta^t, \ t = 1,\dots,T,$$ ой лаг (обычно =1)

Обозначим $\tilde{y}^t = (\nu^t, \xi^t, \eta^t, l^t)$ и составим матрицы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A-E & 0 & D & s \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -E & 0 \\ l & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с помощью которых систему (6.3.1)-(6.3.5) перепишем в виде

$$\tilde{A}\tilde{y}^t \le \tilde{B}\tilde{y}^{t-1}, \ \ \tilde{y}^t \ge 0 \quad t=1,\dots,T \qquad (6.3.6)$$

В математической экономике *магистралью* называется траектория экономического роста, на которой пропорции производственных показателей (такие как темп роста производства, темп снижения цен) неизменны, а сами показатели (такие как интенсивность производства, валовый выпуск) растут с постоянным максимально возможным темпом. Таким образом, магистраль - это траектория или луч максимального сбалансированного роста.

Поскольку "оптимальное" или "эффективное" развитие экономики в любом смысле так или иначе связано и должно сопровождаться экономическим ростом, то для достижения любой конечной цели следует поступать аналогичным образом: сначала вывести производство на магистральный путь, т.е. на траекторию (или луч) Неймана, характеризующуюся максимальным темпом роста и минимальной нормой процента, а по истечении определенного срока времени вывести ее к задуманной цели. Такими целями могут быть максимизация прибыли, минимизация затрат, максимизация полезности от потребления товаров, достижение конкурентного равновесия при наиболее благоприятных условиях, т.е. на более высоком уровне благосостояния населения, и т.д.

Итак, с одной стороны мы имеем магистральные модели, а с другой - оптимизационные или еще шире – нормативные модели экономики. Изучение этих двух моделей во взаимосвязи, т.е. изучение связи между магистральными и оптимальными (в том или ином смысле) траекториями и является предметом магистральной теории.