Лекция 4. Нормальные формы.

Нормальные формы для формул АВ

Для каждой формулы АВ существует равносильная формула, содержащая лишь отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для нахождения её достаточно используя равносильности у,ч Теоремы 4.4, выразить импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию

$$\neg(\neg X \wedge (\neg X \vee Y)) \vee Y$$

$$\neg\neg X \vee Y$$

$$(\neg X \wedge (X \to Y)) \to Y \sim X \vee Y$$

$$(X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Y)$$

$$(X \wedge \neg Y) \vee Y$$

ТЗ: Придумать еще 3 равносильные формулы с отрицанием, конъюнкцией и дизъюнкцией.

Понятие нормальных форм

Конъюнктивным одночленом (элементарной конъюнкцией) от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

КО: $X_1 \wedge X_1$, $X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3$, $X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge \neg X_2 \wedge X_5$

$\cancel{\neg\neg X_1 \wedge X_2}$ $\cancel{X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_1)}$

Дизъюнктивным одночленом (элементарной дизъюнкцией) от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

ДО: $\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3$, $\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee X_1 \vee X_2$

$\cancel{\neg(X_1 \wedge X_2)}$ $\cancel{X_1 \wedge \neg\neg X_3}$

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражение вида $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$, где все K_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Аналогично *конъюнктивной нормальной формой* называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_q$, где все D_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Будем также называть дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой указанные выражения при $p = 1$ ($q = 1$).

Нормальную форму, представляющую формулу F (т.е. равносильную F), будем называть просто *нормальной формой этой формулы*.

ТЗ: Привести по 3 примера ДНФ и КНФ

Совершенные нормальные формы

Определение 5.1. Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется *совершенным*, если в него от каждой пары $X_i, \neg X_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) входит только один представитель (X_i или $\neg X_i$). Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется *совершенной* от этих переменных, если в нее входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно) от $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Пример СДНФ:

$$(X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$$

$$\cancel{(\neg X_1 \wedge X_1 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3)}$$

Пример СКНФ:

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3)$$

$$\cancel{(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3)}$$

Дополнительные обозначения для нормальных форм

$$X^{\alpha} = \begin{cases} X, \text{ если } \alpha = 1, \\ \neg X, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

$$0^0 = \neg 0 = 1$$
$$0^1 = 0$$
$$1^0 = \neg 1 = 0$$
$$1^1 = 1$$

$$X^{\alpha} = 0 \iff X \neq \alpha$$
$$X^{\alpha} = 1 \iff X = \alpha$$

$X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n = \vee_{i=1}^{n} X_i$

$\vee_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} H(X_1,\ldots,X_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – дизъюнкция всевозможных выражений (формул) $H(X_1,\ldots,X_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, зависящих от переменных $(X_1,\ldots,X_n)$, когда индексы суммирования (дизъюнктирования) $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ пробегают всевозможные упорядоченные наборы длины n, составленные из нулей и единиц.

Пример.

$$\vee_{(\alpha,\beta)}\left(X^{\alpha}\wedge Y^{\beta}\right)=\left(X^{0}\wedge Y^{0}\right)\vee\left(X^{0}\wedge Y^{1}\right)\vee\left(X^{1}\wedge Y^{0}\right)\vee\left(X^{1}\wedge Y^{1}\right)=$$
$$=\left(\neg X\wedge\neg Y\right)\vee\left(\neg X\wedge Y\right)\vee\left(X\wedge\neg Y\right)\vee\left(X\wedge Y\right)$$

Лемма 5.2. *Для всякой формулы алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ справедливо разложение*

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}).$$

Доказательство. Возьмем произвольный набор из нулей и единиц $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ (каждое ξ_i, где $1 \le i \le n$, есть либо 0, либо 1) и вычислим значения формул, стоящих в правой и левой частях доказываемой равносильности, при $X_1 = \xi_1, X_2 = \xi_2, ..., X_n = \xi_n$.

С одной стороны, в правой части доказываемого равенства получим

$$\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} (F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge \xi_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \xi_n^{\alpha_n}),$$

что представляет собой дизъюнкцию нескольких конъюнктивных одночленов. Каждый конъюнктивный одночлен характеризуется индексным набором нулей и единиц $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Если для данного конъюнктивного одночлена набор $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ нулей и единиц таков, что $\alpha_1 \ne \xi_1$, или $\alpha_2 \ne \xi_2$, ..., или $\alpha_n \ne \xi_n$, то согласно определению формулы X^α, введенному в начале пункта, будем иметь или $\xi_1^{\alpha_1} = 0$, или $\xi_2^{\alpha_2} = 0$, ..., или $\xi_n^{\alpha_n} = 0$. Но тогда и весь данный конъюнктивный одночлен будет равен нулю и потому на результат дизъюнкции влияния не окажет, а значит, из числа дизъюнктивных «слагаемых» может быть безболезненно исключен. Только один конъюнктивный одночлен окажется не равным нулю — тот, что характеризуется таким набором $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, который равен взятому в начале набору $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, т.е. для которого $\alpha_1 = \xi_1$, $\alpha_2 = \xi_2$, ..., $\alpha_n = \xi_n$. Только для этого конъюнктивного одночлена будем иметь $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge \xi_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \xi_n^{\alpha_n} = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \wedge\, \xi_1^{\xi_1} \wedge \xi_2^{\xi_2} \wedge \ldots \wedge \xi_n^{\xi_n} = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge 1 \wedge 1 \wedge \ldots \wedge 1 = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Таким образом, конъюнктивный одночлен, соответствующий индексному набору $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, равен $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Этому же значению равна и вся дизъюнкция, потому что, как показано выше, все остальные конъюнктивные одночлены равны нулю.

С другой стороны, формула, стоящая в левой части доказываемого равенства, обратится при $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$, ..., $X_n = \xi_n$ в то же самое значение $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Набор нулей и единиц $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ был выбран произвольно. Следовательно, формулы в левой и правой частях равносильности действительно равносильны. Лемма доказана. □

Теорема 5.3 (о представлении формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными формулами). *Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) совершенную дизъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство. ***Существование.*** Всякая формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ обладает указанным в предыдущей лемме разложением.

Поскольку формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ не тождественно ложна, то существуют такие наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нулей и единиц, что $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$. Наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, обращающие формулу F в нуль, будут обращать в нуль также и конъюнктивные одночлены, входящие в дизъюнкцию и соответствующие данным индексным наборам. Поэтому все такие одночлены исключим из дизъюнкции. Итак, в дизъюнкции остаются конъюнктивные одночлены, соответствующие лишь индексным наборам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нулей и единиц, для которых $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$. Тогда разложение для формулы F принимает следующий вид:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1}} ((F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n})) \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1} (X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция («суммирование») ведется по всем индексным наборам $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ нулей и единиц, для которых $F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1$. Выражение, стоящее в правой части полученной равносильности, есть не что иное, как совершенная дизъюнктивная нормальная форма от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$, потому что каждый конъюнктивный одночлен $X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge X_n^{\alpha_n}$, входящий в дизъюнкцию, совершенен (каждая переменная $X_1, X_2, ..., X_n$ входит в него точно один раз: либо сама, либо со знаком отрицания в зависимости от значения ее показателя степени).

Единственность. Предположим, что некоторая формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ имеет два представления совершенными дизъюнктивными нормальными формами:

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) \cong K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_q \ ;$$
$$F(X_1, X_2, ..., X_n) \cong K_1^* \vee K_2^* \vee ... \vee K_r^*,$$

где K_i, $1 \leq i \leq q$, и K_j^*, $1 \leq j \leq r$, есть совершенные конъюнктивные одночлены от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$. Причем, не нарушая общности, считаем, что ни один из одночленов $K_1, K_2, ..., K_q$ не повторяется в этом наборе, потому что повторяющиеся одночлены можно исключить ввиду идемпотентности дизъюнкции (теорема 4.4, *ж*). Аналогична ситуация в форме $K_1^* \vee K_2^* \vee ... \vee K_r^*$. Тогда имеет место равносильность $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_q \cong K_1^* \vee K_2^* \vee ... \vee K_r^*$.

Пусть, например, совершенный конъюнктивный одночлен K_1 имеет вид $K_1 \equiv (X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n})$. Придадим переменным X_1, X_2, ..., X_n значения α_1, α_2, ..., α_n соответственно. Тогда совершенный конъюнктивный одночлен K_1 примет значение 1, и, следовательно, вся совершенная дизъюнктивная нормальная форма, стоящая в левой части равносильности, станет равна единице. Тогда и правая часть данной равносильности обратится в единицу, и для набора α_1, α_2, ..., α_n значений переменных одна из совершенных элементарных конъюнкций K^*, например K_j^*, также станет равной единице. Если K_j^* имеет вид $K_j^* \equiv (X_1^{\beta_1} \wedge X_2^{\beta_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\beta_n})$, то доказанное означает, что $\alpha_1^{\beta_1} \wedge \alpha_2^{\beta_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_n^{\beta_n} = 1$. Последнее равенство возможно в том и только в том случае, когда $\alpha_1^{\beta_1} = 1$, $\alpha_2^{\beta_2} = 1$, ..., $\alpha_n^{\beta_n} = 1$, что может быть лишь тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, ..., $\beta_n = \alpha_n$. Следовательно, $K_j^* \equiv (X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n})$, т.е. $K_j^* = K_1$. Таким образом, совершенная элементарная конъюнкция K_1 встречается среди совершенных элементарных конъюнкций K_1^*, K_2^*, ..., K_r^*. Тем же самым способом устанавливается, что любая из совершенных элементарных конъюнкций K_1, K_2, ..., K_q встречается среди K_1^*, K_2^*, ..., K_r^*, и обратно, любая из совершенных элементарных конъюнкций K_1^*, K_2^*, ..., K_r^* встречается среди K_1, K_2, ..., K_q. Ввиду того что одночлены в данных наборах не повторяются, то $q = r$ и обе части равносильности $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_q \equiv K_1^* \vee K_2^* \vee \ldots \vee K_r^*$ отличаются самое большее порядком членов дизъюнкции. □

Представление формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными (СКН) формами. Понятия и теоремы этого пункта носят двойственный характер по отношению к соответствующим понятиям и теоремам предыдущего пункта. Вводится следующее обозначение:

$$^{\beta}X = \begin{cases} \neg X, \text{ если } \beta = 1, \\ X, \text{ если } \beta = 0. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $^{0}0 = 0$, $^{1}0 = 1$, $^{0}1 = 1$, $^{1}1 = 0$, т.е. $^{\beta}X = 1$ тогда и только тогда, когда $X \neq \beta$; и $^{\beta}X = 0$ тогда и только тогда, когда $X = \beta$.

Вместо конъюнкции $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ будем писать $\wedge_{i=1}^{n} X_i$. В частности, запись $\wedge_{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} H(X_1, \ldots, X_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ обозначает дизъюнкцию всевозможных выражений (формул) $H(X_1, \ldots, X_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, зависящих от переменных $X_1, \ldots, X_n$, когда индексы произведения (конъюнктирования) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ пробегают всевозможные упорядоченные наборы длины n, составленные из нулей и единиц. Например, $\wedge_{(\alpha, \beta)}(^{\alpha}X \vee {}^{\beta}X) = (^{0}X \vee {}^{0}Y) \wedge (^{0}X \vee {}^{1}Y) \wedge (^{1}X \vee {}^{0}Y) \wedge (^{1}X \vee$ $\vee {}^{1}Y) = (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$.

Лемма 5.4. *Для всякой формулы* $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *алгебры высказываний* справедливо разложение

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cong \bigwedge_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} (F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \vee {}^{\beta_1}X_1 \vee {}^{\beta_2}X_2 \vee \ldots \vee {}^{\beta_n}X_n).$$

Подобно теореме 5.3 выводится теорема 5.5.

Теорема 5.5 (о представлении формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными формами). *Каждая формула алгебры высказываний от n переменных, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) совершенную конъюнктивную нормальную форму.*

ТЗ: Доказать 5.4 и 5.5

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv \bigvee_{F(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) = 1} (X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}), \text{ где } X^\alpha = \begin{cases} X, \text{ если } \alpha = 1, \\ \neg X, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

По сути, эта формула описывает ***правило (алгоритм) отыскания совершенной дизъюнктивной нормальной формы для данной формулы***: *нужно выбрать все те наборы значений ее переменных, на которых формула принимает значение 1; для каждого такого набора выписать совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 на этом наборе и только на нем; полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаками дизъюнк-*

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv \bigwedge_{F(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0} ({}^{\beta_1}X_1 \vee \ldots \vee {}^{\beta_n}X_n), \text{ где } {}^{\beta}X = \begin{cases} X, \text{ если } \beta = 0 \\ \neg X, \text{ если } \beta = 1. \end{cases}$$

и, в свою очередь, описывает следующее ***правило (алгоритм) отыскания совершенной конъюнктивной нормальной формы для данной формулы:*** *нужно выбрать все те наборы значений ее переменных, на которых формула принимает значение 0. Для каждого такого набора*

выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий значение 0 на этом наборе и только на нем. Полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить знаками конъюнкции (см. Задачник, № 2.9, *л*).

Пример. Составление СДНФ по таблице истинности

X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

СДНФ:

$$(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$$

0 0 1	0 1 1	1 0 0	1 1 0

Пример. Составление СКНФ по таблице истинности

X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

СКНФ:

$$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$$

0 0 0 | 0 1 0 | 1 0 1 | 1 1 1

Получение НФ с помощью равносильных преобразований

Пример. Найти СДНФ для формулы $(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z)$;

1. Применяя равносильности

$P \to Q \sim \neg P \vee Q$ (Th. 4.4 у))

$P \leftrightarrow Q \sim (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ (Th.4.4 ч), у))

избавиться от импликации и эквивалентности.

$$(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z) \sim \neg(X \leftrightarrow Y) \vee (X \wedge Z) \sim \neg((\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)) \vee (X \wedge Z)$$

2. Применяя законы де Моргана

р) $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$ (*1-й закон де Моргана*);
с) $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$ (*2-й закон де Моргана*);

, довести знаки отрицания до переменных, убрать двойные отрицания

а) $\neg\neg P \cong P$;

$$\neg((\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)) \vee (X \wedge Z) \sim \neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(X \vee \neg Y) \vee (X \wedge Z) \sim$$
$$\sim (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

3. Применить законы дистрибутивности

$$м)\ P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R);$$

Получена ДНФ.

ТЗ: написать алгоритм получения СКНФ путем равносильных преобразований

4. Для получения СДНФ из полученной ДНФ необходимо каждый КО дополнить до СКО, добавив отсутствующие переменные

$$\begin{tikzcd} & (X \wedge \neg Y \wedge Z) \\ (X \wedge \neg Y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \end{tikzcd}$$

Аналогично,

Аналогично,

$$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \sim (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee$$
$$\vee (X \wedge Z \wedge Y) \vee (X \wedge Z \wedge \neg Y)$$

5. Удалить повторяющиеся КО

$$(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Z \wedge Y) \vee (X \wedge Z \wedge \neg Y) \sim$$
$$\sim (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$

СДНФ получена