Лекция 8

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Летучка

(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Комплексное число – это

2) МНИМАЯ ЕДИНИЦА :

3) Алгебраическая форма записи комплексного числа:

4) Какое число называется сопряженным данному комплексному числу? :

5) $i^2 =$

6) $i^3 =$

Летучка(ответы)

1) упорядоченная пара действительных чисел $\mathrm{z} = (x; y)$.

2) $i = (0; 1)$

3) $z = x + iy$

4) $\bar{\mathrm{z}} = x - iy$

5) $i^2 = -1$

6) $i^3 = -i$

Проверка домашнего задания

4. $(2-i)^2 = 4-4i+i^2 = 4-4i-1 = 3-4i$

5. $(2-i)^3 = 8-3\cdot 4i+3\cdot 2\cdot i^2 - i^3 = 8-12i+6i^2+i = 2-11i$

6. $(6-4i)(6+4i) \; = 36+16 = 52$

7. $\frac{6-4i}{6+4i} = \frac{(6-4i)(6-4i)}{(6+4i)(6-4i)} = \frac{36-2\cdot 24i+16i^2}{52} = \frac{36-16-48i}{52} = \frac{20-48i}{52} = \frac{(20-48i):4}{52:4} = \frac{5-12i}{13}$

Проверка домашнего задания

- 8. $$\frac{4-5i}{4+5i}=\frac{(4-5i)^2}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{16-40i+25i^2}{16+25}=\frac{-9-40i}{41}=-\frac{9}{41}-\frac{40}{41}i$$

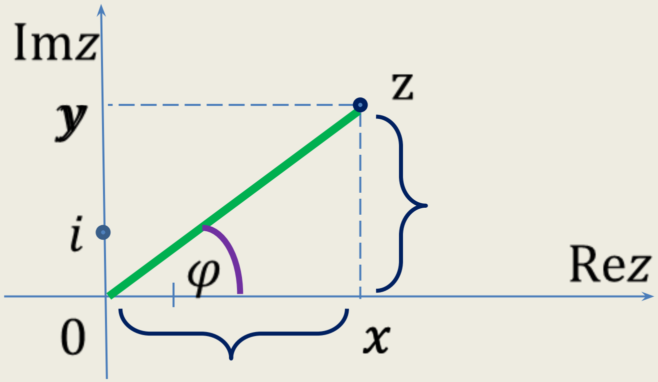
9. $$\frac{i-5}{i+5}=\frac{(i-5)(5-i)}{(i+5)(5-i)}=\frac{-(5-i)^2}{25+1}=-\frac{(25-10i+i^2)}{1+25}=-\frac{(25-10i-1)}{26}=-\frac{24+10i}{26}=-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$$

Проверка домашнего задания

- 10. $\frac{27-8i}{3+2i}=\frac{3^3+(2i)^3}{3+2i}=\frac{(3+2i)(3^2-3\cdot 2i+4i^2)}{3+2i}=$

$$\frac{\cancel{(3+2i)}(3^2-3\cdot 2i+4i^2)}{\cancel{3+2i}}=9-6i-4=5-6i$$

Модуль и аргумент комплексного числа



Модуль комплексного числа – это расстояние от точки, обозначающей число, до точки 0:

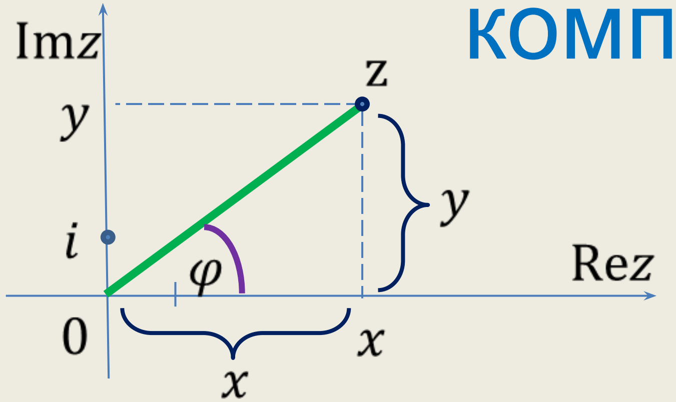
$$|z| = |Oz| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Аргумент комплексного числа φ – это **угол** :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \end{cases} \qquad \varphi \in (-\pi\,;\pi]$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа



$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} & \Rightarrow x = |z|\cos\varphi \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} & \Rightarrow y = |z|\sin\varphi \end{cases}$$

Подставим в алгебраическую форму записи и получим :

$$z = x + iy = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi =$$

$$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

В **тригонометрической** форме записи операции ***умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня*** выполняются **проще, чем в алгебраической** форме.

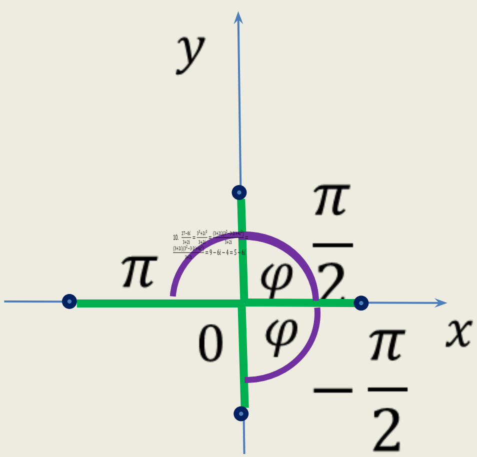
Сравнение: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi \cdot k, \quad k \in Z \end{cases}$

Нахождение аргумента комплексного числа

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{если } (x;y) \in I\ , IV \text{ четверти;} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{если } (x;y) \in II \text{ четверти;} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{если } (x;y) \in III \text{ четверти;} \end{cases}$$

$\varphi \in (-\pi\ ; \pi]$

Если точка $z(x;y)$ лежит на осях, то

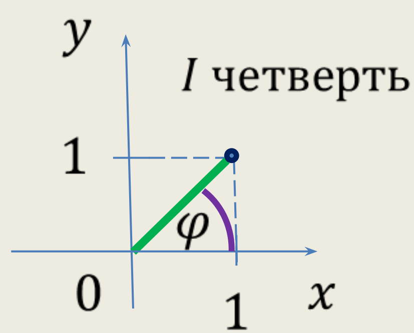


$$\varphi = \begin{cases} 0 \quad \text{если } x \geq 0, y = 0 \\ \quad \text{если } x = 0, y > 0 \\ \quad \text{если } x < 0, y = 0 \\ \quad \text{если } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Пример тригонометрической формы записи комплексного числа

представим $1 + i$ в тригонометрической форме :

$$\mathbf{1} + 1i = \left|\begin{array}{ll} x = & |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ y = & \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{1} = \mathrm{arctg}1 = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right| = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$



Умножение в тригонометрической форме

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ ;$$

$$z_1 \cdot z_2 = \ |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|[\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\, i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\, i\sin\varphi_2] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|[\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|[\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|[\boxed{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2} + i(\boxed{\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2})] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|(\boxed{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i\,\boxed{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)})\ ;$$

Умножение и деление в тригонометрической форме

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\,;$$

$$z_1 \cdot z_2 = \ |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \ \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\,;$$

Формулу для деления доказать дома!

Формула Муавра

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi);$

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot |z|(\cos(\varphi + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi)) =$$
$$= |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi);$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = |z|^2 \cdot |z|(\cos(2\varphi + \varphi) + i\sin(2\varphi + \varphi)) =$$
$$= |z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi);$$

...

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

$$(1+i)^{10} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10} =$$

по формуле Муавра:

$$= \left(\sqrt{2}\,\right)^{10}\cdot\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^5\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = \quad 32\cdot\left(\cos\frac{4\pi+\pi}{2} + i\sin\frac{4\pi+\pi}{2}\right) =$$

$$= 32\cdot\left(\cos\left(\cancel{2\pi} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\cancel{2\pi} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 32\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \ 32i\,.$$

ОТВЕТ