Методическая разработка Савченко Е.М. МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Наибольшее и наименьшее значение функции.

Сложная функция

Открытый банк заданий по математике http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ – функция, представленная как композиция нескольких функций. **Сложная функция** – функция от функции.

Сложная функция $u(v(x))$ представлена в виде цепочки простых функций. $v(x)$ – промежуточный аргумент, x – независимая переменная.

Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу. Это правило (цепное правило) распространяется на сложные функции с двумя, тремя и т. д. промежуточными аргументами:

$$[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

$$[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$$

В этой записи я «сэкономила» независимый аргумент «х».

Чтобы **найти производную сложной функции**, нужно

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.
2. Определить промежуточный аргумент.

В этой процедуре наибольшие затруднения вызывает **нахождение внешней функции**. Для этого используется простой алгоритм:

а. Запишите формулу функции.

б. Представьте, что вам нужно вычислить значение функции при каком-то значении х. Для этого вы подставляете это значение х в уравнение функции и производите арифметические действия. То действие, которое вы делаете последним и есть внешняя функция.

В композиции может быть и больше двух функций:

$$y^{/} = f^{/}(f_1(f_2(f_3(f_4(x)))))\cdot f_1^{/}(f_2(f_3(f_4(x))))\cdot f_2^{/}(f_3(f_4(x)))\cdot f_3^{/}(f_4(x))\cdot f_4^{/}(x)$$

Функция квадратного корня

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Показательная функция

$$y = 2^{x^2 + 2x + 5}$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Логарифмическая функция

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Степенная функция

$$y = \sin^4 x$$

Функция промежуточного аргумента – тригонометрическая функция sinx

1. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^{x} + 3$ на отрезке [1; 2]

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(1) = e^{2} - 6e + 3;$ $y(2) = e^{4} - 6e^{2} + 3$

$$[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(kx)' = k$$

$$(C)' = 0$$

2) $y' = \qquad - 6e^{x} + \boxed{0} = 2e^{x}(e^{x} - 3)$

>0

$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

1) производная для внешней функции: $(e^{x})' = e^{x}$

$\neq 0$

$2e^{x}(e^{x} - 3) = 0$

$e^{x} - 3 = 0$

2) умножим на производную промежуточного аргумента: $(kx)' = k$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

1

$\ln e^{x} = \ln 3$

$x = \ln 3 \in [1; 2]$

$$\log_a a = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума.

Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

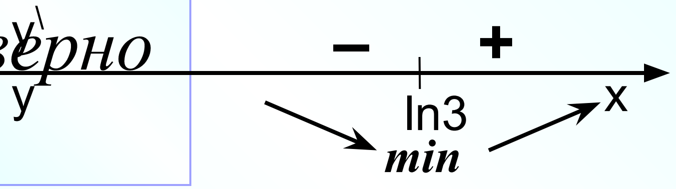
Проверим, принадлежит ли x=ln3 промежутку [1; 2]

$$1 \le \ln 3 \le 2$$

$$\ln e \le \ln 3 \le \ln e^{2}$$

$$e \le 3 \le e^{2} \quad верно$$

$$e \approx 2,7$$



Найдем значение функции в критической точке.

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 9 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$

D(y): $5-4x-x^2 > 0$

$$f'(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

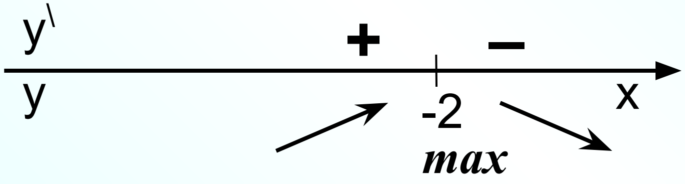
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cdot\left(5-4x-x^2\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cdot\frac{\overset{-2(2+x)}{\cancel{(-4-2x)}}}{2\sqrt{5-4x-x^2}}$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

$x=-2\in D(y)$



Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-2)=\sqrt{5-4\cdot(-2)-(-2)^2}=\sqrt{5+8-4}=\sqrt{9}=3$$

В 14 **3**

При решении некоторых заданий на вычисление наибольшего и наименьшего значений функции можно найти ответ и без вычисления производной.

Сложная функция $f(g(x))$ представлена в виде цепочки простых функций.

Где g(x) – промежуточный аргумент, квадратичная функция

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

Если внешняя функция является монотонно возрастающей на всей области определения. Значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция будет иметь наибольшее значение.

А наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция будет иметь наименьшее значение.

Рассмотрим примеры.

2 способ

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

D(y): $5 - 4x - x^2 > 0$

Решим задание без вычисления производной.

Функция квадратного корня монотонно возрастает на всей области определения. Значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $-x^2 - 4x + 5$ будет иметь наибольшее значение.

Старший коэффициент квадратного трехчлена равен $-1 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-4}{2*(-1)} = -2 \in D(y)$$

Итак, наибольшее значение функция квадратного корня примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наибольшее значение, т.е. в точке x = – 2. Вычислим его:

$$y(-2) = \sqrt{5 - 4\cdot(-2) - (-2)^2} = \sqrt{5 + 8 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

В 14	**3**					

3. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-6x+13}$

D(y): $x^2-6x+13>0$

$$f'(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

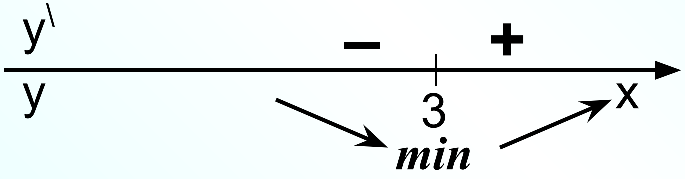
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+13}}\cdot(x^2-6x+13)'=$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+13}}=\frac{\cancel{(2x-6)}\;2(x-3)}{2\sqrt{x^2-6x+13}}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

$x=3\in D(y)$



Наименьшее значение функция примет в точке минимума.

$$y(3)=\sqrt{3^2-6\cdot3+13}=\sqrt{9-18+13}=\sqrt{4}=2$$

В 14	2					

2 способ

3. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $x^2 – 6x + 13 > 0$

Функция квадратного корня монотонно возрастает на всей области определения. Значит, наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $x^2 – 6x + 13$ будет иметь наименьшее значение.

Старший коэффициент квадратного трехчлена равен +1> 0, значит, ветви параболы направлены вверх. И наименьшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3 \in D(y)$$

Итак, наименьшее значение функция квадратного корня примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наименьшее значение, т.е. в точке x = 3. Вычислим его:

$$y(3) = \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 + 13} = \sqrt{9 - 18 + 13} = \sqrt{4} = 2$$

В 14	2					

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

D(y): $x \in R$

$$f^{/}(g(x)) = f^{/}(g(x)) \cdot g^{/}(x)$$

$$\left(a^x\right)^{/} = a^x \ln a$$

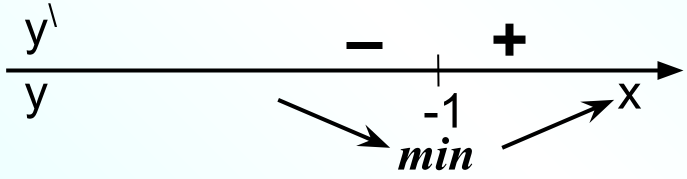
$$y^{/} = 2^{x^2+2x+5} \ln 2 \cdot \left(x^2+2x+5\right)^{/} =$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$= \underset{>0}{2^{x^2+2x+5}} \underset{>0}{\ln 2} \cdot (2x+2)$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

x = - 1 ∈ D(y)



Наименьшее значение функция примет в точке минимума.

$$y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^{1-2+5} = 2^4 = 16$$

В 14	**1**	**6**				

2 способ

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $x \in R$

Показательная функция с основанием 2>1 монотонно возрастает на всей области определения. Значит, наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $x^2 + 2x + 5$ будет иметь наименьшее значение.
Старший коэффициент квадратного трехчлена равен +1> 0, значит, ветви параболы направлены вверх. И наименьшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{2}{2*1} = -1 \in \text{D(y)}$$

Итак, наименьшее значение показательная функция примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наименьшее значение, т.е. в точке x = – 1. Вычислим его:

$$y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^{1-2+5} = 2^4 = 16$$

В 14	**1**	**6**				

5. Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-7-6x-x^2}$

D(y): $x \in R$

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

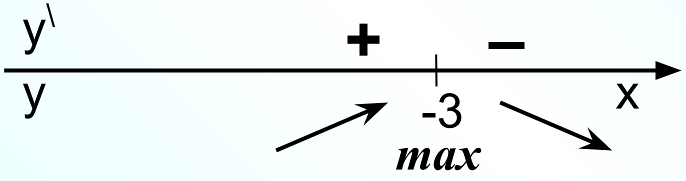
$$y' = 3^{-7-6x-x^2} \ln 3 \cdot \left(-7-6x-x^2\right)' =$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$= \underset{>0}{3^{-7-6x-x^2}} \; \underset{>0}{\ln 3} \cdot (-6-2x)$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

x = - 3 ∈ D(y)



Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-3) = 3^{-7-6\cdot(-3)-(-3)^2} = 3^{-7+18-9} = 3^2 = 9$$

В 14 9

2 способ

5. Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-7-6x-x^2}$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $x \in R$

Показательная функция с основанием 3>1 монотонно возрастает на всей области определения. Значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция – x^2 – 6x – 7 будет иметь наибольшее значение.
Старший коэффициент квадратного трехчлена равен – 1< 0, значит, ветви параболы направлены вниз. И набольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-6}{2\cdot(-1)} = -3 \in D(y)$$

Итак, наибольшее значение показательная функция примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наибольшее значение, т.е. в точке x = – 3. Вычислим его:

$$y(-3) = 3^{-7-6\cdot(-3)-(-3)^2} = 3^{-7+18-9} = 3^2 = 9$$

В 14	9					

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $4 - 2x - x^2 > 0$

Логарифмическая функция с основанием 5 является монотонно возрастающей на всей области определения. Значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $4 - 2x - x^2$ будет иметь наибольшее значение. Старший коэффициент квадратного трехчлена равен –1<0, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$$

$$y(-1) = \log_5\left(4 - 2\cdot(-1) - (-1)^2\right) + 3 = \log_5\left(4 + 2 - 1\right) + 3 = \overset{1}{\log_5 5} + 3$$

$$= 4$$

В 14	4

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \log_3\left(x^2 - 6x + 10\right) + 2$$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $x^2 - 6x + 10 \quad 0$

Логарифмическая функция с основанием 3 является монотонно > возрастающей на всей области определения. Значит, наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $x^2 - 6x + 10$ будет иметь наименьшее значение. Старший коэффициент квадратного трехчлена равен +1>0, значит, ветви параболы направлены вверх. И наименьшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3$$

0

$$y(3) = \log_3\left(3^2 - 6\cdot 3 + 10\right) + 2 = \log_3\left(9 - 18 + 10\right) + 2 = \log_3 1 + 2 = 2$$

В 14	**2**					