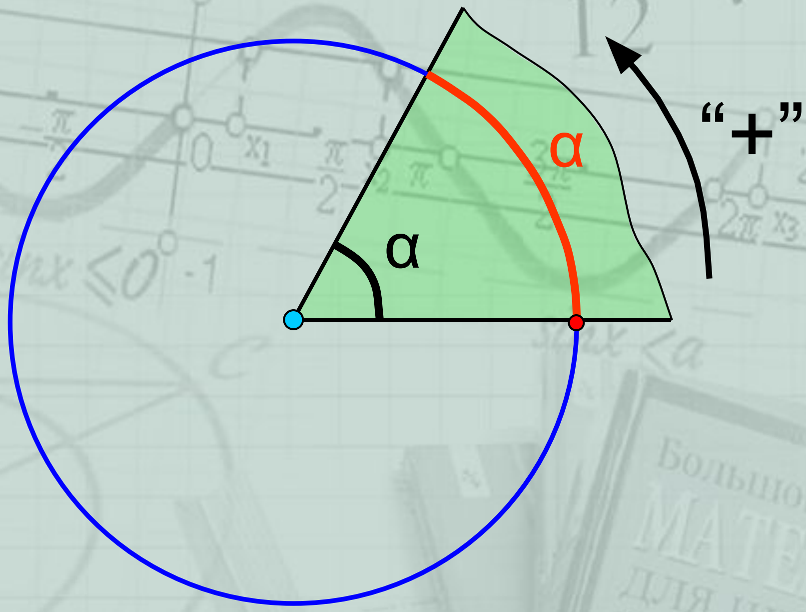
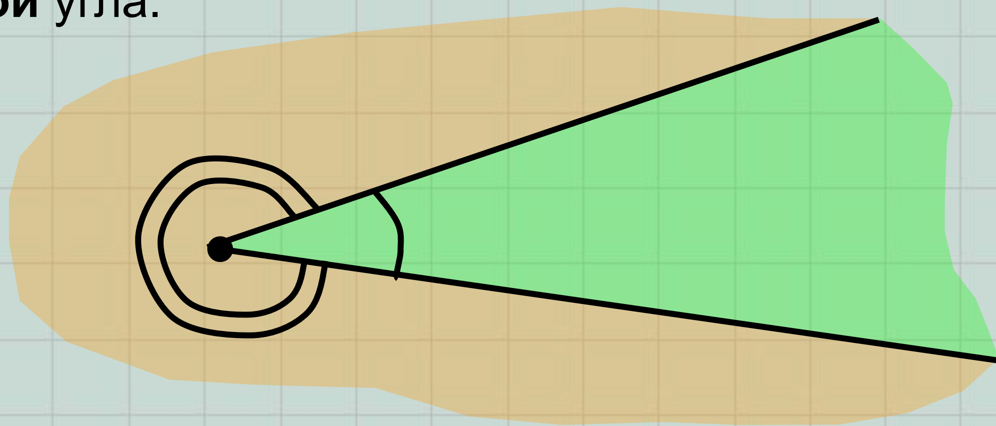
Углы поворота. Градусная мера углов и дуг.



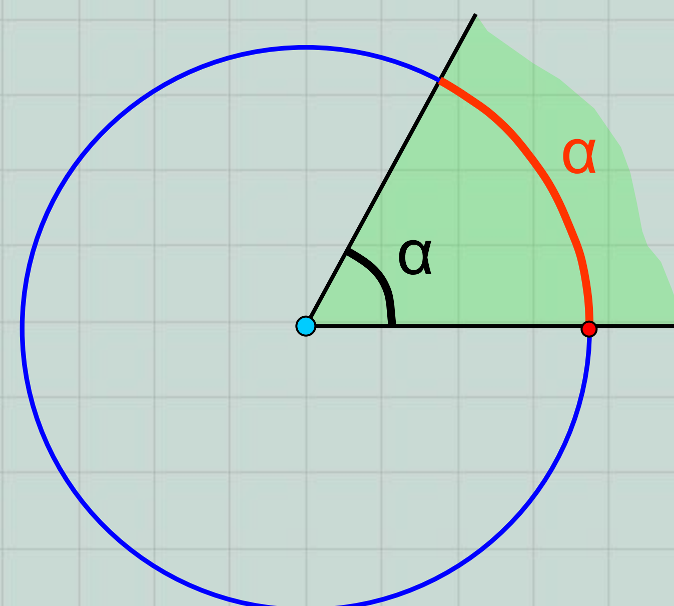
Алгебра , 9-10 класс

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

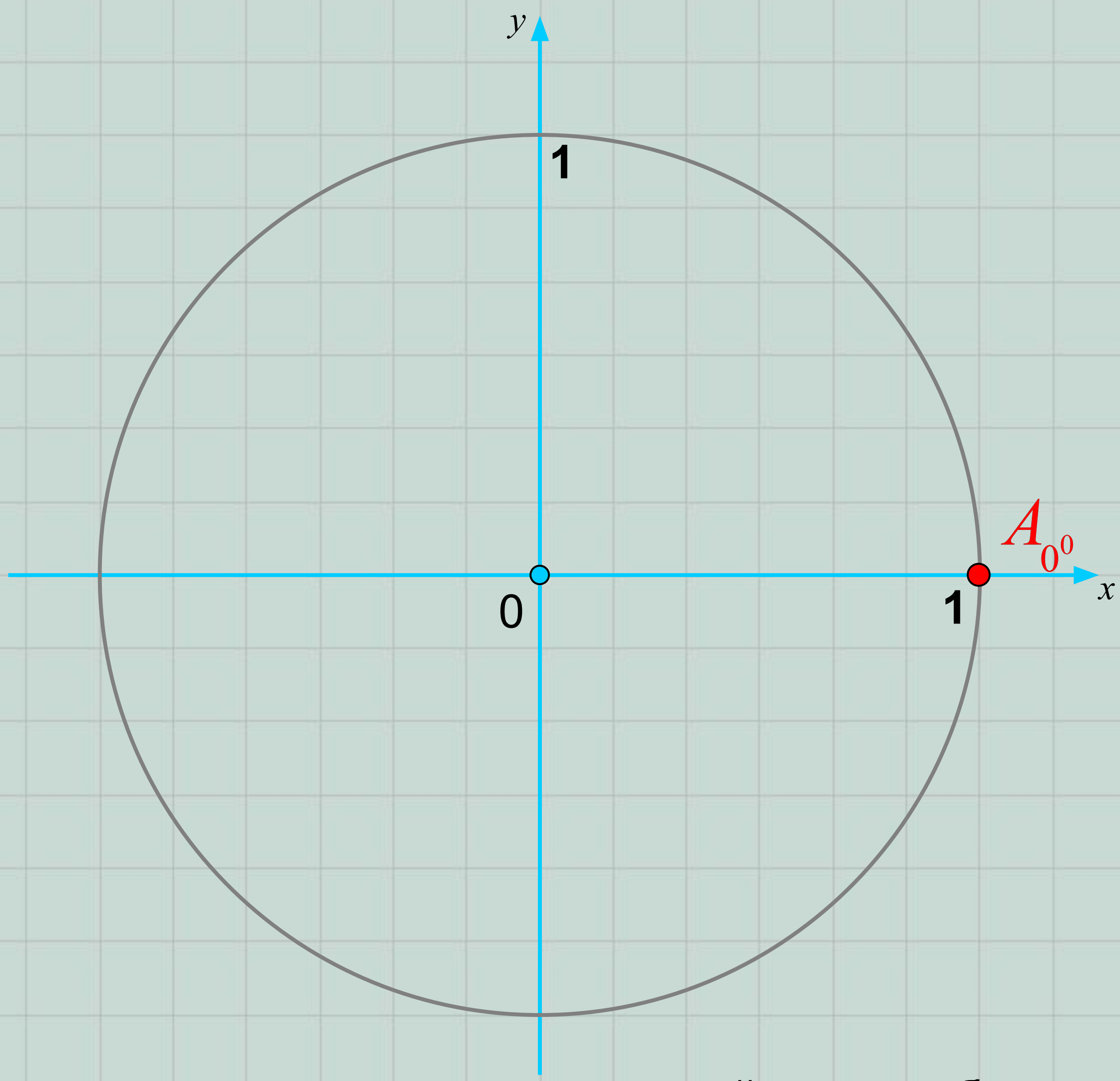
Углом называют часть плоскости, заключенную между двумя лучами, имеющими общее начало. Данные лучи называются **сторонами** угла, а их общее начало – **вершиной** угла.



Если вершина угла расположена в центре окружности, то такой угол называется **центральным**. Часть окружности, которая находится внутри центрального угла, называется **дугой окружности, соответствующей этому центральному углу**. Ещё говорят, что центральный угол α опирается на дугу, соответствующую и равную ему.

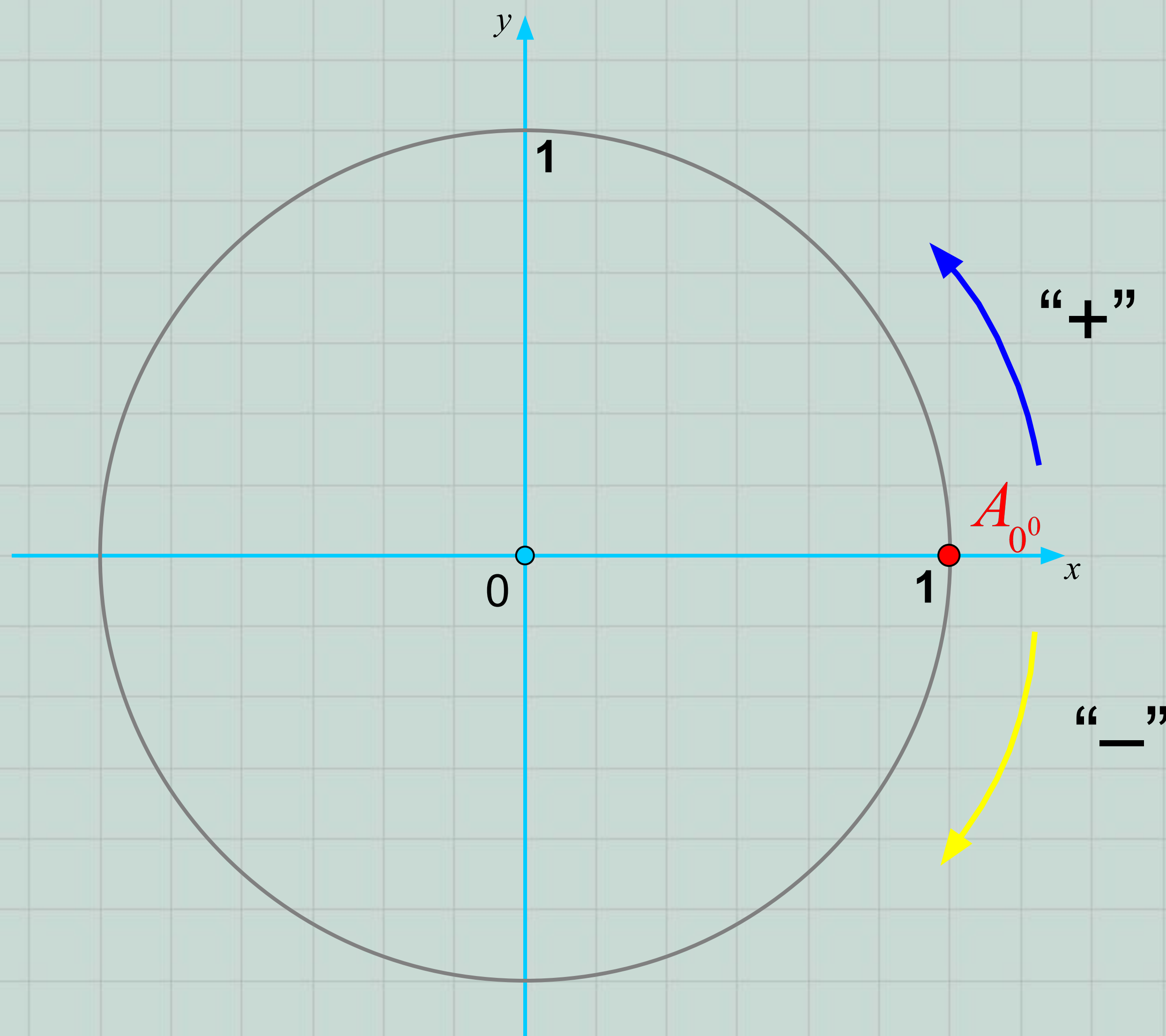


Окружность единичного радиуса с центром в начале координатной плоскости называется **единичной** (**тригонометрической**) **окружностью**, а круг, который она ограничивает – **тригонометрическим кругом**.

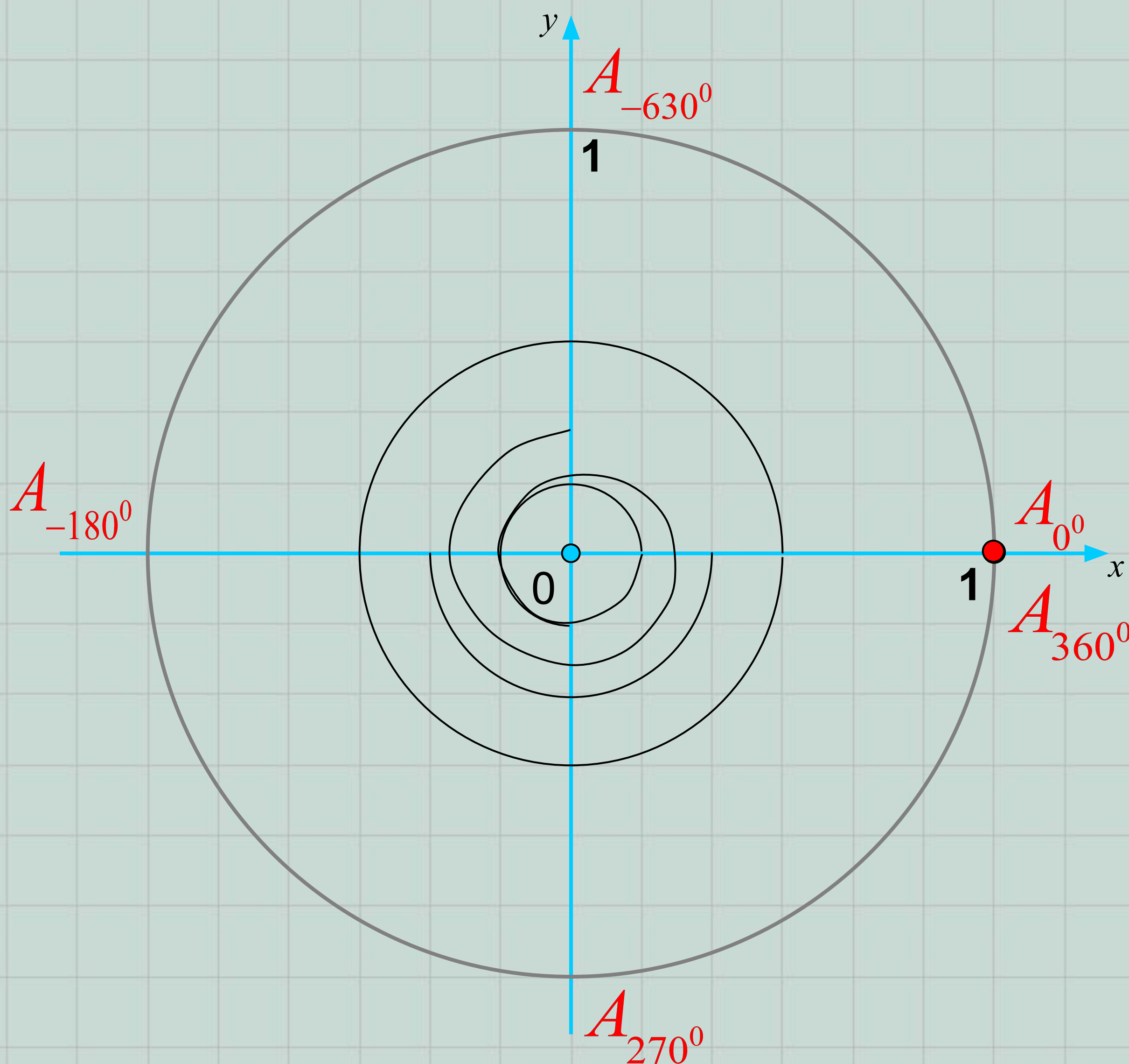


Точка пересечения окружности с положительной осью абсцисс соответствует центральному углу поворота 0^0.

Эту начальную точку можно вращать по окружности, получая различные центральные углы. Вращение точки в направлении **против часовой стрелки** считается **положительным**, а **по часовой стрелке** – **отрицательным**.



Проследите за вращением точки по окружности и назовите полученные углы поворота:



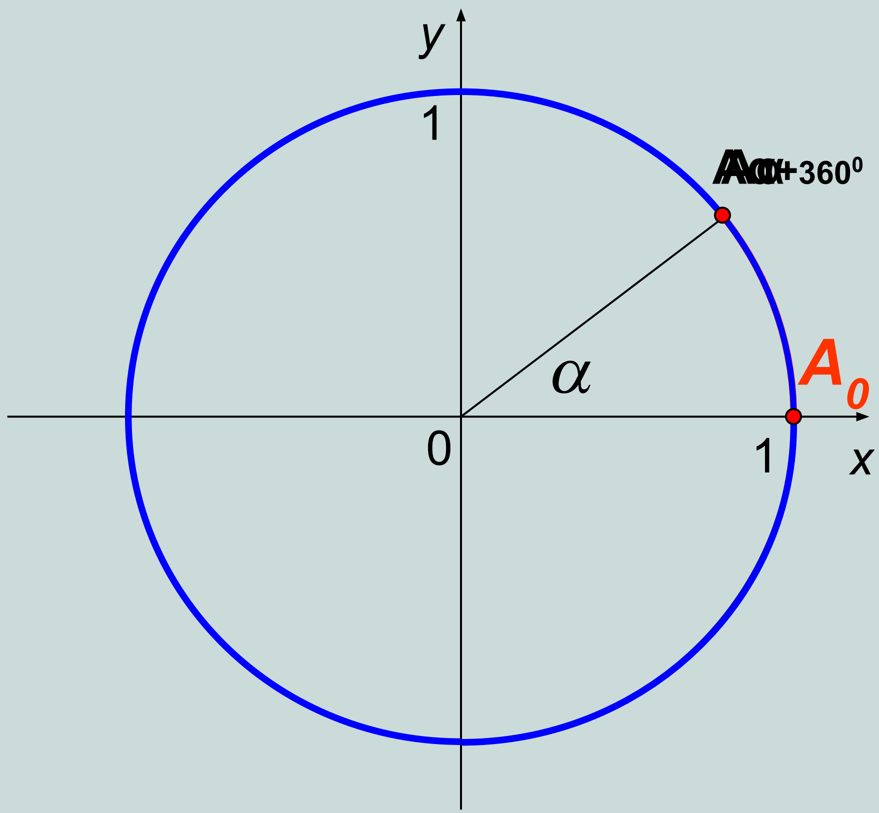
Если добавить полный поворот к острому углу α, то мы снова окажемся в той же точке А. Но теперь она соответствует углу поворота (подумайте)… $\alpha + 360^0$.

Вообще, любую точку окружности можно получить поворотом на угол, вида $\alpha+360^0\cdot n$, где $n\in \mathbb{Z}$ и $\alpha\in[0;360^0)$.

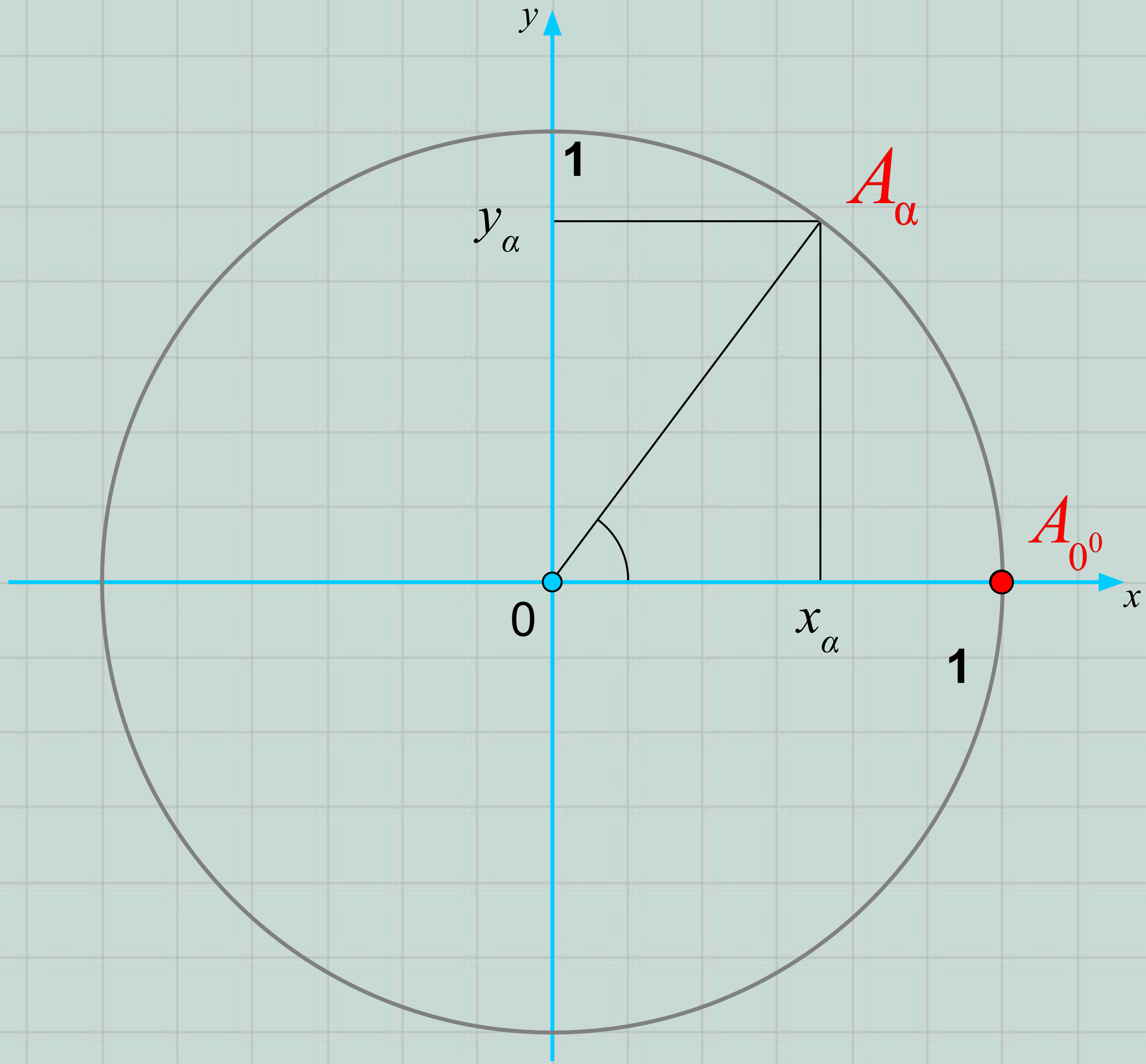
ПРИМЕР.

$1020^0=360^0\cdot 2+300^0$

$$
\begin{array}{r|l}
1020 & 360 \\ \cline{2-2}
-\ 720 & 2 \\ \cline{1-1}
300 &
\end{array}
$$



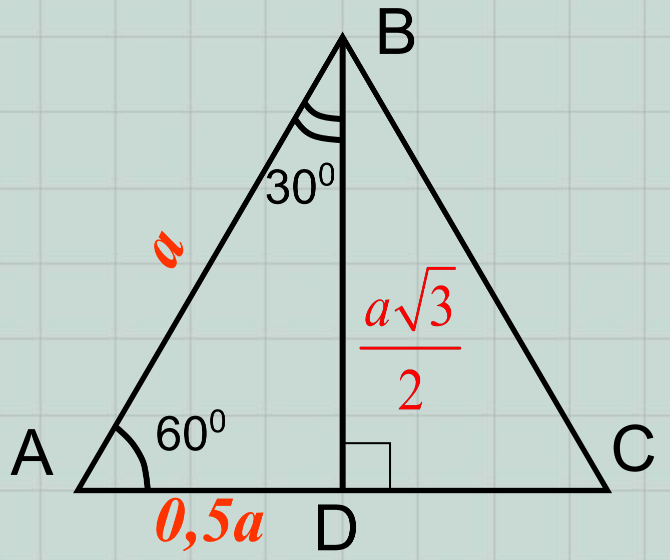
Отметим на окружности точку A_α, полученную при повороте на произвольный острый угол.



Каждая точка поворота (как и любая точка координатной плоскости) имеет две координаты: абсциссу x_α и ординату y_α, т.е.

$$A_\alpha\left(x_\alpha; y_\alpha\right)$$

Рассмотрим *равносторонний* треугольник ABC. Проведем BD⊥AC, D∈AC.



По свойствам правильного треугольника $\angle A=60^0$, $\angle ABC=30^0$. Если принять длину стороны треугольника за ***a*** ед.отр., то AD= ***0,5a*** (вспомните, почему?) и по теореме Пифагора:

$$BD=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

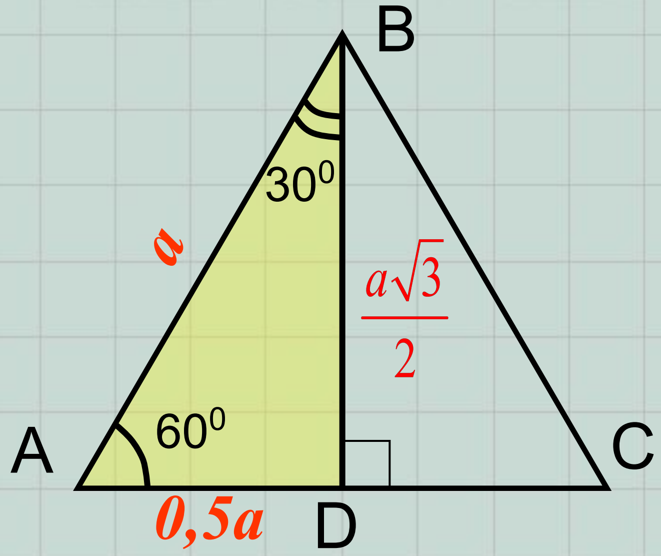
Вспомним из курса геометрии, что:

Синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе;

Косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе;

Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему;

Котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему.



Синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе;

Косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе;

Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему;

Котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему;

Из ΔABD, для углов 30^0 и 60^0, получим:

$$\sin 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{0,5a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{0,5a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

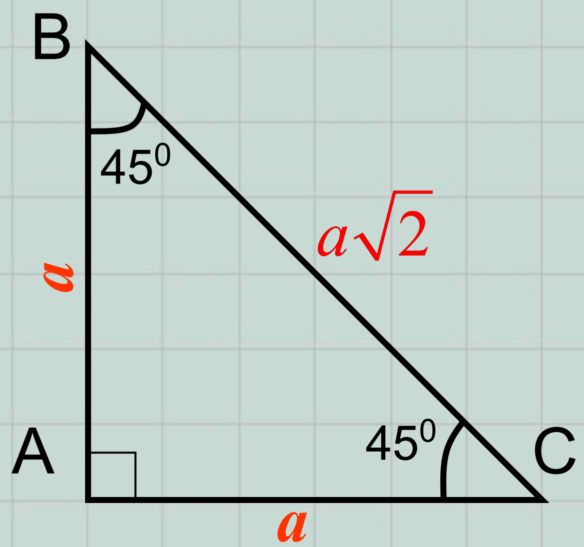
$$tg 30^0 = \frac{AD}{BD} = 0,5a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg 60^0 = \frac{AD}{BD} = 0,5a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg 30^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : 0,5a = \sqrt{3}$$

$$tg 60^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : 0,5a = \sqrt{3}$$

Если рассматривать прямоугольный *равнобедренный* треугольник, то используя предыдущие рассуждения, получим:



$\angle$B= $\angle$C=45^0. По теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

И, тогда, по определению:

$$\sin 45^0 = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 45^0 = a : a = 1$$

$$\cos 45^0 = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ctg 45^0 = a : a = 1$$

α	30^0	45^0	60^0
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Оформите результаты предыдущей работы в виде таблицы в рабочих тетрадях.

Координаты точек поворота **II** четверти:

$A_{120^0}\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$A_{135^0}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A_{150^0}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

$A_{180^0}\left(-1;0\right)$

Координаты точек поворота **I** четверти:

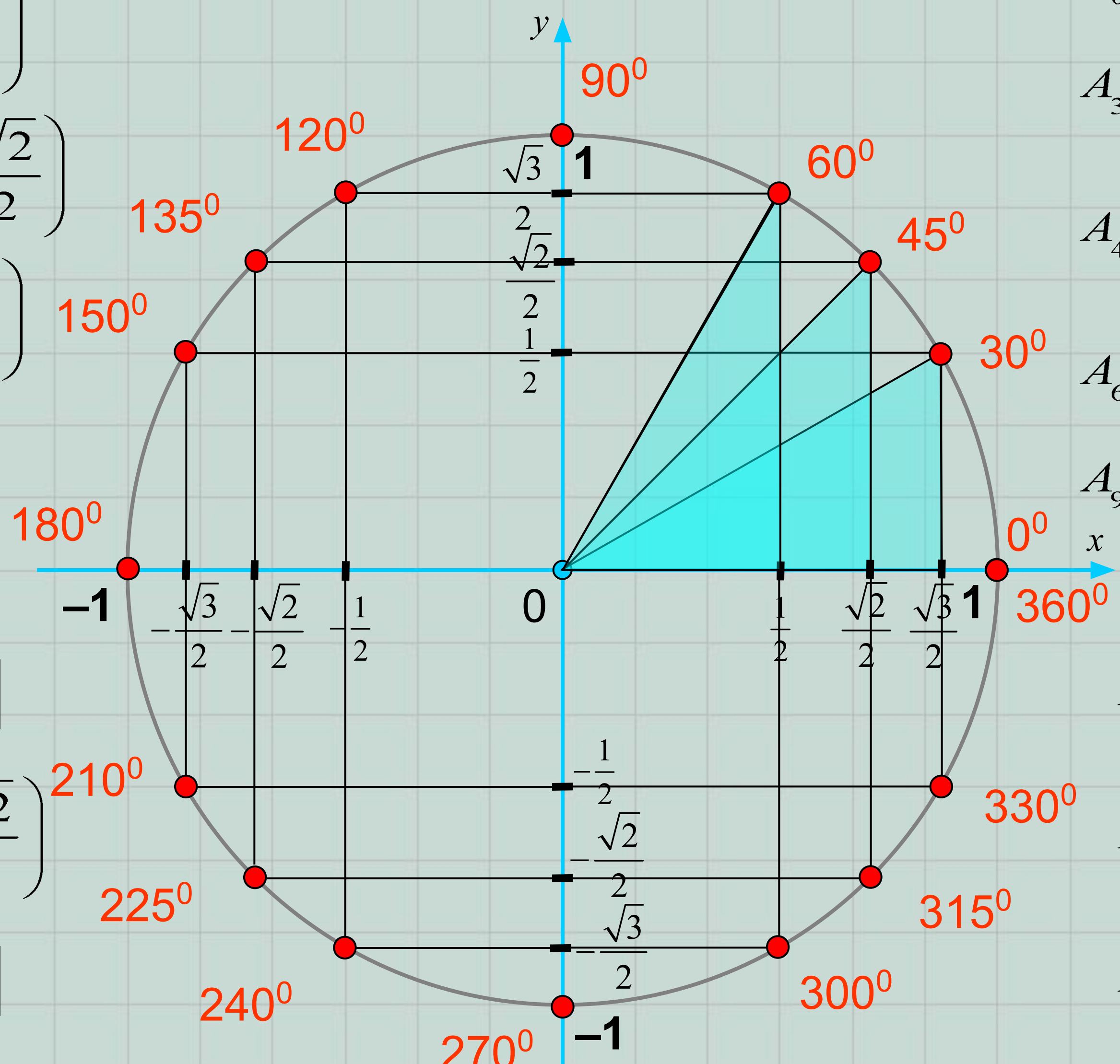
$A_{0^0}\left(1;0\right)$

$A_{30^0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

$A_{45^0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A_{60^0}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$A_{90^0}\left(0;1\right)$



$A_{210^0}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$A_{225^0}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A_{240^0}\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$A_{270^0}\left(0;-1\right)$

$A_{300^0}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$A_{315^0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A_{330^0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$A_{360^0}\left(1;0\right)$

Самостоятельно определите точки поворота **III** и **IV** координатных четвертей и их координаты…