Решение задач на проценты

Основные типы задач на проценты.

1. Одна величина больше (меньше) другой на p%.

- Если **a** больше **b** на **p%,** то **a=b+0,01pb=b(1+0,01p).**
- Если **a** меньше **b** на p**%,** то **a=b-0,01pb=b(1-0,01p).**

Пример. На сколько процентов надо увеличить число 90, чтобы получилось 120?

Решение: a=120, b=90, p-?

120=90+0,01p*90,

120=90(1+0,01p),

1+0,01p=4/3, 0,01p=1/3, p=100/3.

Ответ:100/3%.

2. Величина увеличивается (уменьшается) на p%.

- Если **a** увеличили на **p%,** то новое значение равно: **a(1+0,01p).**

  Пример. Увеличить число 60 на 20%.

  60+60*0,2=72 или 60(1+0,2)=72.

- Если **a** уменьшили на **p%,** то новое значение равно: **a(1-0,01p).**

  Пример. Число 72 уменьшить на 20%.

  72-72*0,2=57,6 или 72(1-0,2)=57,6.

- Увеличили число **a** на **p%,** а затем полученное уменьшили на **p%.**

$a(1+0,01p)$;

$a(1+0,01p)(1-0,01p)=a(1-(0,01p)^2)$. (*)

Пример. Цену товара снизили на 30%, а затем новую цену повысили на 30%. Как изменилась цена товара?

Решение. Пусть первоначальная цена товара a, тогда

$a-0,3a=0,7a$ - цена товара после снижения,

$0,7a+0,7a*0,3=0,91a$ – новая цена. $1-0,91=0,09$ или 9%.

Используя формулу (*), получим: $a(1-0,3^2)=0,91a$.

Ответ :цена снизилась на 9%.

Задача 1.

Цена товара была повышена на 12%. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную?

Решение.

a - первоначальная цена, p - процентные снижения.

$a+0,12a=1,12a$ – цена после повышения ,

$1,12a-1,12a*0,01p$ – цена после снижения.

По условию $1,12a-1,12a*0,01p=a$,

$1,12(1-0,01p)=1$,

$p=10\ \ 5/7$

Ответ: $10\ \ 5/7\%$

3.Формула сложных процентов.

Если при вычислении процентов на каждом следующем шаге исходят от величины, полученной на предыдущем шаге, то говорят о начислении сложных процентов (процентов на проценты). В этом случае применяется формула сложных процентов:

$$b=a(1+0{,}01p)^n ,$$

где a– первоначальное значение величины,

b – новое значение величины,

p – количество процентов,

n – количество промежутков времени.

Если изменения происходят на разное число процентов, то формула выглядит так

$$b=a(1\pm0{,}01p_1)(1\pm0{,}01p_2)\ldots(1\pm0{,}01p_n)$$

Задача 1.

Цена товара была повышена на 12%. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную?

Решение.

$$b=a(1\pm0{,}01p_1)(1\pm0{,}01p_2)$$

a - первоначальная цена, p - процентные снижения.

$a(1+0{,}12)(1-0{,}01p)=a,$

$1{,}12(1-0{,}01p)=1,$

$p=10\ \ 5/7$

Ответ: 10 5/7%

Задача 2.

Зарплату рабочему повысили сначала на 10%, а через год еще на 20%. На сколько процентов повысилась зарплата по сравнению с первоначальной?

Решение.

Пусть зарплата рабочего была x, тогда

$b=x(1+0{,}1)(1+0{,}2)=1{,}32x$

$1{,}32x-x=0{,}32x$

Значит, зарплата повысилась на 32%.

Ответ: на 32%

Задача 3.

Выпуск продукции завода за 4 года увеличился в16 раз. На сколько процентов в среднем увеличивался выпуск продукции за каждый год по сравнению с предыдущим годом?

Решение. Пусть x – искомое число процентов, a –первоначальное количество продукции.

$$a(1+0{,}01x)^4=16a,$$

$$(1+0{,}01x)^4=16,$$

$$1+0{,}01x=2,$$

$$0{,}01x=1,$$

$$x=100.$$

Ответ: на 100%.

Задача 4.

Число рыб в заливе сократилось на 30%, а затем три года увеличивалось на 25%, 35%, 40%. В итоге число рыб достигло 132 300 рыб. Сколько рыб было в заливе?

Решение.

Пусть x первоначальное количество рыб в заливе.

$x(1-0,3)(1+0,25)(1+0,35)(1+0,4)=132\ 300,$

$x*0,7*1,25*1,35*1,4=132\ 300,$

$x=80\ 000.$

Значит, первоначальное количество рыб в заливе равно 80000.

Ответ: 80 000 рыб.

Задача 5.

Зонт стоил 360р. В ноябре цена зонта была снижена на 15%, а в декабре еще на 10%. Какой стала стоимость зонта в декабре?

Решение. Применим формулу сложных процентов.

$b=360*(1-0,15)(1-0,1)= 360*0,85*0,9=275,4$(р.)

Значит, стоимость зонта в декабре –275р. 40к.

Дополнительный вопрос. На сколько процентов по отношению к первоначальной цене подешевел зонт?

Решение.

275,4:360=0,235   или   23,5%

Ответ:275р. 40к., 23,5%

4. Банковские операции.

- **Простые проценты.**

Увеличение вклада S_0 по схеме простых процентов характеризуется тем, что суммы процентов в течение всего срока хранения определяются исходя только из первоначальной суммы вклада S_0 независимо от срока хранения и количества начисления процентов.

$$S_п = S_о (1+0{,}01pn)$$

- **Сложные проценты.**

Если вкладчик не снимает со счета сумму начисленных процентов, то эта сумма присоединяется к основному вкладу, я в конце следующего года банк будет начислять р% уже на новую, увеличенную сумму. Это означает, что банк станет теперь начислять проценты не только на вклад S_0 , но и на проценты, которые на него полагаются.

$$S_п = S_о (1+0{,}01p)^n$$

Задача 6.

Банк выплачивает вкладчикам каждый год 8% от внесенной суммы. Клиент сделал вклад в размере 200 000р. Какая сумма будет на его счете через 5 лет, через10 лет?

Решение.

Используем формулу: $\mathbf{S_n = S_o\,(1+0{,}01pn)}$

S_5= 20 000(1+0,08*5)=280 000(р.)

S_{10}=20 000(1+0,08*10)=360 000(р.)

Ответ:280 000р.; 360 000р.

Задача 7.

При какой процентной ставке вклад на сумму 500р. Возрастет за 6 месяцев до 650р.?

Решение.

$$S_n = S_o\,(1+0{,}01pn)$$

500(1+0,01p*6)=650,

0,01p*6=650:500-1,

0,01p*6=0,3,

p=0,3*100:6,

p=5

Ответ: 5%.

Задача 8.

При гашении кредита, клиент вносит ежемесячно 2 500 р. Оплата должна производиться до10 числа каждого месяца, после чего за каждый просроченный день начисляется пеня в размере 4% от суммы оплаты за месяц. Сколько придется заплатить клиенту банка, если он просрочит неделю?

Решение.

$$\mathbf{S_n = S_o\ (1+0{,}01pn)}$$

S_7=2 500(1+0,04*7)=3 200(р.)

Ответ: 3 200р.

Задача 9.

Вкладчик открыл счет в банке, внеся 2 000р. на вклад, годовой доход по которому составляет 12%, и решил в течение 6 лет не брать процентные начисления. Какая сумма будет лежать на его счете через 6 лет?

Решение.

Воспользуемся формулой сложных процентов

$$\mathbf{S_n = S_o\,(1+0{,}01p)^n}$$

S_6=2 000(1+0,12)^6=2 000*1,12^6=2 000*2 508,8=3 947,65(р.)

Значит, через 6 лет на счету будет 3 947р. 65к.

Ответ 3 947р. 65к.

Задача 10.

По пенсионному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого срока эти проценты капитализируются, т. е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счёт в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течении 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

Решение.

$$\mathbf{S_n = S_o\ (1+0{,}01p)^n}$$

S_3=50 000(1+0,1)^3=50 000*1,1^3=50 000*1,331= 66 550(р.)

Ответ: 66 550р.

Задача 11.

Для определения оптимального режима повышения цен социологи предложили фирме с 1 января повышать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине – в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 2%, в другом – через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через пол года (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо повышать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

Решение. $S_o = x$,

$S_n = x(1+0{,}02)^6$ – для первого магазина,

$S_n = x(1+0{,}01p)^3$ – для второго магазина,

$x(1+0{,}02)^6 = x(1+0{,}01p)^3$,

$1{,}02^2 = 1+0{,}01p$, $p = 4{,}04$

Ответ: 4,04

5. Задачи на смеси, растворы, сплавы.

Формулы для расчета концентрации смеси (сплава)

$$n = m_{в} / m_{р},$$

где n- концентрация,

$m_{в}$ – масса вещества в растворе,

$m_{р}$ - масса всего раствора.

$$n = (n_1 m_1 + n_2 m_2 + .. n_к m_к)/m$$

Задача 13.

В бидон налили 7 литров молока трёх процентной жирности и 3 литра шести процентной жирности. Какова жирность полученного молока?

Решение.

$n=(7*3+3*6):10=(21+18):10=3{,}9$

Ответ: 3,9%

Задача 14.

Сколько граммов 30%-го раствора надо добавить к 80 г 12%-го раствора этой же соли, чтобы получить 20%-й раствор соли?

Решение.

Пусть надо добавить x г 30%-го раствора, тогда

$(30x+12*80) : (80+x)=20,$

$30x+960=20x+1600,$

$10x=640,$

$x=64$

Значит, надо добавить 64г.

Ответ:64г.

Задача 15.

Если смешать8 кг и 2 кг растворов серной кислоты разной концентрации, то получим 12%-й раствор кислоты. При смешивании двух одинаковых масс тех же растворов получим 15%-й раствор. Определите первоначальную концентрацию каждого раствора.

Решение.

Пусть концентрация в первом растворе x%, а во втором – y%, $(8x+2y) : 10=12$, $8x+2y=120$, $4x+y=60$

Пусть возьмем по 1кг каждого раствора, тогда

$(x+y):2= 15$, $x+y=30$

$$\begin{cases} 4x+y=60, \\ x+y=30 \end{cases}$$

$x=10$, $y=20$

Ответ: 10%, 20%

Задача 16.

Во втором круге футбольного чемпионата команда «Зубило» увеличила по сравнению с первым кругом количество забитых голов на 65%, а команда «Метеор» на 40%. В итоге общее количество голов возросло в 1,5 раза. Сколько процентов от общего количества голов, забитых обеими командами в первом круге, составили голы «Метеора» ?

Решение.

Пусть x – доля голов, забитых «Метеором», а (1-x) – «Зубило», тогда

Значит, голы «Метеора» составили 60%.

Ответ: 60%

Спасибо за внимание