Дифференциалы высших порядков

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ $\quad df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$; δ - другое обознач. $\delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$

<u>Опр.</u> $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m-го порядка от $f(x)$ называется (x - незав. перем.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))\Big|_{\delta x = dx}$$

Дифференциалы высших порядков

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$; δ – другое обознач. $\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$

<u>Опр.</u> $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m-го порядка от $f(x)$ называется (x – незав. перем.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))\Big|_{\delta x = dx}$$

$$d^2 f = \delta(df)\Big|_{\delta x = dx} = \delta\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\Big)\Big|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^{n} \delta\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) dx_i\Big|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j\Big) dx_i\Big|_{\delta x = dx} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \quad \dots,$$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}$$

Аналогия: $H = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $H^2 = H \cdot H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j$, $\dots$,

$$H^m = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1} \dots a_{i_m}$$

$$\Rightarrow d^m f = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\Big)^m f = (\nabla, dx)^m f, \quad \nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)$$

Итак, $d^m = (\nabla, dx)^m$

Дифференциалы высших порядков

$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$; δ – другое обознач. $\delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$

<u>Опр.</u> $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m-го порядка от $f(x)$ называется (x-незав. перем.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))\Big|_{\delta x = dx}$$

$$d^2 f = \delta(df)\Big|_{\delta x = dx} = \delta\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\Big)\Big|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^{n} \delta\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) dx_i \Big|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j\Big) dx_i\Big|_{\delta x = dx}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \ \ldots,$$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \cdot \ldots \cdot dx_{i_m}.$$

Аналогия: $H = a_1 + \ldots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $H^2 = H \cdot H = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j, \ \ldots,$

$$H^m = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}$$

$$\Rightarrow d^m f = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\Big)^m f = (\nabla, dx)^m f, \quad \nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)$$

Итак, $d^m = (\nabla, dx)^m$

В частности для $n = 2$, т.е. $f = f(x, y)$ имеем: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$,

$d^2 f = \Big(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\Big)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$, $d^3 f =$

$= \Big(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\Big)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$, и т.д.

Дифференциалы высших порядков

$f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ $\quad df=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$; δ – другое обознач. $\delta f=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i$

<u>Опр.</u> $m\geq 2$, $f(x)\in C_m$ в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, $dx=\Delta x$ не меняется $\forall x\in E$

Дифференциалом m-го порядка от $f(x)$ называется (x – незав. перем.):

$$d^m f(x)\equiv \delta(d^{m-1}f(x))\Big|_{\delta x=dx}$$

$$d^2 f=\delta(df)\Big|_{\delta x=dx}=\delta\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\Big)\Big|_{\delta x=dx}=\sum_{i=1}^{n}\delta\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)dx_i\Big|_{\delta x=dx}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\delta x_j\Big)dx_i\Big|_{\delta x=dx}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j,\ d^3f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}dx_i dx_j dx_k,\ \dots,$$

$$d^m f=\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}dx_{i_1}\dots dx_{i_m}.$$

Аналогия: $H=a_1+\dots+a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, $H^2=H\cdot H=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_i a_j$, ...,

$$H^m=\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n}a_{i_1}\dots a_{i_m}$$

$$\Rightarrow d^m f=\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\Big)^m f=(\nabla, dx)^m f,\quad \nabla=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)$$

Итак, $d^m=(\nabla, dx)^m$

Инвариантности при $m\geq 2$ нет (в общем случае). Если же

$x_i=\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_{ij}t_j+\beta_i$ $(i=1,\dots,n)$, где t_j $(j=1,\dots,p)$ – независ. перем. то

$dx_i=\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_{ij}dt_j$, т.е. $dt_j=const\Rightarrow dx_i=const\Rightarrow$ инвариантность

сохраняется при линейной замене.

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}\cdot(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(t_0)\cdot(t-t_0)^m+r_m(t,F)$$

$$r_m(t,F)=\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{m+1},\ 0<\Theta<1 \quad \text{(Лагранж)}$$

Как обобщать — неясно. $t-t_0=\Delta t=dt$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, $dF(t_0)=F'(t_0)dt$, $\ldots$, $d^mF(t_0)=F^{(m)}(t_0)\cdot dt^m$, $d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))=F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))dt^{m+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)=\frac{dF(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^mF(t_0)}{m!}+r_m(t,F),\ r_m(t,F)=\frac{d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n>1$.

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}\cdot(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(t_0)\cdot(t-t_0)^m+r_m(t,F)$$

$$r_m(t,F)=\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{m+1},\ 0<\Theta<1 \quad \text{(Лагранж)}$$

Как обобщать – неясно. $t-t_0=\Delta t=dt$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, $dF(t_0)=F'(t_0)dt$, $\ldots$, $d^mF(t_0)=F^{(m)}(t_0)\cdot dt^m$, $d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))=F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))dt^{m+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)=\frac{dF(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^mF(t_0)}{m!}+r_m(t,F),\ r_m(t,F)=\frac{d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n>1$.

<u>Т8.</u> $m\geq 0$, $f(x)\in C_{m+1}$ в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)}\in E$, $x\in E$, $\Delta x=x-x^{(0)}$, $x^{(0)}+t\Delta x\in E\ \forall t\in[0,1]$. $\Rightarrow \exists\Theta\in(0,1)$:

$$f(x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f),\ r_m(x,f)=\frac{d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{(m+1)!}$$

Д-во. $F(t)=f(x^{(0)}+t\Delta x)$, $0\leq t\leq 1$. $d^jF(t)=d^jf(x^{(0)}+t\Delta x)$, $j=1,\ldots,m,m+1$ (инвар. при линейной замене) $\Rightarrow \Delta f(x^{(0)})=f(x)-f(x^{(0)})=F(1)-F(0)=\Delta F(0)=$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jF(0)}{j!}+\underbrace{\frac{d^{m+1}F(\Theta)}{(m+1)!}}_{r_m(t,F)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+\underbrace{\frac{d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{(m+1)!}}_{r_m(x,f)}.$$

Теор. доказана.

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}\cdot(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(t_0)\cdot(t-t_0)^m+r_m(t,F)$$

$$r_m(t,F)=\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{m+1},\ 0<\Theta<1 \quad \text{(Лагранж)}$$

Как обобщать — неясно. $t-t_0=\Delta t=dt$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, $dF(t_0)=F'(t_0)dt$,

$\ldots$, $d^mF(t_0)=F^{(m)}(t_0)\cdot dt^m$, $d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))=F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\,dt^{m+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)=\frac{dF(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^mF(t_0)}{m!}+r_m(t,F),\ r_m(t,F)=\frac{d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n>1$.

<u>Т8.</u> $m\geq 0$, $f(x)\in C_{m+1}$ в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)}\in E$, $x\in E$, $\Delta x=x-x^{(0)}$,

$x^{(0)}+t\Delta x\in E\ \forall t\in[0,1]$. $\Rightarrow \exists\, \Theta\in(0,1)$:

$$f(x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f),\ r_m(x,f)=\frac{d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{(m+1)!}$$

$$m=0 \Rightarrow f(x)-f(x^{(0)})=f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=df(x^{(0)}+\Theta\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i$$

(ф-ла Лагранжа)

Формула Тейлора

$n=1 \Rightarrow F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}\cdot(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(t_0)\cdot(t-t_0)^m+r_m(t,F)$

$r_m(t,F)=\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{m+1}$, $0<\Theta<1$ (Лагранж)

Как обобщать – неясно. $t-t_0=\Delta t=dt$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, $dF(t_0)=F'(t_0)dt$, $\ldots$, $d^mF(t_0)=F^{(m)}(t_0)\cdot dt^m$, $d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))=F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))dt^{m+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)=\frac{dF(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^mF(t_0)}{m!}+r_m(t,F)$, $r_m(t,F)=\frac{d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$

Эту формулу и будем переносить на $n>1$.

<u>T8.</u> $m\geq 0$, $f(x)\in C_{m+1}$ в обл $E\subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)}\in E$, $x\in E$, $\Delta x=x-x^{(0)}$, $x^{(0)}+t\Delta x\in E$ $\forall t\in[0,1]$. $\Rightarrow \exists\,\Theta\in(0,1)$:

$$f(x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f),\quad r_m(x,f)=\frac{d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{(m+1)!}$$

$$m=0\Rightarrow f(x)-f(x^{(0)})=f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=df(x^{(0)}+\Theta\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i$$

(ф-ла Лагранжа)

$$m=1\Rightarrow f(x^{(0)}+\Delta x)=f(x^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i\Delta x_j$$

Формула Тейлора

$n=1 \Rightarrow F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(t_0)\cdot(t-t_0)^m+r_m(t,F)$

$r_m(t,F)=\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{m+1}$, $0<\Theta<1$ (Лагранж)

Как обобщать – неясно. $t-t_0=\Delta t=dt$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, $dF(t_0)=F'(t_0)dt$, $\ldots$, $d^mF(t_0)=F^{(m)}(t_0)\cdot dt^m$, $d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))=F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))dt^{m+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)=\frac{dF(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^mF(t_0)}{m!}+r_m(t,F)$, $r_m(t,F)=\frac{d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$

Эту формулу и будем переносить на $n>1$.

Т8. $m\geq 0$, $f(x)\in C_{m+1}$ в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)}\in E$, $x\in E$, $\Delta x=x-x^{(0)}$,

$x^{(0)}+t\Delta x\in E\ \forall t\in[0,1]$. $\Rightarrow \exists\, \Theta\in(0,1)$:

$f(x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f)$, $r_m(x,f)=\frac{d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{(m+1)!}$

$m=0 \Rightarrow f(x)-f(x^{(0)})=f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=df(x^{(0)}+\Theta\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i$ (ф-ла Лагранжа)

$m=1 \Rightarrow f(x^{(0)}+\Delta x)=f(x^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i\Delta x_j$

Сл (форма Пеано). При условиях т. 8 $\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f)$, $r_m(x,f)=\bar{o}(\|\Delta x\|^m)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$

Д-во. $r_m(x,f)=\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_{i_{m+1}}}\Delta x_{i_1}\cdot\ldots\cdot\Delta x_{i_{m+1}}$

$\Rightarrow \frac{|r_m(x,f)|}{\|\Delta x\|^m}\leqslant\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\left|\frac{\partial^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m+1}}}\right|\cdot\frac{|\Delta x_{i_1}|\cdot\ldots\cdot|\Delta x_{i_{m+1}}|}{\|\Delta x\|^m}\leqslant(|\Delta x_k|\leqslant\|\Delta x\|)\leqslant$

$\leqslant\frac{\|\Delta x\|}{(m+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\underbrace{\left|\frac{\partial^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m+1}}}\right|}_{\text{имеет предел при } \|\Delta x\|\to 0 \Rightarrow \text{огран.}}\longrightarrow 0$ при $\|\Delta x\|\to 0$

Сл. доказано.

Формула Тейлора

$n=1 \Rightarrow F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}\cdot(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(t_0)\cdot(t-t_0)^m+r_m(t,F)$

$r_m(t,F)=\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{m+1}$, $0<\Theta<1$ (Лагранж)

Как обобщать - неясно. $t-t_0=\Delta t=dt$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, $dF(t_0)=F'(t_0)dt$,

$\ldots$, $d^mF(t_0)=F^{(m)}(t_0)\cdot dt^m$, $d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))=F^{(m+1)}(t_0+\Theta(t-t_0))dt^{m+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)=\frac{dF(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^mF(t_0)}{m!}+r_m(t,F)$, $r_m(t,F)=\frac{d^{m+1}F(t_0+\Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$

Эту формулу и будем переносить на $n>1$.

<u>Т8.</u> $m\geq 0$, $f(x)\in C_{m+1}$ в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)}\in E$, $x\in E$, $\Delta x=x-x^{(0)}$,

$x^{(0)}+t\Delta x\in E$ $\forall t\in[0,1]$. $\Rightarrow \exists\, \Theta\in(0,1)$:

$f(x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f)$, $r_m(x,f)=\frac{d^{m+1}f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}{(m+1)!}$

$m=0 \Rightarrow f(x)-f(x^{(0)})=f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})=\Delta f(x^{(0)})=df(x^{(0)}+\Theta\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i$ (ф-ла Лагранжа)

$m=1 \Rightarrow f(x^{(0)}+\Delta x)=f(x^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i\Delta x_j$

<u>Сл</u> (форма Пеано). При условиях Т. 8 $\Delta f(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^jf(x^{(0)})}{j!}+r_m(x,f)$, $r_m(x,f)=\bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|^m)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$

Для остат. члена в форме Пеано достаточно меньше условий.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ $(\geq, <, >)$.

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстремум.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ $(\geq, <, >)$.

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстремум.

T1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \ldots, n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Д-во. $\varphi(x_i) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. $\varphi(x_i)$ имеет экстремум при $x = x_i^{(0)} \Rightarrow \varphi'_{x_i}(x_i^{(0)}) = 0$. Но $\varphi'_{x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Т. доказана.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq$, $<$, $>$).

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \ldots, n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E$. $\Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ $(\geq, <, >)$.

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстремум.

T1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists\, i = 1, \dots, n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E$. $\Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x, y)$: касат. пл-сть $\parallel Oxy$.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ $(\geq, <, >)$.

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists\, i = 1, \ldots, n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E$. $\Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x,y)$: касат. пл-ть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ $(x^{(0)} \in E)$. $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq$, $<$, $>$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \ldots, n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E$. $\Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x,y)$: касат. пл-ть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ ($x^{(0)} \in E$). $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Не во всякой стац. точке есть экстремум.

Примеры. 1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad df = \underbrace{2x}_{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + \underbrace{2y}_{\frac{\partial f}{\partial y}}dy$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ $\quad (0,0)$ — стац. точка.

Там стр. минимум, т.к. $\forall (x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0,0)$

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \le f(x^{(0)})$ ($\ge$, $<$, $>$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists\, i = 1, \dots, n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E$. $\Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x,y)$: касат. пл-ть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ ($x^{(0)} \in E$). $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Не во всякой стац. точке есть экстремум.

Примеры. 1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad df = \underbrace{2x}_{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + \underbrace{2y}_{\frac{\partial f}{\partial y}}dy$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ $(0,0)$ — стац. точка.

Там стр. минимум, т.к. $\forall (x,y) \ne (0,0)\ f(x,y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0,0)$

2. $f(x,y) = xy \quad df = \underbrace{y}_{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + \underbrace{x}_{\frac{\partial f}{\partial y}}dy \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $(0,0)$ — стац. точка

Там нет экстремума, т.к. $\forall \alpha \ne 0\ f(\alpha,\alpha) = \alpha^2 > 0 = f(0,0) > -\alpha^2 = f(\alpha,-\alpha)$

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)}\in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta>0 : \forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x)\leqslant f(x^{(0)})$ $(\geqslant, <, >)$.

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x=x^{(0)}$ и $\exists i=1,\dots,n$: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=0$.

Сл. $f(x)\in C_1$ в обл. $E\subset\mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x=x^{(0)}\in E$. $\Rightarrow df(x^{(0)})=0$.

Геометр. смысл для $f(x,y)$: касат. пл-ть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x)\in C_1$ в обл. $E\subset\mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)})=0$ $(x^{(0)}\in E)$. $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Не во всякой стац. точке есть экстремум.

Т2. $f(x)\in C_2$ в обл. $E\subset\mathbb{E}_n$ $x^{(0)}\in E$, $x^{(0)}$-стац. точка; $\Phi(x,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\xi_i\xi_j$
$\Rightarrow \exists\delta>0 : \forall x\in U_\delta(x^{(0)})\ \forall \xi\in U_\delta(\Theta)\ \Phi(x,\xi)\geqslant 0\ (\leqslant) \Rightarrow x^{(0)}$ – т. мин. (т. макс.)

Д-во. $f(x)=f(x^{(0)})+\underbrace{df(x^{(0)})}_{=0}+\frac{1}{2}\underset{0<\Theta<1}{d^2 f(x^{(0)}+\Theta\Delta x)}=f(x^{(0)})+\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)}+\Theta\Delta x)\Delta x_i\Delta x_j=$

$$=f(x^{(0)})+\frac{1}{2}\Phi(\underbrace{x^{(0)}+\Theta\Delta x}_{x},\underbrace{\Delta x}_{\xi}) \Rightarrow f(x)\geqslant f(x^{(0)})\ (\leqslant)$$

Теорема д-зана