# Дискретная математика

# ДНФ и КНФ.
## Разложение функции по переменным

Формула алгебры логики – запись суперпозиции логических функций с использованием знаков переменных, скобок и знаков логических функций (логических вязок):

$$1)\ \neg,\ 2)\ \wedge,\ 3)\ \vee,\ \oplus,\ \sim,\ \rightarrow,\ |\ ,\downarrow.$$

Порядок записи логических связок определяет иерархию, на основании которой расставляются скобки.

# Расстановка скобок

Каждая подформула окружается скобками.

Скобки можно не ставить, если они внешние.

$$\left(x \vee y\right) = x \vee y.$$

Отрицание связывает сильнее всех.

$$\overline{\left(x \vee y\right)} = \overline{x \vee y}.$$

Конъюнкция связывает сильнее остальных

$$\left(\left(x \vee y\right) \cdot \bar{z}\right) \oplus \left(\left(\bar{x} \to z\right) \cdot y\right) =$$

$$= \left(x \vee y\right) \cdot \bar{z} \oplus \left(\bar{x} \to z\right) \cdot y.$$

***Элементарной конъюнкцией*** называется конъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

$$x, \quad \bar{x} \cdot y, \quad x \cdot \bar{y} \cdot z.$$

***Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

$$x \vee \bar{x}\, y \vee x\, \bar{y}\, z.$$

Дизъюнктивная форма будет ***совершенной (СДНФ),*** если каждая элементарная конъюнкция содержит все наименования переменных.

$$x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}$$

***Элементарной дизъюнкцией*** называется дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

$$x, \quad \bar{x} \vee y, \quad x \vee \bar{y} \vee z.$$

***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

$$x \cdot \left(\bar{x} \vee y\right) \cdot \left(x \vee \bar{y} \vee z\right).$$

Конъюнктивная форма будет ***совершенной (СКНФ),*** если каждая элементарная дизъюнкция содержит все наименования переменных.

$$\left(\bar{x} \vee y \vee z\right) \cdot \left(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right) \cdot \left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}\right)$$

# Разложение функции по переменным

Введем обозначение

$$x^0 = \bar{x}, x^1 = x.$$

Замечание:

$$x^\alpha = \begin{cases} 1, x = \alpha \\ 0, x \neq \alpha \end{cases}$$

# Разложение функции по переменным

Доказательство:

$$x = 0, \alpha = 0, x^{\alpha} = 0^{0} = \overline{0} = 1,$$

$$x = 1, \alpha = 1, x^{\alpha} = 1^{1} = 1,$$

$$x = 0, \alpha = 1, x^{\alpha} = 0^{1} = 0,$$

$$x = 1, \alpha = 0, x^{\alpha} = 1^{0} = \overline{1} = 0.$$

# Теорема о разложении функции по переменным

Всякая логическая функция

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

может быть разложена по переменным

$$x_1, x_2, ..., x_m, m \le n$$

# Разложение функции по переменным

то есть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} \cdot$$

$$\cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

# Разложение функции по переменным

Дизъюнкция в правой части равенства берется по всем наборам параметров.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \{0, 1\}.$$

Всего частей разложения будет $2^m$.

Рассмотрим разложение по одной переменной и по всем переменным.

# Разложении по одной переменной

При $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$ в разложении будет ровно 2 конъюнкции, соединенные дизъюнкцией.

$$f(x, y, z) = x^0 \cdot f(0, y, z) \vee x^1 \cdot f(1, y, z) =$$

$$\bar{x} \cdot f(0, y, z) \vee x \cdot f(1, y, z).$$

# Пример 1:

Разложить по переменной x функцию, заданную формулой.

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \oplus z) \to (x \vee y)$$

# Пример 2:

Разложить по переменной x функцию, заданную вектор-столбцом

$$f(x, y, z) = \left[01001110\quad\right]^T$$

# Разложении по всем переменным

При $\boldsymbol{m = n}$ в разложении будет ровно столько частей, сколько единичных наборов у функции. Каждая часть соответствует одному единичному набору:

То есть для всех наборов $\forall \sigma_1\sigma_2\sigma_3$,

таких что $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$:

$$f(x, y, z) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=1} x^{\sigma_1} y^{\sigma_2} z^{\sigma_3} f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

# Правило построения СДНФ из вектор-столбца

Функция задана таблицей

1. Выбрать все единичные наборы значений аргументов

| x | y | F(x,y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# Правило построения СДНФ из вектор-столбца

2. Каждому единичному набору сопоставить элементарную конъюнкцию всех переменных

| x | y | F(x,y) | |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $x \cdot y$ |
| $0$ | $1$ | $0$ | |
| $1$ | $0$ | $1$ | $x \cdot y$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $x \cdot y$ |

# Правило построения СДНФ из вектор-столбца

так чтобы переменная в конъюнкции была с отрицанием, если в наборе она равна 0.

| x | y | F(x,y) | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\bar{x} \cdot \bar{y}$ |
| 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | $x \cdot \bar{y}$ |
| 1 | 1 | 1 | $x \cdot y$ |

# Правило построения СДНФ из вектор-столбца

3. Соединить полученные конъюнкции знаком дизъюнкции

$$\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,\bar{y} \vee x\,y$$