Функция y = cos x

Ее свойства и график

Постройте график функции:

16.27. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

16.28. а) $y = \sin x - 2$;

б) $y = \sin x + 1$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

16.33. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $y = \cos x - 2$;

○**16.34.** а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$;

б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

○16.32. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}5$ на промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;

б) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$;

в) $[0; \pi)$;

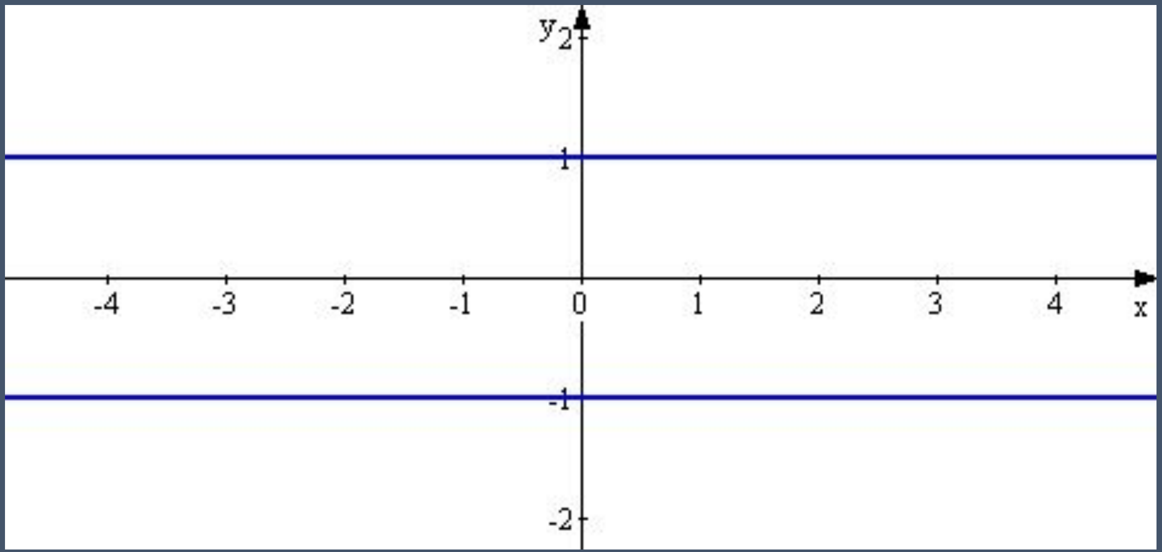
г) $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$.

Сегодня мы рассмотрим

- Построение графика функции $y = \cos x$;
- Свойства функции $y = \cos x$;
- Изменение графика функции $y = \cos x$ в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Изменение свойств функции $y = \cos x$ в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Примеры построения графиков функций путем анализа изменения их свойств.

Построение графика

- **Функция *y = cos x* определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок [-1; 1]. Следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми *y = -1 и y = 1*.**



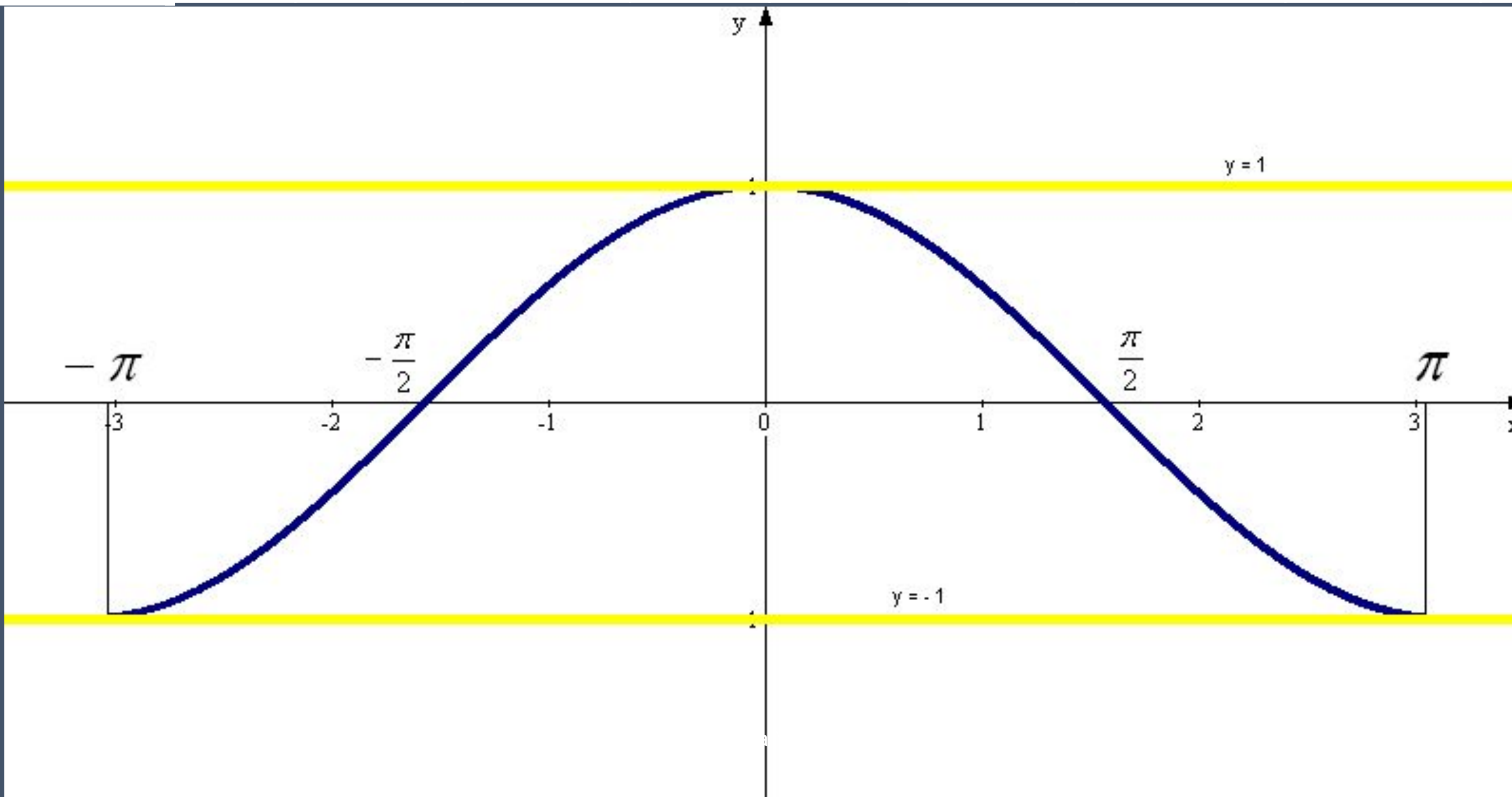
Как использовать периодичность и четность при построении

- Так как функция **периодическая** с периодом 2π, то достаточно построить ее график на каком – нибудь промежутке длиной 2π, например на отрезке $-\pi \le x \le \pi$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in Z$, график будет таким – же.

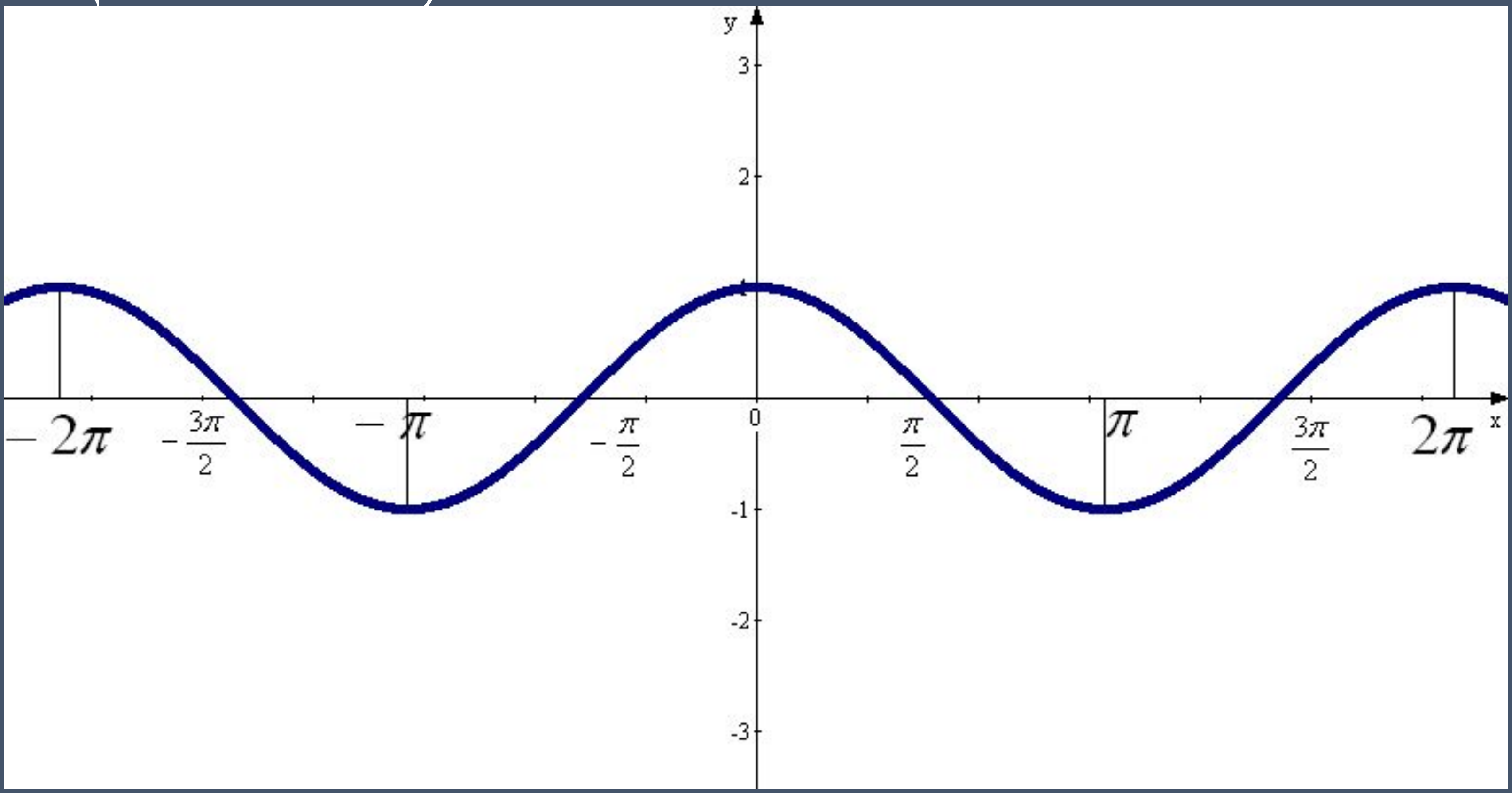
- Функция $y = \cos x$ является **четной.** Поэтому ее график симметричен относительно оси OY. Для построения графика на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ достаточно построить его для $0 \le x \le \pi$, а затем симметрично отразить относительно оси OY.

Найдем несколько точек для построения графика на отрезке [0; π] и отразим, полученную часть графика симметрично относительно оси OY.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
y=cos x	1	√3/2	√2/2	½	0	-½	-√2/2	-√3/2	-1



Распространим полученный график на всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т.д. вправо, на -2π, -4π и т.д. влево, т.е. вообще на 2πn, n∈Z.



Итак, график функции $y = \cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке [0; π]. Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить , опираясь на свойства этой функции на отрезке [0; π]. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке [-π; 0], так как она убывает на отрезке [0; π] и является четной.

Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

Для этого нужно вспомнить

- Как найти область определения и множество значений тригонометрических функций;
- Какие функции называются периодическими и как найти период функции;
- Какие функции называются четными (нечетными);
- Когда функция возрастает (убывает);
- Как найти нули функции;
- Как определить на каких промежутках функция принимает положительные (отрицательные) значения;
- Как определить когда функция принимает наибольшее (наименьшее) значения.

Область определения

- **Каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x радиан. Для этого угла определены $sin\ x$ и $cos\ x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $sin\ x$ и $cos\ x$, т.е. на множестве R всех действительных чисел определены функции $y = sin\ x$ и $y = cos\ x$.**

- ***Таким образом, областью определения функций $y = sin\ x$ и $y = cos\ x$ является множество R всех действительных чисел.***

Множество значений

- Чтобы найти множество значений функции $y = \cos x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т.е. установить, для каких значений y есть такие значения x, при которых $\cos x = y$. Известно, что уравнение $\cos x = a$ имеет корни, если $|a| \le 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.

- ***Следовательно множеством значений функции $y = \cos x$ является отрезок $-1 \le y \le 1$.***

Периодичность

- Функция $y = f(x)$ называется **периодической,** если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется периодом функции.

- Известно, что для любого значения x верны равенства $sin(x + 2\pi)=sin\ x$, $cos(x + 2\pi)= cos\ x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются **периодическими с периодом 2π.**

Четность, нечетность

- **Функция $y = f\ (x)$ называется <u>четной</u>, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f\ (-x) = f\ (x)$, график симметричен относительно оси ординат.**

- **Функция $y = f\ (x)$ называется <u>нечетной</u>, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f\ (-x) = -f\ (x)$, график симметричен относительно начала координат.**

Возрастание, убывание

- Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей**, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наибольшее (наименьшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$, *то* $x_1 > x_2$ $(x_1 < x_2)$.

- Функция $y = f(x)$ называется **убывающей**, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наименьшее (наибольшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$, то $x_1 < x_2$ $(x_1 > x_2)$.

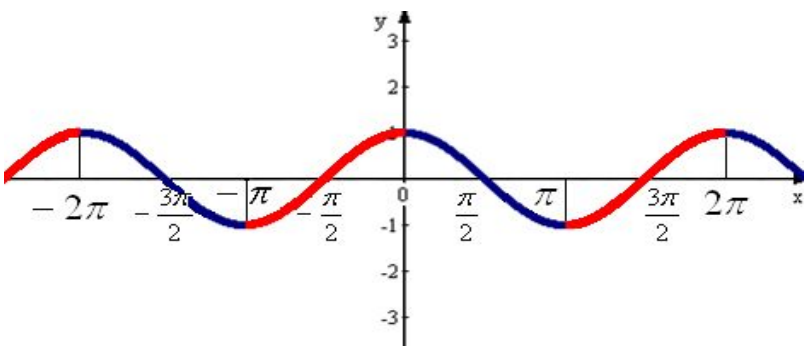
Нули функции, положительные и отрицательные значения, наименьшее и наибольшее значения.

- Для того чтобы определить когда функция $y = \cos x$ принимает значения, равные:
  - нулю;
  - положительные;
  - отрицательные;
  - наименьшее;
  - наибольшее,

- необходимо решить:
  - уравнение $\cos x = 0$;
  - неравенство $\cos x > 0$;
  - неравенство $\cos x < 0$;
  - уравнение $\cos x = -1$;
  - уравнение $\cos x = 1$;

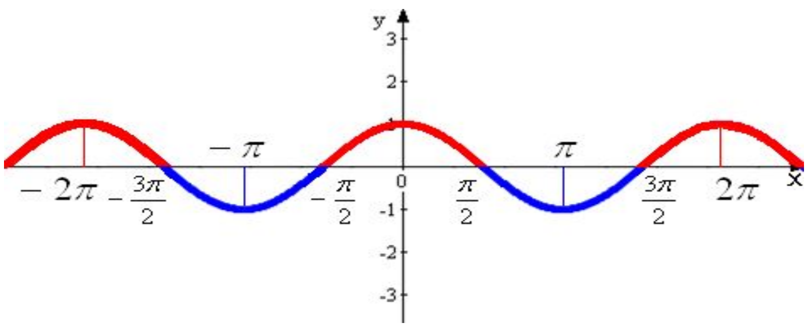
Свойства функции y = cos x

- **Область определения: D(f):** $x \in R$;
- **Множество значений:** $y \in [-1;1]$;
- **Периодичность:** $T = 2\pi$;
- **Четность:** *четная, т.к.* $\cos(-x) = \cos x$, *график симметричен относительно оси ординат;*
- **Функция возрастает при:** $\pi+2\pi n \le x \le 2\pi(n+1),\ n \in Z$;
- **Функция убывает при:** $\pi n \le x \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.



Свойства функции $y = \cos x$ (продолжение)

- **Функция принимает значения:**
  - **Равные нулю при** $x=\pi/2+\pi n,\ n\in Z;$
  - **Положительные при** $-\pi/2+2\pi n < x < \pi/2+2\pi n,\ n\in Z;$
  - **Отрицательные при** $\pi/2+2\pi n < x < 3\pi/2+2\pi n,\ n\in Z;$
  - **Наибольшее, равное 1, при** $x = 2\pi n,\ n \in Z;$
  - **Наименьшее, равное –1, при** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$



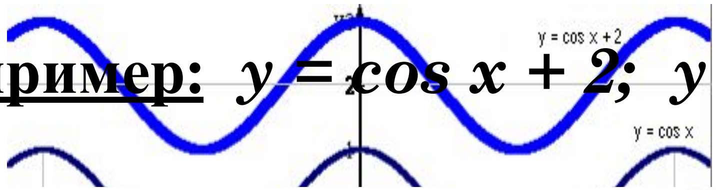
Преобразование графика функции $y = \cos x$

- **Изменение функции**
  - $y = \cos x + A$
  - $y = k \cdot \cos x$
  - $y = -\cos x$
  - $y = |\cos x|$

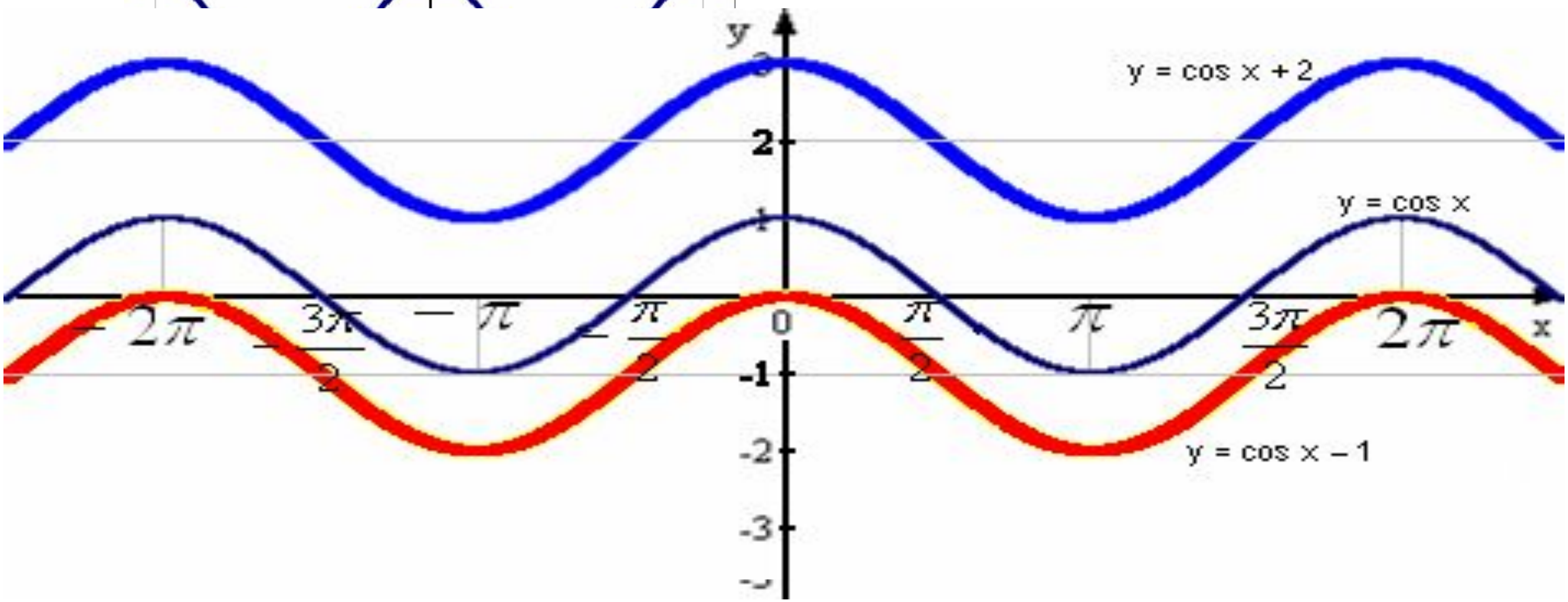
- **Изменение аргумента**
  - $y = \cos (x - a)$
  - $y = \cos (k \cdot x)$
  - $y = \cos (-x)$
  - $y = \cos |x|$

y = cos x + A

- Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси ординат на A единиц вверх, если A > 0 и на │A│ единиц вниз, если A < 0.



- **<u>Например:</u>** *y = cos x + 2; y = cos x – 1.*



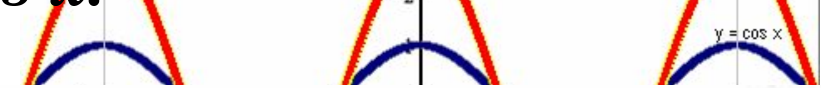
$y = \cos x + A$ (свойства)

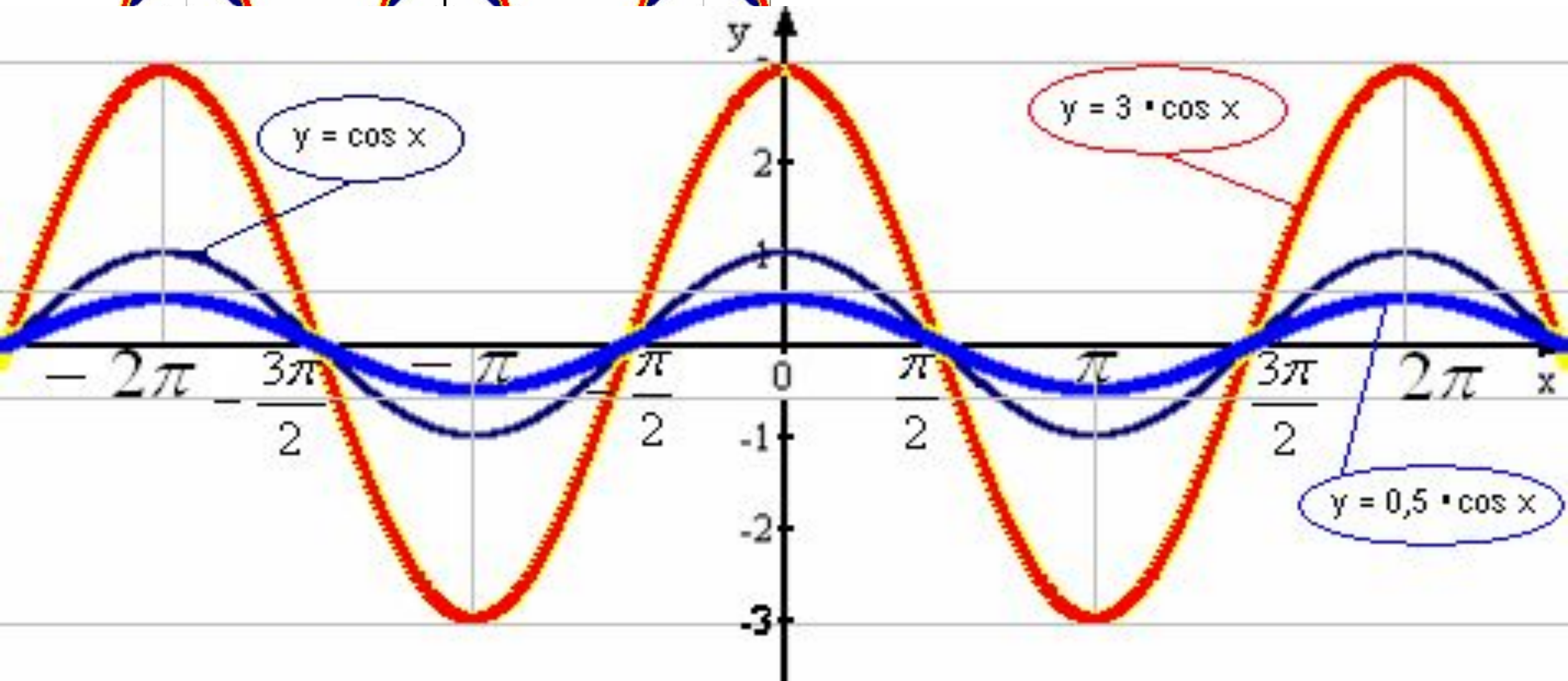
- **Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **Например:** $y = \cos x + 2$.

  - ***E (f):*** $\cos x + 2 = a \Rightarrow \cos x = a - 2$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a - 2 \le 1 \Rightarrow 1 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [1; 3]$.
  - ***Нули функции:*** $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ ***данное уравнение не имеет корней т.к.*** $|-2| > 1 \Rightarrow$ ***график данной функции не пересекает ось абсцисс.***
  - ***$f(x) > 0$:*** ***при любом значении*** x.
  - ***$f(x) < 0$:*** ***нет.***
  - ***y (наиб) = 3, при:*** $x = 2\pi n$, $n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$, $n \in Z$).
  - ***y (наим) = 1, при:*** $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$).

y = k · cos x

- **Растяжение графика функции y = cos x вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если k > 0 и сжатие в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **<u>Например:</u>** ***y = 3 • cos x;*** ***y = 0,5 • cos x.***



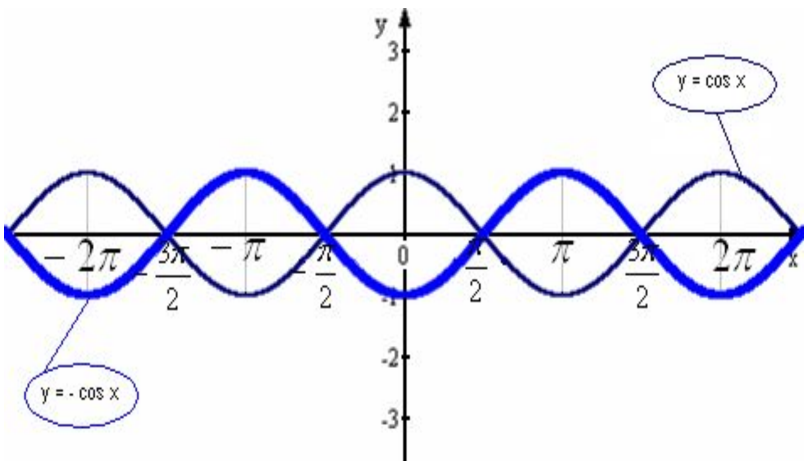


y = k · cos x (свойства)

- **Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.**
- **<u>Например:</u>** ***y = 3 • cos x***
    - ***<u>E (f):</u>*** $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, ***т.к.*** $-1 \le y \le 1$, ***то*** $-1 \le a/3 \le 1 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, ***т.е.*** $y \in [-3; 3]$.
    - ***<u>Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:</u>*** $x = 2\pi n$, $n \in Z$ (***т.к.*** $3\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$, $n \in Z$).
    - ***<u>Функция принимает наименьшее значение, равное – 3, при:</u>*** $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ (***т.к.*** $3\cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$).

y = - cos x

- **Симметричное отражение графика функции y = cos x относительно оси абсцисс.**

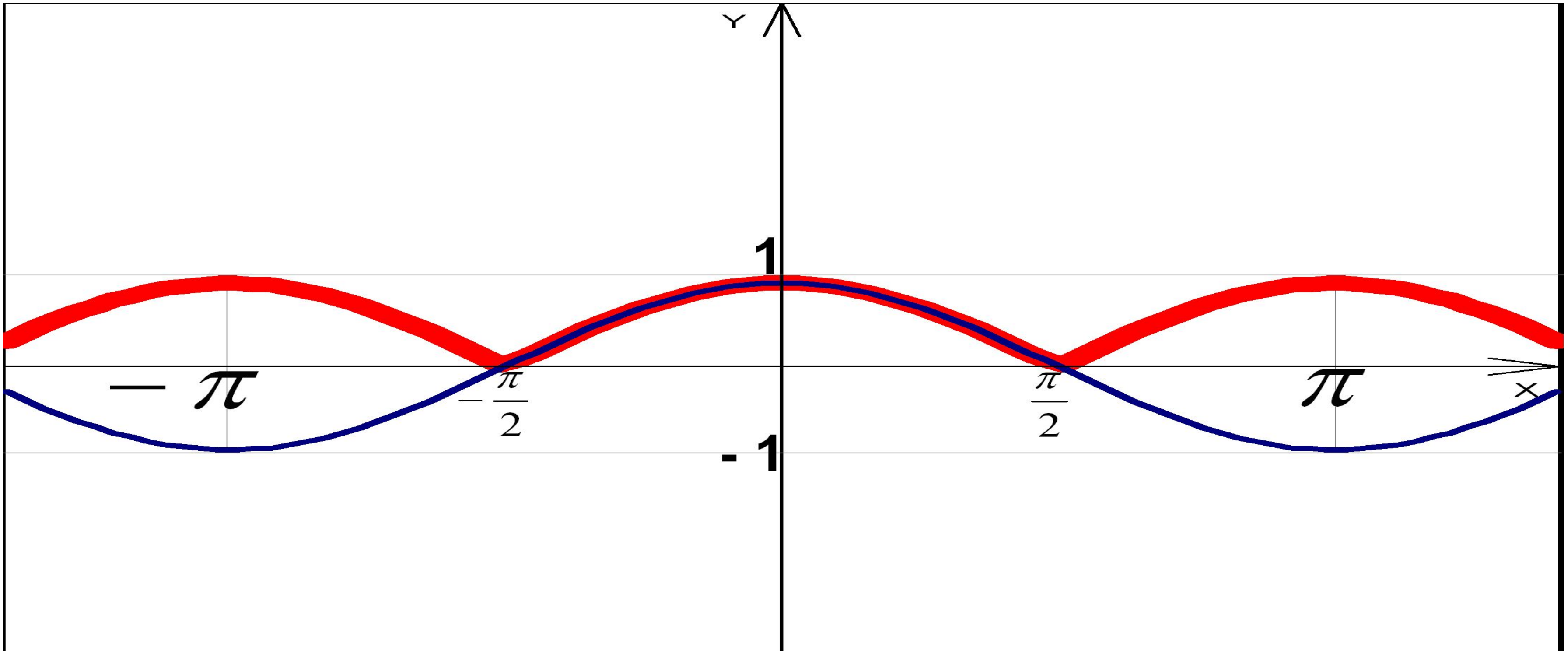


y = - cos x (свойства)

- **Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.**
  - ***<u>Функция возрастает</u> на отрезке [0; π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция убывает</u> на отрезке [π; 2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция принимает положительные значения</u> на интервале (π/2; 3π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***
  - ***<u>Функция принимает отрицательные значения</u> на интервале (-π/2; π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***

y = | cos x |

- Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.

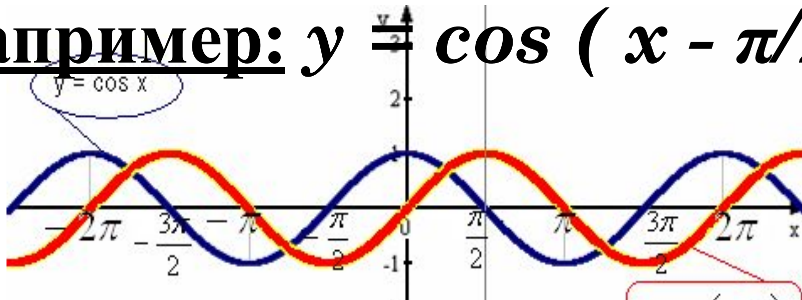


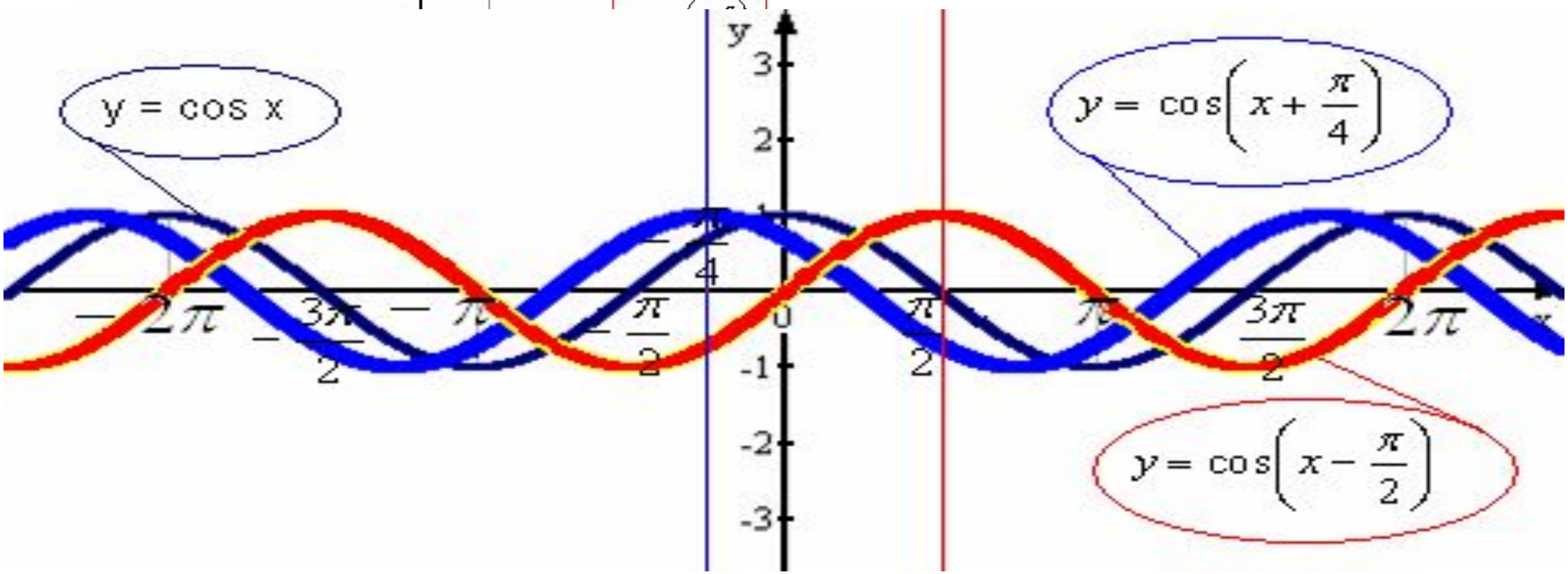
$y = |\cos x|$ (свойства)

- **Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.**
  - ***<u>E (f):</u> y*** $\in$ ***[0; 1]***
  - ***<u>Периодичность:</u>*** $T = \pi$
  - ***<u>Функция возрастает на промежутке</u>*** $(\pi/2; \pi)$ + ***сдвиги на*** πn, $n \in Z$
  - ***<u>Функция убывает на промежутке</u>*** $(0; \pi/2)$ + ***сдвиги на*** πn, $n \in Z$
  - ***<u>f (x) > 0:</u> при любом значении x***
  - ***<u>f (x) < 0:</u> нет***
  - ***<u>y (наиб) = 1</u>, при*** $x = 2\pi n$, $n \in Z$
  - ***<u>y (наим) = 0</u>, при*** $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$

y = cos (x – a)

- Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если a > 0, на │a│ единиц влево, если a < 0.
- **<u>Например:</u>** *y = cos (x - π/2); y = cos (x +π/4).*





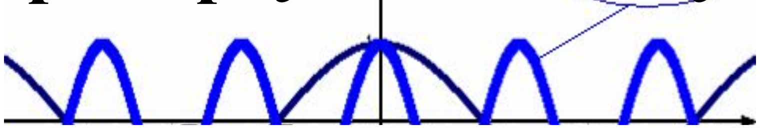
$y = \cos(x - a)$ (свойства)

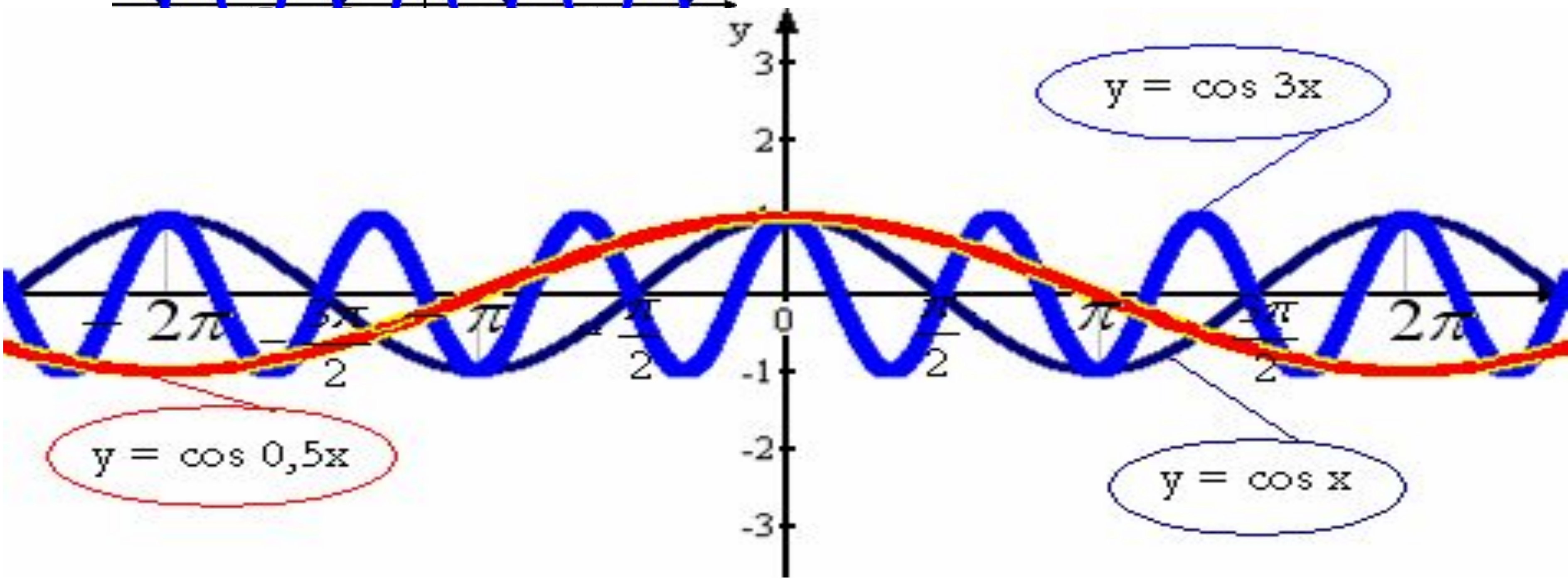
- **Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**

- **<u>Например:</u> $y = \cos(x + \pi/4)$**
  - ***<u>Четность:</u>*** ***$f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, т.к. $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$***
  - ***<u>Функция возрастает</u>*** на ***$[3\pi/4; 11\pi/4]$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in Z$***
  - ***<u>Функция убывает</u>*** на ***$[-\pi/4; 3\pi/4]$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in Z$***
  - ***<u>$f(x) = 0$</u> при $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$***
  - ***<u>$f(x) > 0$</u> при $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in Z$***
  - ***<u>$f((x) < 0$</u> при $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in Z$***

y = cos (k · x)

- **Сжатие графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если k > 1 , и растяжение в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x; y = cos 0,5x.***



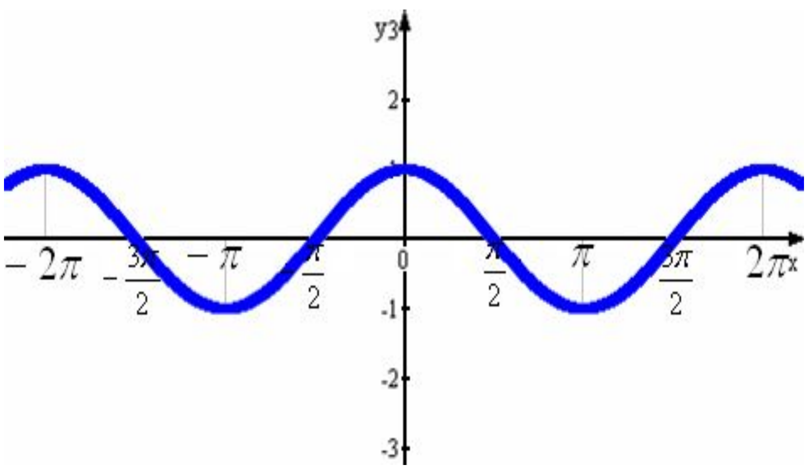


$y = \cos(k \cdot x)$ (свойства)

- **Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x***
  - ***<u>Период:</u> T = 2π/3, (т.к. наименьший положительный период функции y = cos x равен 2π, то 3T = 2π ⇒ T = 2π/3).***
  - ***<u>Функция возрастает</u> на [π/3; 2π/3] + сдвиги на 2πn/3, n∈Z.***
  - ***<u>Функция убывает</u> на [0; π/3] + сдвиги на 2πn/3, n∈Z.***
  - ***<u>f (x) = 0</u> при x = π/6 + πn/3.***
  - ***<u>f (x) > 0</u> при x∈ (-π/6; π/6) + сдвиги на 2πn/3, n ∈ Z.***
  - ***<u>f (x) < 0</u> при x∈ (π/6; π/2) + сдвиги на 2πn/3, n ∈ Z.***

$y = \cos(-x)$

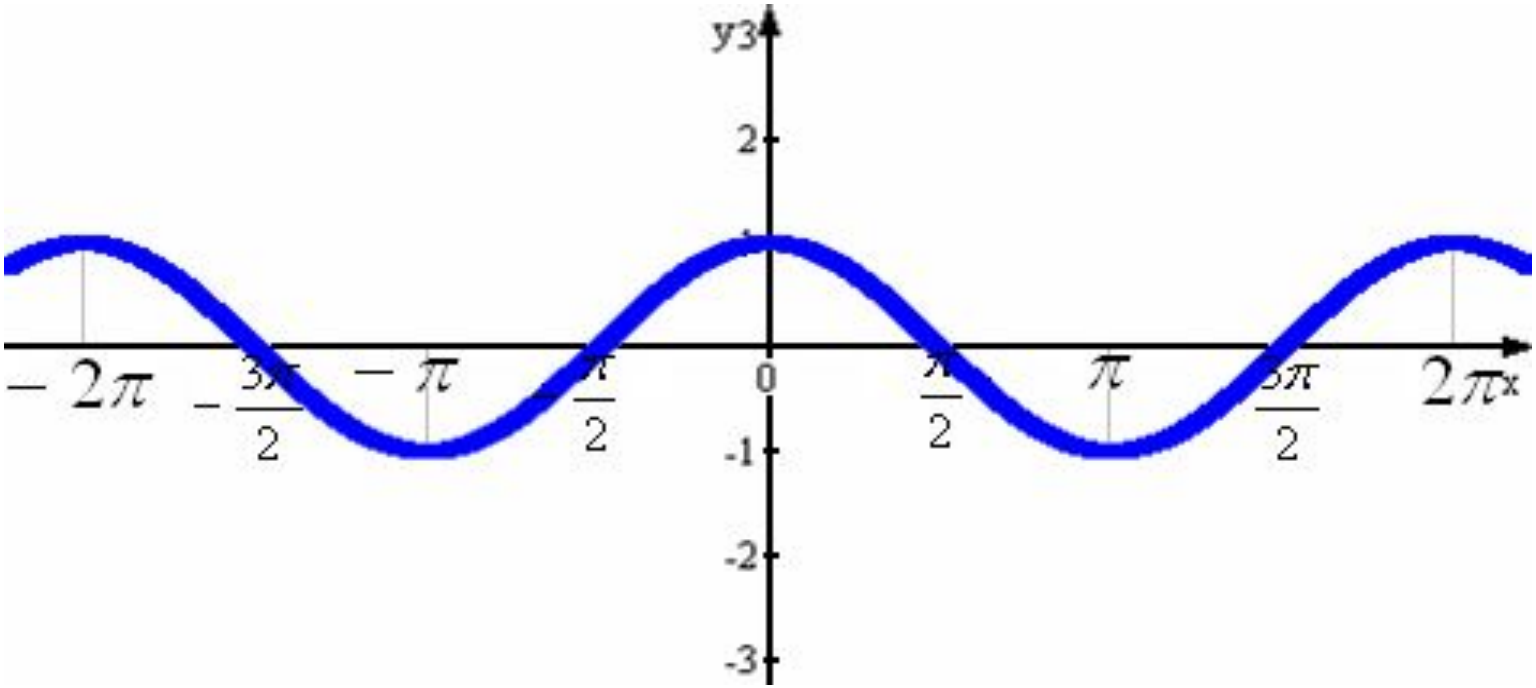
- **Симметричное отражение относительно оси абсцисс.**



$y = \cos(-x)$ (свойства)

- **В данном случае свойства функции не меняются, так как функция $y = \cos x$ – четная и $\cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$ все свойства функции $y = \cos x$ справедливы и для функции $y = \cos(-x)$**

$y = \cos | x |$

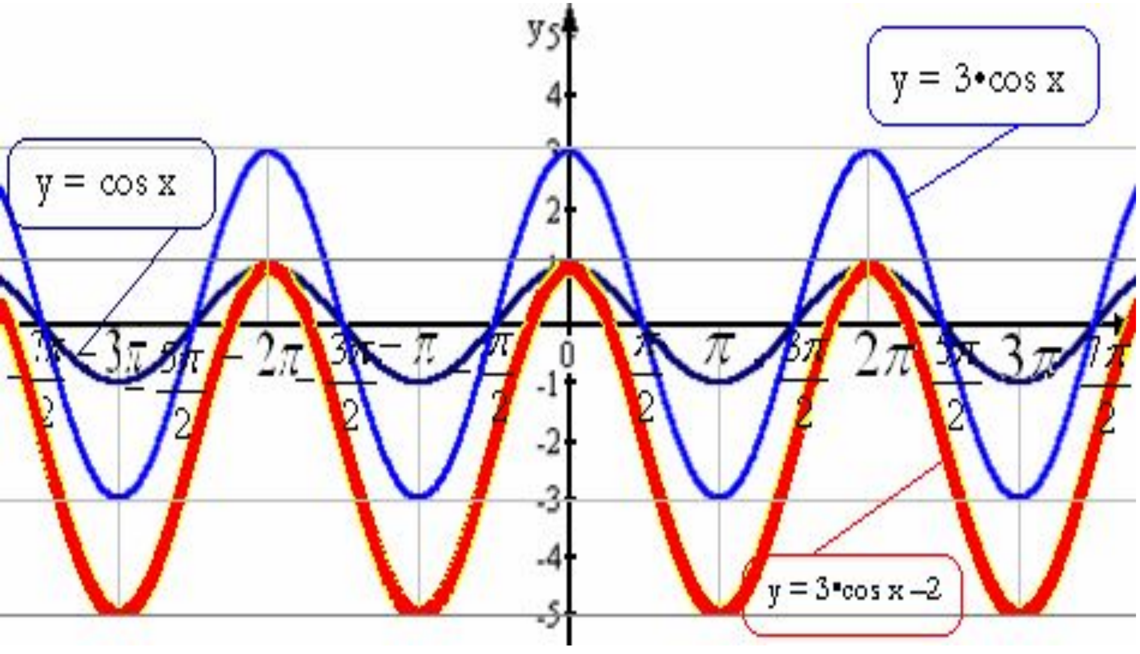


- **Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x \leq 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для $x \geq 0$.**

$y = \cos|x|$ (свойства)

- **В данном случае свойства функции не меняются, так как функция $y = \cos x$ – четная и $\cos|x| = \cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$ все свойства функции $y = \cos x$ справедливы и для функции $y = \cos|x|$**

$y = 3 \cdot \cos x - 2$



- **Построить график функции $y = \cos x$;**
- **Построить график функции $y = 3 \cdot \cos x$ *(растяжение графика функции $y = \cos x$ вдоль оси OY в 3 раза);***

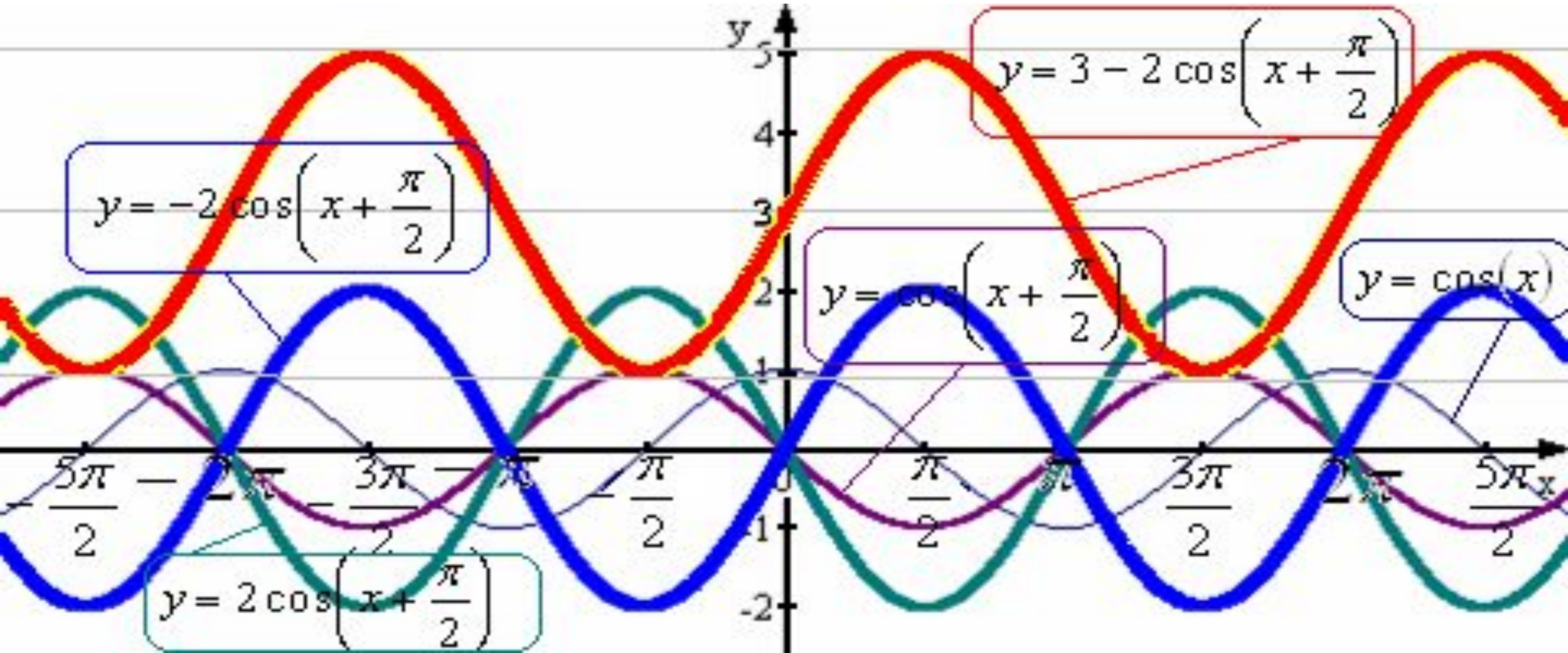
- **Построить график функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$ *(параллельный перенос графика $y = 3 \cdot \cos x$ вдоль оси OY на 2 единицы вниз).***

Свойства функции y = 3 · cos x – 2

- **Область определения:** $D(f)$: $x \in R$;
- **Множество значений:** $y \in [-5; 1]$, *т.к.* $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\cos x - 2 \le 1$;
- **Периодичность:** $T = 2\pi$;
- **Четность:** *четная, т.к.* $3\cos(-x) - 2 = 3\cos x - 2 \Rightarrow$ *график функции симметричен относительно оси OY;*
- **Возрастает:** *на отрезке* $[\pi; 2\pi]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3\ldots$;
- **Убывает:** *на отрезке* $[0; \pi]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$

y = 3 – 2 · cos (x + π/2)

- Построим график функции y = cos x;
- Построим график функции y = cos (x + π/2)(параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на π/2 единиц влево);
- Построим график функции y = 2cos(x + π/2)(растяжение графика функции y = cos(x + π/2) вдоль оси OY в 2 раза);
- Построим график функции y = - 2cos(x + π/2)(симметричное отражение графика функции y = 2cos (x + π/2) относительно оси OX);
- Построим график функции y = 3 – 2cos (x + π/2) (параллельный перенос графика функции y = - 2cos (x + π/2) вдоль оси OY на 3 единицы вверх).



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **<u>Область определения</u>:** ***$D(f)$: $x \in R$;***
- **<u>Множество значений</u>:** ***$y \in [1; 5]$, т.к. $-1 \le \cos(x + \pi/2) \le 1 \Rightarrow$***

  $$-2 \le 2\cos(x + \pi/2) \le 2 \Rightarrow 1 \le 3 - 2\cos(x + \pi/2) \le 5;$$
- **<u>Периодичность</u>:** ***$T = 2\pi$;***
- **<u>Четность</u>:** ***ни четная, ни нечетная, т.к. $y(-x) \ne y(x) \ne -y(x)$ (график не симметричен ни оси OY, ни началу координат)***
- **<u>Возрастает</u>:** ***на $[3\pi/2; 5\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3…$***
- **<u>Убывает:</u>** ***на $[\pi/2; 3\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3…$***
- **<u>Функция принимает значения равные:</u>**
  - ***<u>нулю</u>: нет (уравнение $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ не имеет корней т.к. $|-3/2| > 1$);***
  - ***<u>положительные</u>: при любом x;***
  - ***<u>наибольшее, равное 5</u>: при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.***
  - ***<u>наименьшее, равное 1</u>: при $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.***