Уральский федеральный университет

Тема: Дифференциальные уравнения 1 порядка

Лекция 1

Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Литература

- Высшая математика: учебное пособие / В.И. Белоусова, Г.М. Ермакова, М.М. Михалева, Н.В. Чуксина, И.А. Шестакова – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. – Ч.II. – 277 с.
- Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Едиториал «УРСС», 2002, – 256 с.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Т.3. М.: Дрофа, 2004. – 512с.
- Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 1. М.: Высшая школа, 1999. – 304 с.

- Понтрягин ЛС Обыкновенные ДУ. – М, 1961.
- Филлипов АФ Сборник задач по ДУ. – М, 2008.
- Сборник задач по математике для ВТУЗов: учеб.лит./ Под ред. Ефимова, Поспелова, Ч.2, 2003.

Дифференциальные уравнения

Любой процесс, в котором есть движение, описывается ДУ

§1. Основная терминология дифференциальных уравнений

Уравнение, связывающее неизвестную функцию, её аргументы, её производные, называется ***дифференциальным уравнением***.

Порядок дифференциального уравнения – порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Пример: $\boldsymbol{y}^{(4)} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = 0$ - уравнение четвёртого порядка.

Классификация ДУ

ДУ

Обыкновенные ДУ, т.е. ДУ, содержащее искомую функцию одного аргумента

$$F\left(y^{(n)},y^{(n-1)},y^{(n-2)},\ldots,y',y,x\right)=0$$

ДУ в частных производных: ДУ, содержащее функцию нескольких аргумента

$$F\left(y^{(n)}_{x_i},\ldots,y'_{x_i},y\left(x_1,\ldots,x_n\right),x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=0$$

ДУ, разрешимые относительно старшей производной

$$y^{(n)}=F\left(y^{(n-1)},y^{(n-2)},\ldots,y',y,x\right)$$

ДУ первого порядка $y'=F\left(y,x\right)$

ДУ высших порядков $y'''=F\left(y'',y',y,x\right)$

ДУ, неразрешимые относительно старшей производной

$$y'=\ln\left(y'x\right)+yx$$

Линейные и нелинейные ДУ

$$y'''+3y''-y'+x^2=0$$

$$y'''\cdot y''-\left(y'\right)^2+3x=0$$

В данном курсе будут рассматриваться только *обыкновенные дифференциальные уравнения*, *разрешенные относительно старшей производной*, т. е. уравнения вида:
$y^{(n)}=f(x, y, y', y'',\ldots, y^{(n-1)})$.

Решение ДУ

Функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, непрерывная и n раз дифференцируемая на (a, b), называется ***решением дифференциально уравнения*** n-го порядка на (a, b), если при подстановке её в уравнение вместо неизвестной функции и её производных обращает уравнение в тождество на указанном интервале.

График решения дифференциального уравнения называют ***интегральной кривой***.

Основная задача теории ДУ:

решить ДУ, т. е. найти все его решения и описать их свойства.

Процедура отыскания решений ДУ
(чаще всего связанная с интегрированием)
называется интегрированием ДУ.

ДУ считается решённым, если его решение сведено к неопределённому интегралу (к квадратуре).

Универсального метода решения ДУ не существует.

Методы решения ДУ:

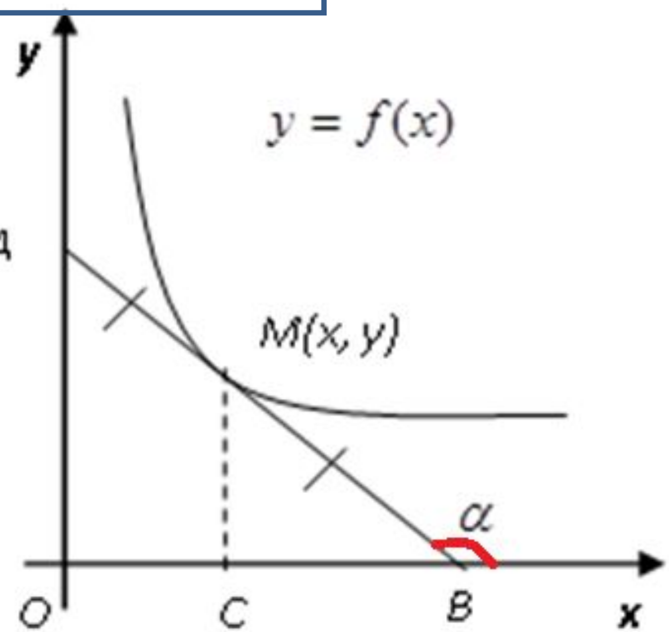
- Точные (аналитические).
- Приближенные
  - Численные
  - Графические

Пример. Найти кривую, проходящую через точку (3;1), у которой отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

AB – касательная → $tg\alpha = \boxed{tg(\pi - \angle ABO) = y'(x)}$

$$\Delta AOB: \quad tg(\angle ABO) = \frac{AO}{BO}$$

$$\Delta AOB \sim \Delta BCM \to \; tg(\angle ABO) = \frac{2y}{2x} = \boxed{\frac{y}{x}}$$



Из найденного получим уравнение

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln c = \ln\frac{c}{x}$$

$y = \frac{c}{x}$. Подставим точку (3,1), получим, что c=3.

Таким образом, решением ДУ является функция $y = 3/x$.

§2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид: $F(x, y, y')=0$,

где x − независимая переменная;

$y = y(x)$ − искомая функция;

y' − её производная.

Иногда уравнение можно разрешить относительно y':

$$y' = f(x, y).$$

Последнее уравнение можно записать в дифференциальной форме, заменив y' на dy/dx:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Например, уравнение $y' = x^2/y$ можно записать в виде $dy/dx = x^2/y$ или $x^2\,dx - y\,dy = 0$.

Дифференциальное уравнение в общем случае имеет бесконечное множество решений.

Например, решением уравнения $y' = \cos x$ является функция $y = \sin x$, а также функции

$y = \sin x+3$, $y = \sin x - 1{,}5$

и ,в общем случае, $y = \sin x + C$, где $C - const.$

Уральский федеральный университет

Чтобы получить одно решение дифференциального уравнения, необходимо подчинить его некоторым дополнительным условиям.

Условие, что функция $y(x)$ должна быть равна определенному значению y_0, при x_0, называется ***начальным условием.***

Начальное условие записывают в виде:

$y(x_0)= y_0$ или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

а) функция $\varphi(x, C)$ есть решение дифференциального уравнения при любом конкретном значении постоянной C;

б) каково бы ни было допустимое начальное условие, можно найти такое значение постоянной $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

Уральский федеральный университет

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy;

частное решение – одна интегральная кривая этого семейства, проходящая через заданную точку.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения первого порядка , удовлетворяющего данному начальному условию, называется ***задачей Коши***

(Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик).

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $f\,'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0), то в этой области существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

(без доказательства)

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку (x_0, y_0), если выполняется условие теоремы.

В процессе решения дифференциального уравнения нередко приходят к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, которое неявно определяет искомую функцию .

Такое равенство называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения, а равенство $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется ***частным интегралом*** уравнения.

Решение дифференциального уравнения называется ***особым***, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Особое решение нельзя получить из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении (даже при $C = \infty$).

Пример: рассмотрим уравнение $y' = \sqrt{y}.$

$y = \dfrac{(x+C)^2}{4}$ – общее решение;

$y = \dfrac{x^2}{4}$ – частное решение;

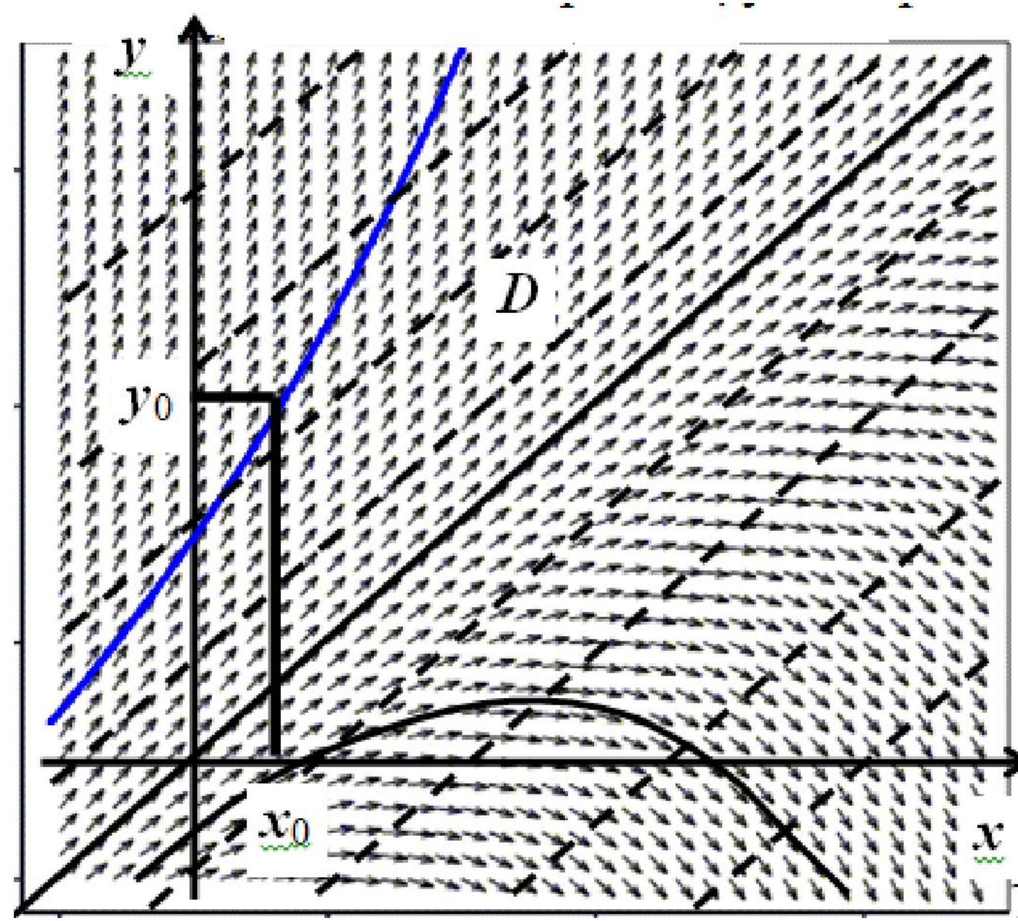
$y \equiv 0$ – особое решение ДУ.

Геометрический метод решения. Метод изоклин.

Уравнение $y' = f(x, y)$ в каждой точке $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ области $\boldsymbol{D}$, в которой задана функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, определяет - угловой коэффициент касательной к решению, проходящему через точку $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, т.е. направление, в котором проходит решение через эту точку.

Говорят, что ДУ задаёт в $\boldsymbol{D}$ поле направлений. График любого решения дифференциального уравнения (**интегральная кривая**) в любой своей точке касается этого поля, т.е. проходит в направлении, определяемом полем.

На рисунке - поле направлений, определяемое уравнением, и три интегральные кривые (три частных решения) этого уравнения.



Метод изоклин.

Для изображения поля направлений, задаваемого дифференциальным уравнением, рассматривают линии уровня функции $f(x, y)$, т.е. геометрические места точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное направление.

Такие линии называются **изоклинами**.

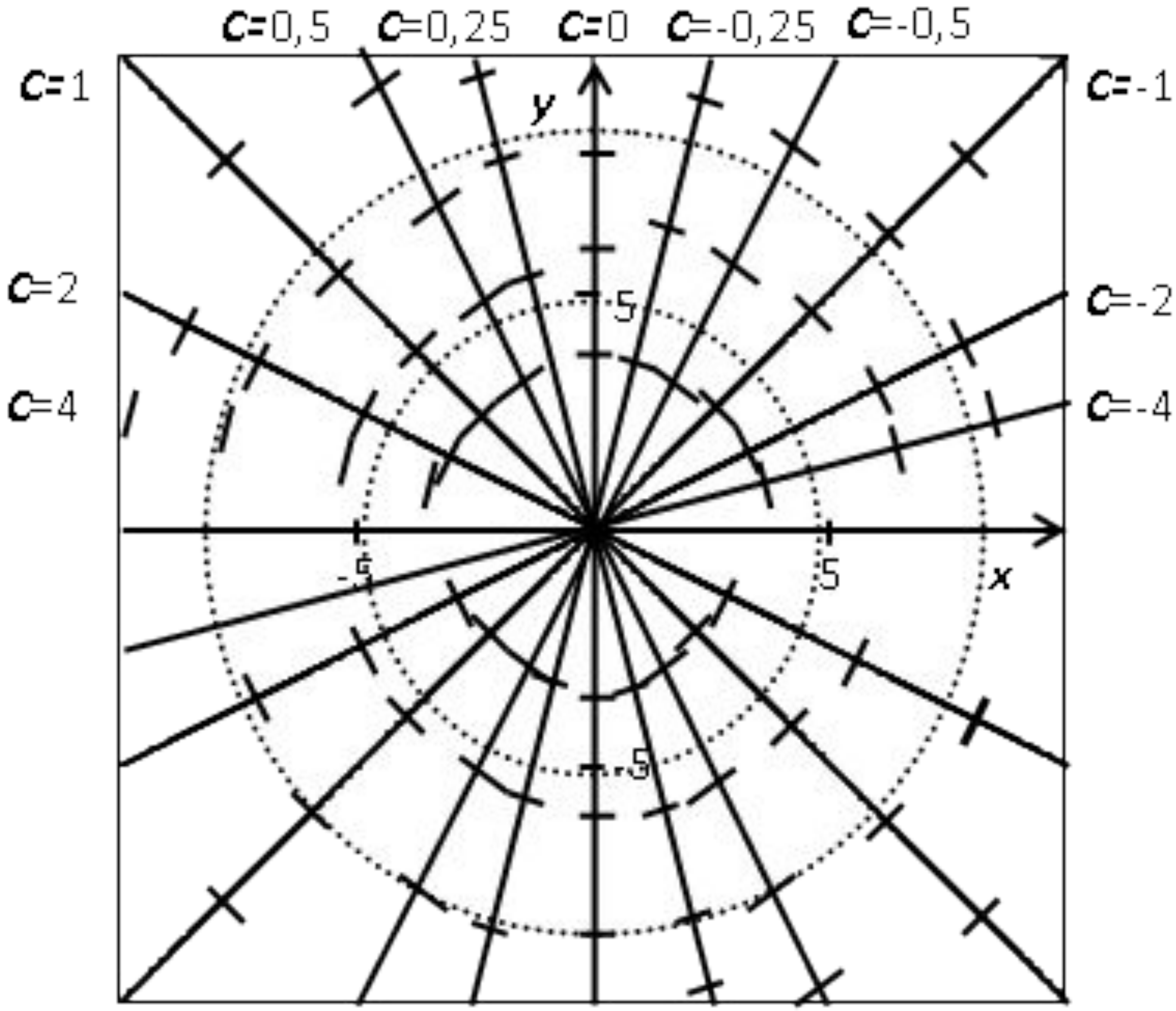
С помощью изоклин можно приближённо изобразить интегральные кривые.

Метод изоклин.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Изоклины – линии с уравнением

$$-\frac{x}{y} = C$$



Задание к лекции

Смотрим по прикрепленной ссылке видео и конспектируем кратко суть метода изоклин и алгоритм его применения.

https://www.youtube.com/watch?v=83gQDXfM8wo