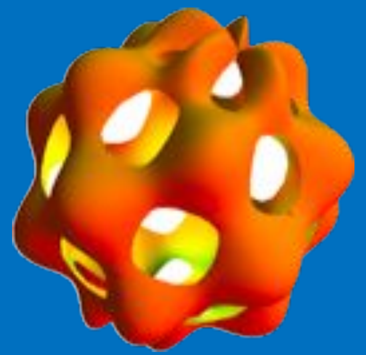
МЧС России
Санкт-Петербургский университет
Государственной противопожарной службы



Кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов

Раздел 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Тема 1. Матрицы и определители, их приложения

Лекция 1.1

Матрицы и операции над ними

Учебные цели:

1. Ознакомить обучающихся со структурой дисциплины «Высшая математика», ее целями, а также задачами, ставящимися при ее изучении.

2. Дать понятие системы линейных уравнений. Сформировать представление о матрице как математическом объекте, о видах матриц и их применении для решения различных задач.

3. Изложить особенности выполнения основных операций над матрицами и их характерные свойства.

Учебные вопросы:

1. Понятие системы линейных уравнений. Матрица. Виды матриц.

2. Операции над матрицами.

Одной из характерных особенностей развития современного общества является широкое применение математических методов и компьютерной техники в самых различных областях человеческой деятельности.

Наиболее активно процесс внедрения математики в науку, технику, производство начался в середине XX века после появления и быстрого совершенствования ЭВМ.

Обратимся к сущности понятия «*математика*». Слово «математика» происходит от греческого «матема», означающего: «знание, наука».

Многие крупнейшие ученые (среди них Жозеф Фурье и Анри Пуанкаре) видели главную задачу математики в содействии объяснению законов природы. Галилею принадлежат замечательные слова: «великая книга природы написана языком математики».

Математика оказывает существенную помощь в изучении явлений и процессов, встречающихся как в различных учениях о природе, так и в различных науках об обществе. Везде, где есть необходимость рассматривать эти явления и процессы с количественной стороны.

Особенностью математики является ее *абстрактность*, т.е. объекты исследования математики не встречаются в действительном мире (безразмерная точка, линия, не имеющая толщины и ширины и т.д.). Абстрактность в математике необходима: она порождается не тем, что математика мало связана с практической деятельностью, а, наоборот, тем, что она приспособлена к самым разнообразным видам этой деятельности. Так, выяснив в геометрии, чему равен объем «абстрактного» цилиндра, мы можем легко найти объем любого конкретного цилиндра, является ли он поршнем двигателя, или деталью другой машины, колонной или частью пространства, занятого электрическим полем.

Мы начинаем курс высшей математики с изучения одного из его основных разделов – линейной алгебры. Далее изучим основы векторной алгебры, аналитической геометрии, дискретной математики, основных разделов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики.

На сегодняшней лекции мы ознакомимся с основными положениями теории матриц. Для этого нам необходимо:

- рассмотреть понятие системы линейных уравнений;
- изучить матрицу как математический объект, используемый для решения таких систем;
- рассмотреть различные виды матриц;
- научиться выполнять операции над ними.

Вопрос 1. Понятие системы линейных уравнений. Матрица. Виды матриц

Одной из важнейших задач математики, как в теоретическом плане, так и при решении задач прикладного характера, является решение системы уравнений первой степени, т.е. линейных уравнений. С самыми простыми из них уже сталкиваются при решении задач в школе. В курсе высшей математики решением и исследованием систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) занимается раздел высшей алгебры, называемый «линейная алгебра».

Для иллюстрации понятия матрицы рассмотрим следующую задачу.

Пример 1.1. Швейный цех производит изделия двух видов: пальто и куртки из двух видов ткани: кашемир и саржа. На одно пальто требуется 3 метра кашемира и 2 метра саржи, на одну куртку – 2 метра кашемира и 1 метр саржи. За один день расходуется 70 м кашемира и 40 м саржи. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида изделий.

Решение. Обозначим неизвестные следующим образом: пусть ежедневно цех выпускает

x_1 штук пальто и x_2 штук курток.

Тогда очевидно, что имеет место следующая система уравнений, характеризующая ежедневное распределение каждого вида ткани по обоим видам производимой продукции:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 70 \\ 2x_1 + x_2 = 40 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: x_1=10 и x_2=20.

Итак, задача из примера 1.1 сведена к решению некоторой системы уравнений. Существует огромное множество задач разной тематики, в которых необходимо решить некую систему уравнений, причем число уравнений и число неизвестных в системах могут быть разными и не обязательно совпадать в каждом отдельном случае.

Перейдем к рассмотрению системы линейных алгебраических уравнений в общем виде.

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где:

числа a_{11}, a_{12}, …, a_{mn} - коэффициенты системы;

числа b_1, b_2, …, b_m – свободные члены;

x_1, x_2, …, x_n – неизвестные.

Термин «линейный» в названии системы указывает на то, что все неизвестные x_1, x_2, …, x_n входят в систему в первой степени.

Системы линейных алгебраических уравнений могут быть однородными и неоднородными.

Система (1) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю. В противном случае, система (1) называется *неоднородной*.

После того как система определена, основной задачей становится ее исследование и решение.

Совокупность n чисел называется *решением* системы (1), если после подстановки их вместо неизвестных во все уравнения системы, каждое из этих уравнений превращается в тождество.

В высшей математике используют достаточно простую, а главное, компактную форму записи и решения задач, аналогичных рассмотренной в примере 1.1, а именно, *матричную форму* (или форму *матрицы*). Таким образом, матрица, ее свойства, а также связанная с ней величина – *определитель* матрицы – широко применяются при решении *систем линейных алгебраических уравнений*.

Отметим, что, наряду с применением матриц для решения систем линейных алгебраических уравнений, их используют для создания значительной части математических моделей реальных объектов и процессов.

Числовой матрицей или просто *матрицей* называется любая прямоугольная таблица чисел. Горизонтальные ряды матрицы называются *строками*, а вертикальные – *столбцами*, а сами числа – *элементами матрицы*.

В общем случае элементами матрицы могут быть различные математические объекты: числа, функции, многочлены и т. д. Однако в нашем курсе будут рассматриваться в основном числовые матрицы, т.е. матрицы, у которых элементами являются числа.

Если матрица содержит m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет *размерность* m *на* n и обозначают размерность в виде $m \times n$.

Записывают матрицы в круглых скобках, не ставя между элементами никаких знаков. При необходимости, за матрицей внизу справа пишется ее размерность. Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$ – матрица размерности 2×3.

Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются соответствующие маленькие буквы с двойной нумерацией, например, a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца данного элемента.

Например, матрица размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (2)$$

Матрица (2) является матрицей системы линейных уравнений (1).

Иногда для обозначения матрицы используют двойные вертикальные линии.

$$A_{m \times n} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}.$$

Вернемся к примеру 1.1. Матрица системы уравнений, рассмотренной в этом примере, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для матриц одинаковой размерности существует понятие равенства.

Две матрицы A и B одной размерности называются *равными*, если у них равны соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Матрица называется *нулевой* (или *нуль-матрицей*), если все ее элементы равны нулю.

Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом*. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной.* Число строк, а, следовательно, и число столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком.* Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ – квадратная матрица третьего порядка.

Элементы квадратной матрицы, для которых *i=j,* называются *диагональными* и образуют *главную диагональ*. Таким образом, главная диагональ состоит из элементов, образующих диагональную линию, идущую из левого верхнего угла в правый нижний угол квадратной матрицы. Элементы, стоящие на диагональной линии, идущей из правого верхнего угла в левый нижний, образуют *побочную диагональ*.

Квадратная матрица называется *матрицей треугольного вида*, если все ее элементы, расположенные под (или над) одной из диагоналей, равны нулю.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, а остальные – нулю, называется *единичной*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{Матрица треугольного вида}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{Единичная матрица}$$

Подведем итог: в ходе рассмотрения первого учебного вопроса вы получили представление об общем виде системы линейных уравнений, о матрице системы и о видах матриц.

Вопрос 2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны числовым операциям, а некоторые носят особый характер.

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α (или числа α на матрицу A) называется матрица $A \cdot \alpha$, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α.

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, нужно все элементы данной матрицы умножить на это число.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$, то $A \cdot 4 = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -32 & 4 \end{pmatrix}$

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Сложение матриц

Суммой двух матриц A и B одной и той же размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Таким образом, чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их соответствующие элементы.

Необходимо помнить, что складывать можно только матрицы одинаковой размерности.

Пример 2.1 $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Вычитание матриц

Вычитание можно определить через рассмотренные ранее операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$

Разностью матриц A и B одинаковой размерности называется матрица, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов A и B.

Таким образом, чтобы из матрицы A вычесть матрицу B, нужно из элементов матрицы A вычесть соответствующие элементы матрицы B.

Пример 2.2. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

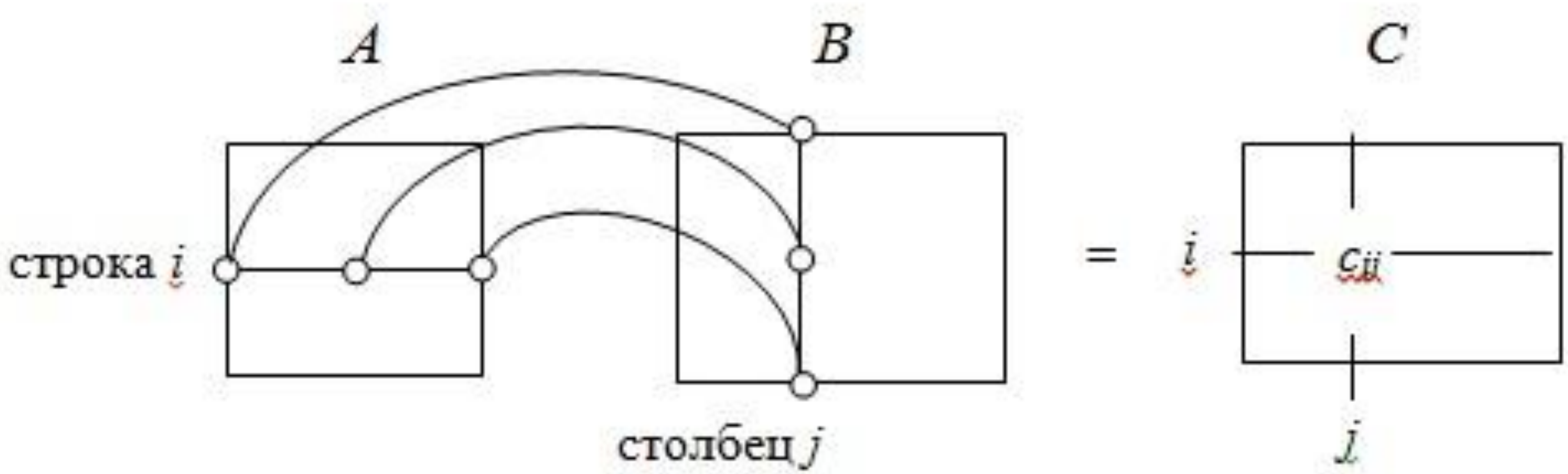
4. Умножение матриц

Произведение матриц имеет место *только для матриц определенных размерностей*. Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т.е. если A имеет размерность $m \times k$, то матрица B должна иметь размерность $k \times n$. Произведением будет матрица размерности $m \times n$:

То есть $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$

произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Именно для того, чтобы можно было составить такую сумму, и требуется равенство числа столбцов первой матрицы числу строк второй:



Пример 2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 2 \\ 2\cdot 2+0\cdot(-1) & 2\cdot 1+0\cdot 2 \\ -1\cdot 2+1\cdot(-1) & -1\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Замечание. Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами. Однако для произведения матриц практически все основные свойства не выполняются в общем случае.

Особенности умножения матриц

1. *Для произвольных матриц $AB \neq BA$*. Так как возможно, что произведение AB существует, а произведение BA не имеет смысла, либо, если и то, и другое произведения существуют, то полученные матрицы могут быть разных размерностей, но даже, если с размерностями будет все в порядке, в общем случае соответствующие элементы матриц AB и BA могут быть не равны.

Пример 2.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -16 & 2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ т.е. $AB \neq BA$.

Однако существует матрица, для которой переместительный закон умножения выполняется. Если матрица A – квадратная матрица порядка n, и E − единичная матрица того же порядка, то $AE = EA = A$.

Доказать это равенство можно простым перемножением матриц. Кроме единичной существуют и другие матрицы, при умножении которых переместительный закон выполняется. Их называют ***перестановочными*.**

Пример 2.5. Перестановочными матрицами являются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad AB = BA = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Если произведение матриц равно нулю, то совсем не обязательно, чтобы какой-либо из сомножителей был нулевой матрицей.

Пример 2.6. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;

- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получена из другой путем элементарных преобразований.

6. Транспонирование матрицы

При решении различных задач бывает удобным поменять у матрицы строки и столбцы местами, т.е. применить операцию транспонирования матрицы.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* к данной.

Обозначение: $A^{\text{т}}$.

Например, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, то $A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}$

Итак, при изучении второго учебного вопроса вы познакомились с операциями над матрицами, рассмотрели основные их свойства.

Таким образом, на сегодняшней лекции мы рассмотрели основные понятия теории матриц, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Изучили различные виды матриц, ознакомились с операциями над матрицами.

Практическое занятие по данной теме будет посвящено выполнению основных операций над матрицами.

Задание на самоподготовку:

1. Изучить рекомендуемую литературу.

2. Доработать (дополнить) конспект лекции.