# Системы булевых функций

<u>Определение</u>. Система булевых функций $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы $F$.

<u>Теорема Жегалкина.</u> Любая булева функция $f$ от $n$ переменных представима в виде следующего полинома Жегалкина

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{(i_1, \ldots, i_k)} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \oplus c$$

для некоторых значений $c \in \{0,1\}$ и $1 < i_1 < \ldots < i_k \le n$. Причем такое представление булевой функции $f$ единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определение. Булева функция $f$ называется *линейной*, если ее представление полиномом Жегалкина не содержит произведения переменных.

Множество всех линейных булевых функций обозначим символом ***L***.

Определение. Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1,\ldots,x_n)=\left(f(x_1',\ldots,x_n')\right)'$.

Множество всех самодвойственных булевых функций обозначим символом ***S***.

Определение. Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *монотонной*, если для любых $x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n \in \{0,1\}$ из $x_1 \le y_1,\ldots,x_n \le y_n$ следует $f(x_1,\ldots,x_n) \le f(y_1,\ldots,y_n)$.

Множество всех монотонных булевых функций обозначим символом ***M***.

Пусть $\boldsymbol{P}_0$ - класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющих условию $f(0,...,0)=0$.

Пусть $\boldsymbol{P}_1$ - класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющих условию $f(1,...,1)=1$.

Определение. Классы булевых функций $\boldsymbol{L},\boldsymbol{S},\boldsymbol{M},\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1$ называются *классами Поста.*

Теорема Поста. Система булевых функций в том и только том случае является полной, если она не содержится ни в одном из классов Поста.

Алгоритм доказательства полноты системы булевых функций $F=\{f_1,\dots,f_k\}$:

1. Составить таблицу, столбцы которой помечены классами Поста $\boldsymbol{L},\boldsymbol{S},\boldsymbol{M},\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1$ и строки – функциями системы $f_1,\dots,f_n$.

2. Для каждой из функций $f_1,\dots,f_n$ проверить принадлежность ее к классам Поста и результаты проверки зафиксировать словами «Да» или «Нет» в соответствующей клетке таблицы.

3. По теореме Поста данная система является полной в том и только том случае, если в каждом столбце таблицы имеется слово «Нет».

Пример.

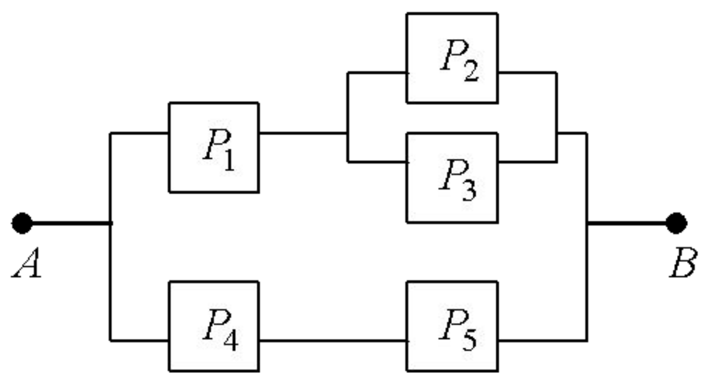
Рассмотрим систему $F=\{\,|\,\}$, состоящую из одной булевой функции | – штрих Шеффера. Составляем таблицу, столбцы которой помечены классами Поста $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ и одна строка – функцией |.

| Функция | Классы Поста | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\boldsymbol{L}$ | $\boldsymbol{S}$ | $\boldsymbol{M}$ | $\boldsymbol{P}_0$ | $\boldsymbol{P}_1$ |
| \| | Нет | Нет | Нет | Нет | Нет |

# Переключательные схемы

Рассматриваются электрические ПС, представляющие собой соединенные проводниками переключатели и источники тока.

Условимся обозначать символом 1 протекание тока в проводниках и символом 0 – отсутствие тока в проводниках.



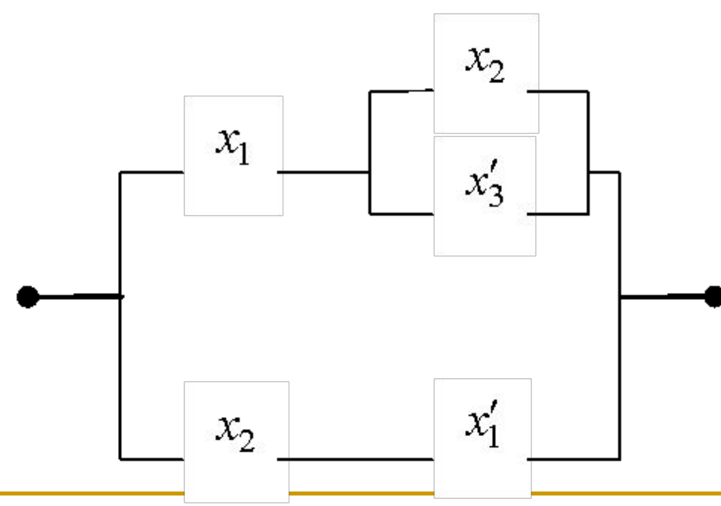
*Переключатель* - электромагнитное реле с контактами и индукционной катушкой, состояние которой моделируется булевой переменной $x$: $x=1$ - в катушке идет ток, и $x=0$ - в катушке тока нет.

Контакты реле – замыкающие или размыкающие.

Через *замыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $x=1$ - такой контакт моделируется булевой переменной $x$.

Через *размыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $x=0$ - такой контакт моделируется отрицанием булевой переменной $x'$.

<u>Пример</u>. Пусть в ПС на рис.1 переключатели $P_1, P_5$ имеют общую катушку реле с током $x_1$ и переключатели $P_2, P_4$ имеют общую катушку реле с током $x_2$, причем контакты $P_1, P_2, P_4$ – замыкающие и контакты $P_3, P_5$ – размыкающие. Тогда такая ПС с помощью булевых переменных $x_1, x_2, x_3$ изображается следующей диаграммой:



Переключатели $p,q$ могут быть соединены последовательно или параллельно.

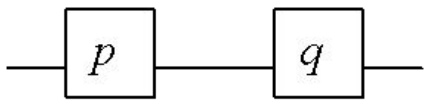



Рис.3

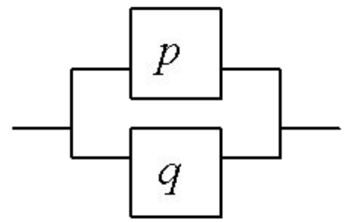



Рис.4

Через последовательно соединенные переключатели $p,q$ ток проходит в том и только том случае, если $p=q=1$ - такое соединение моделируется булевым многочленом $pq$.

Через параллельно соединенные переключатели $p,q$ ток не проходит в том и только том случае, если $p=q=0$ - такое соединение моделируется булевым многочленом $p+q$.

В результате любая электрическая ПС моделируется некоторым булевым многочленом $p$, который принимает значение 1 в том и только том случае, если в ПС идет ток.

Соответствующая такому многочлену $p$ булева функция $\overline{p}$ называется *функцией проводимости ПС*, так как она показывает, при каких значениях булевых переменных (т.е. переключателей данной схемы) в ПС идет электрический ток.

С другой стороны, каждый булев многочлен $p = p(x_1,\dots,x_n)$ моделирует ПС с функцией проводимости $\overline{p}$: эта схема так конструируется из переключателей $x_1, x_1',\dots, x_n, x_n'$, что в ней при значениях $x_1 = a_1,\dots, x_n = a_n$ проходит ток в том и только том случае, если $\overline{p}(a_1,\dots,a_n) = 1$.