СИСТЕМА ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

"Среднее арифметическое в новом УМК по математике и в заданиях ЕГЭ"

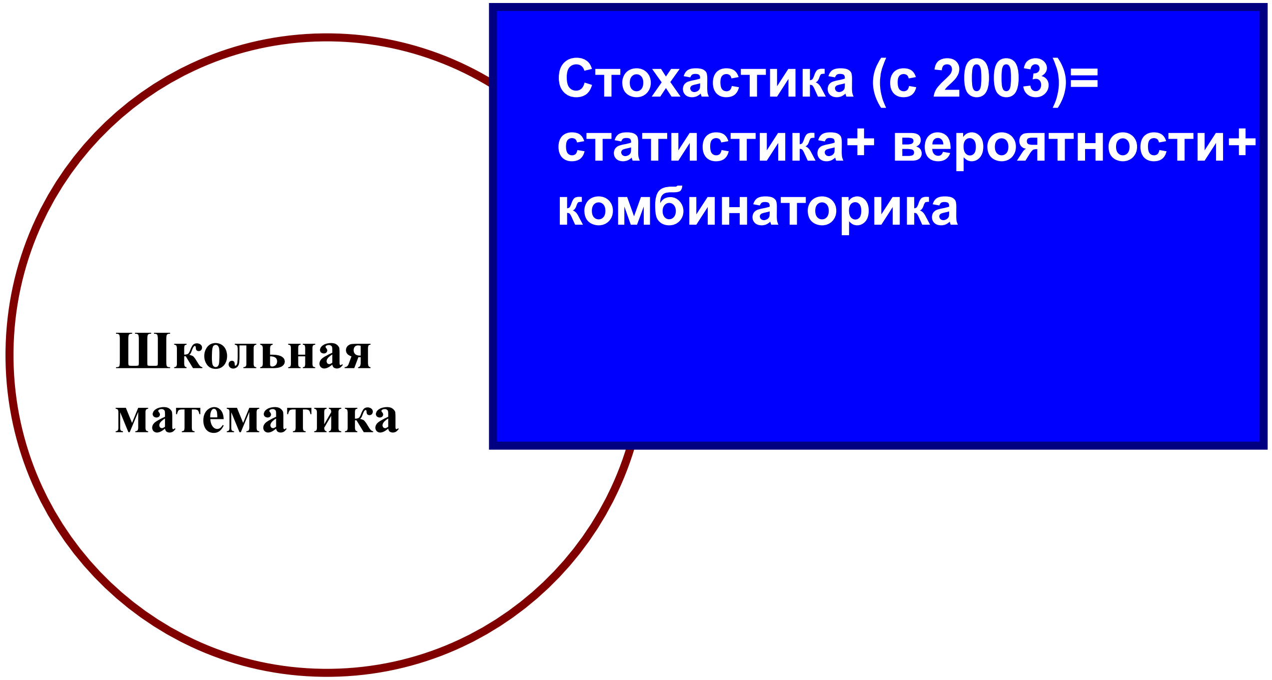
Павел Владимирович Семенов,

Издательство «Бином»,

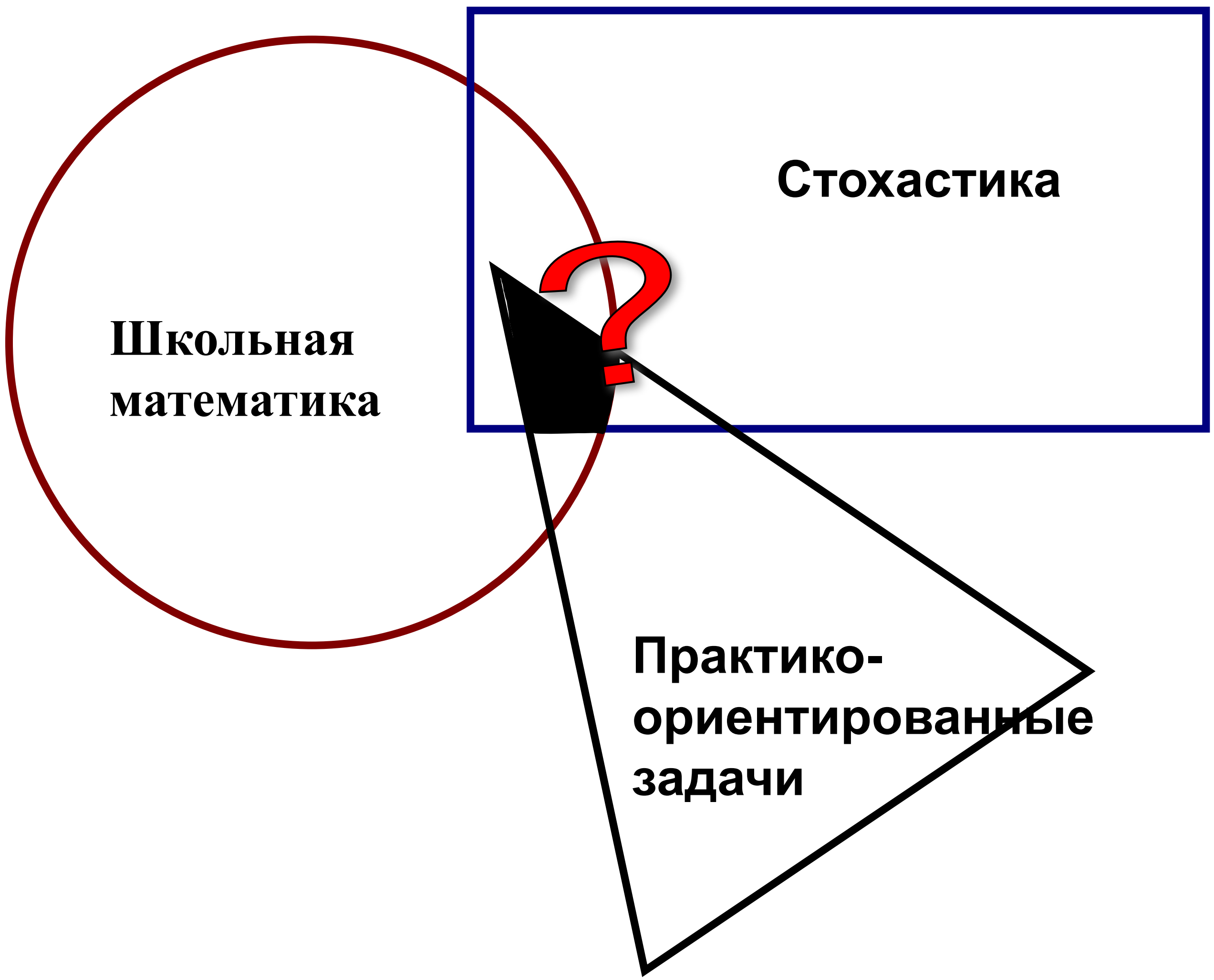
Отдел математического образования факультета математики НИУ ВШЭ

Москва, 22 ноября 2019

Школьная математика


Стохастика (с 2003)= статистика+ вероятности+ комбинаторика
Школьная математика

Стохастика
Школьная
математика
РЕАЛЬНОСТЬ


Стохастика
Школьная математика
Практико-ориентированные задачи
?

Среднее арифметическое (среднее)

- для того, чтобы найти среднее нескольких чисел следует сумму этих чисел разделить на их количество;

- для нахождения среднего значения набора числовых данных следует:
- найти сумму всех данных в наборе;
- найти количество данных в наборе;
- найденную сумму разделить на найденное количество.

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$M, \quad A, \quad A_1, \quad \overline{x}, \ldots$$

«Для обозначения на чертеже, среднего арифметического отклонения профиля шероховатости, используется параметр «Ra»

СОСТАВ УМК «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ. АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

АЛГЕБРА. 7—9 классы.
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. **10—11 классы.**
Примерные рабочие программы.
Авторы: А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. **10—11 классы.**
Методические пособия для учителя.
Авторы: А.Г. Мордкович, П.В. Семенов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. **10—11 классы. В двух частях.**
Учебные издания для общеобразовательных организаций.
Авторы: А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. **10 класс.**
Контрольные работы.
Автор: Е.Л. Мардахаева.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. **11 класс.**
Контрольные работы.
Автор: М.В. Шуркова.

ISBN 978-5-9963-4661-5

11 (2)

А. Г. МОРДКОВИЧ. АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА • ГЕОМЕТРИЯ

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

ЧАСТЬ 2

11 КЛАСС

Издательство БИНОМ

Тематическое планирование. 11 класс (3 ч. в неделю)

Глава 1. Элементы теории пределов (9 ч.)

Глава 2. Производная (21 ч.)

Глава 3. Исследование функций с помощью производной (16 ч.)

Глава 4. Определённый интеграл (11 ч.)

Глава 5. Непрерывные случайные величины (10 ч)

Глава 6. Уравнения и неравенства (22 ч.)

28. Равносильность уравнений	2
29. Решение уравнений с одной переменной	4
30. Решение систем уравнений	4
31. Решение неравенств с одной переменной	4
К/р № 5	2
32. Уравнения и неравенства с параметрами	4
33. Уравнения неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом.	2
Повторение	13

§ 32. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом

Среднее арифметическое — очень интересное и важное понятие. Оно часто используется в статистике и теории вероятностей, широко применяется в текстовых практико-ориентированных задачах.

В этом параграфе мы разберем несколько примеров того, как наши знания об уравнениях, неравенствах и функциях, основных математических моделях, помогают в решении разнообразных задач, связанных с одним и тем же объектом — средним арифметическим.

Напомним, что *среднее арифметическое значение*[1] чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ равно сумме этих чисел, деленной на их количество:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}.}$$

Эту формулу можно записать и так: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \cdot \overline{x}$. Получаем простое, но важное свойство — *сумма чисел равна произведению их среднего на количество этих чисел.*

Пример 1 До 31 октября Петя получил по русскому языку такие отметки: 4, 2, 4, 4, 5, 5. После этого он подряд получил несколько пятёрок. Могло ли среднее его отметок оказаться равным:

а) 4; б) 4,4; в) 4,45; г) 5?

Решение. Составим математическую модель. Для этого обозначим n — количество полученных пятёрок. Тогда количество всех отметок равно $6 + n$, а их сумма равна

$$4 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + \overbrace{5 + \ldots + 5}^{n} = 24 + 5n.$$

Поэтому среднее отметок равно $\bar{x} = \dfrac{24 + 5n}{6 + n}$ — это дробно-линейная функция от переменной n.

а) Уравнение $\dfrac{24 + 5n}{6 + n} = 4$; $24 + 5n = 24 + 4n$ имеет корень $n = 0$, но по условию $n > 0$.

б) Уравнение $\dfrac{24 + 5n}{6 + n} = 4{,}4$; $24 + 5n = 26{,}4 + 4{,}4n$; $0{,}6n = 2{,}4$ имеет корень $n = 4$ и он удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а), в), г) — нет; б) да, при $n = 4$.

Пример 1’

До 31 октября Петя получил по русскому языку такие отметки: 4, 2, 4, 4, 5, 5. Какое наименьшее количество пятерок подряд следует получить Пете для того, чтобы средняя отметка стала больше 4,6?

$$\frac{24+5n}{6+n} > 4,6; \quad 24+5n > 27,6+4,6n; \quad 0,4n > 3,6; \quad n > 9$$

Чтобы улучшить среднее с 4,4 до чуть больше 4,6 (всего на 0,2) надо количество пятёрок увеличить с 4 до 10.

Среднее «устойчиво»: чтобы его заметно изменить нужны серьёзные усилия.

.

Пример 2. В 20 отделах компании в среднем работает по 50 сотрудников. Число сотрудников можно увеличить, но так, чтобы в среднем в отделах компании работало бы не более чем по 55 сотрудников. Решено число сотрудников в отделах увеличивать так: в одном – на 1, в другом – на 2, в третьем – на 3 и т.д. В каком наибольшем числе отделов можно провести такое увеличение числа сотрудников?

Р е ш е н и е. Составим математическую модель. Для этого обозначим n число отделов, в которых проводят увеличения. По условию общее число новых рабочих мест равно $1+2+...+(n-1)+n$. Это сумма арифметической прогрессии, она равна $\frac{n(n+1)}{2}$. По условию число работающих сотрудников равно $50\cdot 20=1000$, а после увеличений это число станет равным $1000+\frac{n(n+1)}{2}$. Так как число отделов останется равным 20, то новое среднее числа сотрудников равно $\dfrac{1000+\frac{n(n+1)}{2}}{20}=50+\frac{n(n+1)}{40}$. Получаем неравенство

$$50+\frac{n(n+1)}{40}\le 55; \quad \frac{n(n+1)}{40}\le 5; \quad n(n+1)\le 200$$

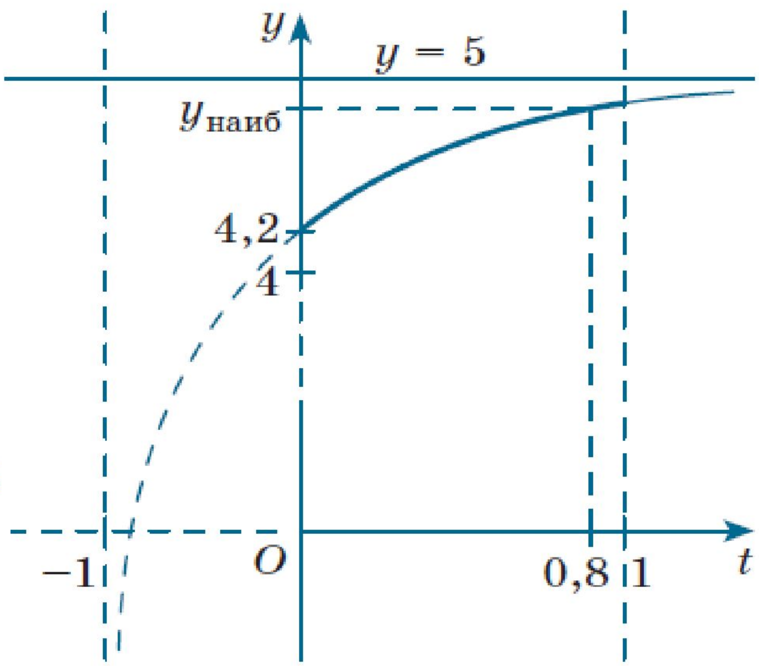
$$\frac{-1-\sqrt{801}}{2}\leqslant n\leqslant\frac{-1+\sqrt{801}}{2}\approx\frac{27,3}{2}=13,65. \quad 13\cdot 14<200. \quad 14\cdot 15>200.$$

Пример 3 Среднее всех отметок ученика по истории равно 4,2. Ученик решил улучшить это среднее. Для этого он планирует в электронном журнале «удвоить» пятёрки: к каждой уже имеющейся пятёрке дописать ещё одну. Найти наибольшее возможное значение среднего отметок после такой замены.

Решение. Составим математическую модель. Для этого обозначим n — число отметок и k — число пятёрок. По условию сумма уже выставленных отметок равна $4{,}2n$. После «удвоения» пятёрок она сумма отметок станет равной $4{,}2n + 5k$, а их число станет равным $n + k$. Поэтому

$$\bar{x}_{\text{нов}} = \frac{4{,}2n + 5k}{n + k} = \frac{4{,}2 + 5 \cdot \dfrac{k}{n}}{1 + \dfrac{k}{n}} = \frac{4{,}2 + 5t}{1 + t}$$

$$t = \frac{k}{n} \in [0;\ 1]$$



$$4{,}2n = S \geqslant 5k + (n - k); \quad 4{,}2n \geqslant 4k + n;$$

$$4{,}2 \geqslant 4\frac{k}{n} + 1; \quad 3{,}2 \geqslant 4\frac{k}{n}; \quad \frac{k}{n} \leqslant 0{,}8.$$

5, 5, 5, 5, 1

Финансовая компания имела вклады в 30 банках.

Среднее вкладов было равно 7 млн.р., а размер каждого вклада – целое число миллионов рублей, не превосходящее 40.

Решено было все вклады в 1 млн.р. закрыть, остальные вклады уменьшить вдвое, а высвободившиеся средства вложить в производство.

Найти наибольшее возможное значение среднего новых вкладов компании.

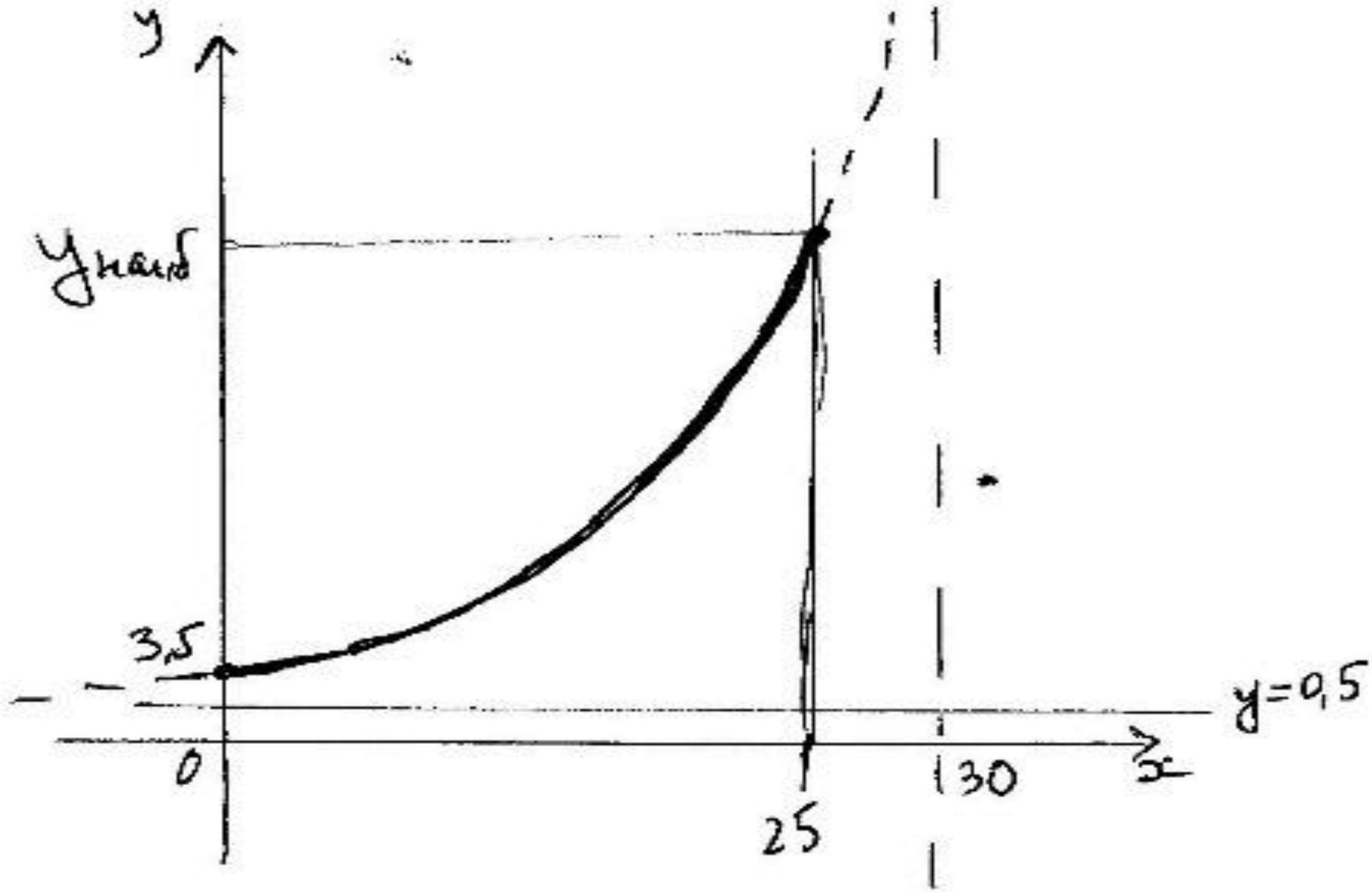
Финансовая компания имела вклады в 30 банках. Среднее вкладов было равно 7 млн.р., а размер каждого вклада – целое число миллионов рублей, не превосходящее 40. Решено было все вклады в 1 млн.р. закрыть, остальные вклады уменьшить вдвое, а высвободившиеся средства вложить в производство.
Найти наибольшее возможное значение среднего новых вкладов компании.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель. Для этого обозначим n количество вкладов в 1 млн.р. Все они будут закрыты. Остальные $30-n$ вкладов не меньше 2, все они будут уменьшены вдвое и составят набор новых вкладов.

Общая сумма вкладов была равна $30\cdot 7=210$. Она состояла из двух слагаемых. Во-первых, это сумма вкладов равных 1, она равна n. Во-вторых, это сумма чисел, больших 1, она, соответственно, равна $210-n$. По условию все числа не превосходят 40 и поэтому их сумма не больше $40(30-n)$. Получаем

$$210-n\le 40(30-n);\qquad 39n\le 1200-210;\qquad n\le\frac{990}{39}\approx 25{,}3.$$

В итоге, среднее $30-n$ новых вкладов, равно $\frac{1}{2}\cdot\frac{210-n}{30-n}$ и нужно найти наибольшее возможное значение функции $y=\frac{210-n}{2(30-n)}$, $n=0,1,2,\ldots,25$. График дробно-линейной функции $y=\frac{210-x}{2(30-x)}$ - это гипербола, $x=30$ - её вертикальная асимптота,



$$y_{наиб} = y(25) = \frac{210-25}{2(30-25)} = \frac{185}{10} = 18,5\,.$$

- **Сумма чисел равна произведению их среднего на количество этих чисел!!!**

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \cdot \overline{x}$$

В заключение, рассмотрим пример, решение которого в пункте а) наглядно показывает, как составление уравнения (математической модели) позволяет получить ответ, а решение в пункте б) и в) основано на графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств.

Пример 5 На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. а) Заранее неизвестно, сколько каких чисел имеется. Обозначим эти неизвестные:

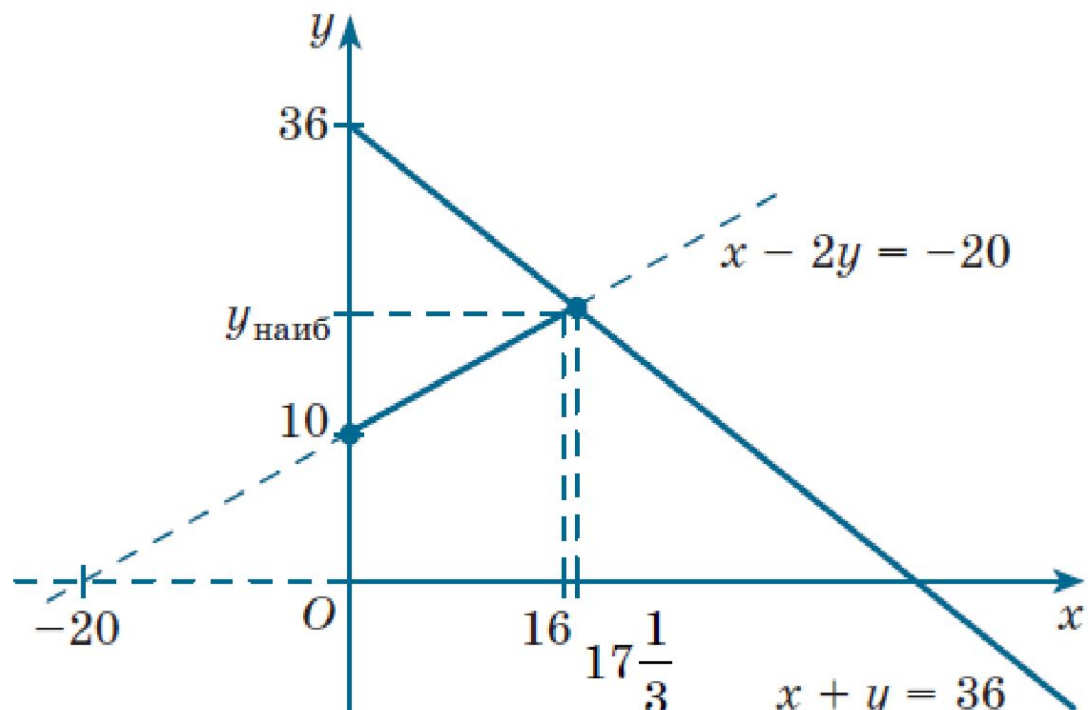
— положительных чисел — x, их сумма равна $9x$;
— отрицательных чисел — y, их сумма равна $-18y$;
— чисел, равных нулю — z, их сумма равна 0.

$$9x - 18y + 0 \cdot z = -5(x + y + z) \longrightarrow 9(x - 2y) = -5(x + y + z).$$

$$x + y + z = 36.$$

Пример 5 На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

б) $9(x - 2y) = -5 \cdot 36$; $x - 2y = -20$. Построим график уравнения $x - 2y = -20$. Это прямая, проходящая через точки $(0;\ 10)$ и $(-20;\ 0)$. Нам нужна её часть в первой четверти. Точнее, нужна часть, лежащая и в полуплоскости $x + y \leqslant 36$. Решая систему $\begin{cases} x - 2y = -20 \\ x + y = 36 \end{cases}$, находим, что это отрезок с концами в точках $(0;\ 10)$ и $\left(17\frac{1}{3}; 18\frac{2}{3}\right)$



Упражнения

32.1. Вычислите среднее следующих наборов чисел:

а) 1, 2, 3, 4, 5;
б) −1, 2, 3, 4, 5;
в) −1, −2, 3, 4, 5;
г) −1, −2, −3, 4, 5;
д) 1, −2, 3, −4, 5;
е) 1, −2, −3, −4, 5.

32.2. Вычислите среднее следующих наборов натуральных чисел:

а) от 1 до 5 включительно;
б) от 2 до 6 включительно;
в) от 3 до 12 включительно;
г) от 4 до 23 включительно;
д) все нечетные однозначные числа;
е) все простые однозначные числа.

32.3. Какое число следует включить в набор −3, 4, 5, 6 для того, чтобы среднее стало равняться:

а) −2; б) 0; в) 100; г) 1000; д) 2020; е) π?

32.10. В ряд, через запятые, произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.

а) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно одна единица?

б) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно две единицы?

в) Докажите, что среди 9 подряд идущих чисел всегда есть хотя бы три единицы.

г) Какое наименьшее количество единиц может быть среди всех выписанных чисел?

д) Докажите, что сумма всех 47 чисел не больше 83.

е) Приведите пример того, что сумма всех 47 чисел может равняться 83.

Разобьем первые 45 чисел на 5 групп по 9 подряд идущих чисел.
Количество единиц среди этих 45 чисел не меньше 3x5=15.

$$\overbrace{\underbrace{2,\ldots,2}_{6},1,1,1}^{9},\ \overbrace{\underbrace{2,\ldots,2}_{6},1,1,1}^{9},\ldots,\ \overbrace{\underbrace{2,\ldots,2}_{6},1,1,1}^{9},\ 2,2$$

32.10. В ряд, через запятые, произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.

д) Докажите, что сумма всех 47 чисел не больше 83.

Сумма первых 45 чисел не больше 15х5=75.

Рассмотрим последние 9 чисел. Их сумма также не больше 15.

Из них сумма первых 7 чисел не меньше 7.

Значит, сумма 46-го и 47-го числа не больше 8.

В итоге, общая сумма всех 47 чисел не больше, чем 75+8 = 83.

е) Приведите пример того, что сумма всех 47 чисел может равняться 83.

$$\overbrace{7,\underbrace{1,\ldots,1}_{8}}^{9},\ \overbrace{7,\underbrace{1,\ldots,1}_{8}}^{9},\ \ldots,\ \overbrace{7,\underbrace{1,\ldots,1}_{8}}^{9},\ 1,\ 7$$

~~Поэтому среднее арифметическое этих 47 чисел не больше, чем 83/47.~~

ЕГЭ-2019.

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета).

На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны.

Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39. а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек? б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек? в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Решение. Обозначим К - сумму "красных" чисел и С - сумму "синих" чисел. По условию

К + С = 40х14 и К +3С = 40х39. Значит С = 20(39-14)=500, К = 560 - 500 = 60.

а) Ответ "да". Пример - 30 красных чисел по 2 и 10 синих попарно различных чисел, сумма которых равна 500:

49 и 51, 48 и 52, 47 и 53, 46 и 54, 45 и 55.

в) Ответ: 26. Допустим, что синих чисел 27 или больше. Тогда красных чисел 13 или меньше и их среднее больше или равно 60:13 = 4,61…

Значит, наибольшее из них - это 5 или больше, а наименьшее из синих чисел - это 6 или больше. Значит сумма попарно различных синих чисел не меньше, чем

$$\underbrace{6+7+8+\ldots+35+32}_{27}=27\cdot\frac{6+32}{2}=27\cdot 19=513>500$$

Противоречие, т.е. синих чисел не больше 26.

Ровно 26 их может быть: надо из предыдущей "синей" суммы убрать слагаемое 13 и взять любые 14 красных чисел с суммой 60; например 10 штук по 5 и еще 1,2,3,4.

б) Ответ "нет" следует из в) - красных чисел всегда 14 или больше.

ЕГЭ-2015.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15 произвольно делят на три группы (в каждой группе есть хотя бы одно число). Затем вычисляют средние значения чисел в каждой из групп.

1) Могут ли все три средних значения быть одинаковыми?

2) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трех средних значений.

3) То же, что и в 2), но для набора 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16?

НА СКОЛЬКО РАЗЛИЧАЮТСЯ СРЕДНЕЕ И МЕДИАНА?

Математика в школе **5** / 2015

ЕГЭ-2014.

Из 40 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, …, 79 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A — четвёртое по величине среди этих чисел, а B — среднее арифметическое выбранных семи чисел.

а) Может ли $B - A$ равняться $\frac{2}{7}$?

б) Может ли $B - A$ равняться $\frac{3}{7}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B - A$.

«ГОЛОС» И ЗАДАЧИ ПРО МИНИМАКС

Математика в школе **2** / 2016