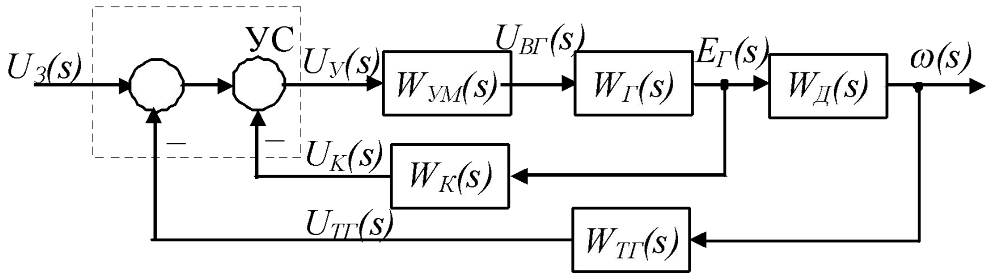
Алгебра передаточных функций

Часто САУ можно рассматривать как комбинацию динамических звеньев с определенными типовыми или не типовыми передаточными функциями.

Преимущество передаточной функции заключается в том, что она позволяет изобразить причинно-следственную связь между переменными в наглядной схематической форме.

Изображение системы регулирования в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними носит название структурной схемы.



Структурная схема САР

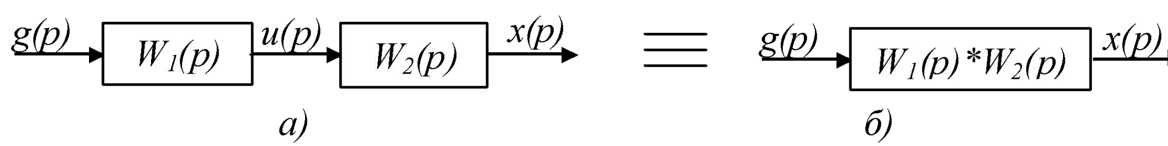
1. Последовательно соединение звеньев.

Эквивалентная ПФ $W_0(p)$ последовательно соединенных звеньев с ПФ $W_1(p)$ и $W_2(p)$ равна произведению этих ПФ:

$$W_0(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$$

Доказательство. Для структурной схемы справедливы уравнения в изображениях Лапласа:

$$\begin{cases} u(p) = W_1(p) g(p); \\ x(p) = W_2(p) u(p). \end{cases}$$



Эквивалентное преобразование последовательного соединения звеньев

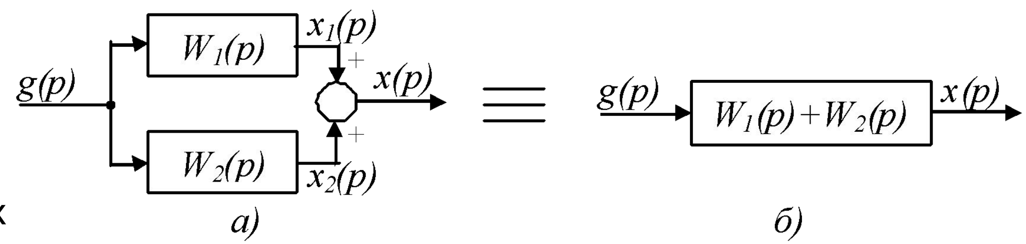
Подставив первое уравнение во второе, получим: $x(p) = W_2(p) W_1(p) g(p) = W_0(p) g(p)$

Алгебра передаточных функций

2. Параллельное соединение звеньев.

Эквивалентная ПФ $W_0(p)$ параллельно соединенных звеньев с ПФ $W_1(p)$ и $W_2(p)$ равна сумме этих ПФ:

$$\boxed{W_0(p) = W_1(p) + W_2(p)}$$



Эквивалентное преобразование параллельного соединения звеньев

Доказательство. Для структурной схемы справедливы уравнения в изображениях Лапласа:

$$\begin{cases} x_1(p) = W_1(p)g(p); \\ x_2(p) = W_2(p)g(p); \\ x(p) = x_1(p) + x_2(p). \end{cases}$$

Подставив первые два уравнения в третье, получим:

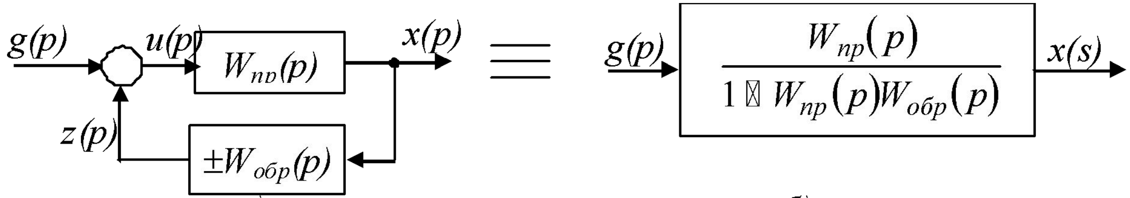
$$x(p) = W_1(p)g(p) + W_2(p)g(p) = [W_1(p) + W_2(p)]g(p) = W_0(p)g(p)$$

Алгебра передаточных функций

3. Передаточная функция цепи, охваченной обратной связью.

Эквивалентная ПФ $W_0(p)$ цепи (прямой части САР) с ПФ $W_{пр}(p)$, охваченной обратной связью с ПФ $\pm W_{обр}(p)$ (положительной или отрицательной) равна:

$$W_0(p)=\frac{W_{пр}(p)}{1\mp W_{пр}(p)W_{обр}(p)}$$



а) б)

Эквивалентное преобразование цепи, охваченной обратной связью

Доказательство. Система уравнений для структурной схемы имеет вид:

$$\begin{cases} u(p)=g(p)+z(p); \\ x(p)=W_{пр}(p)u(p); \\ z(p)=\pm W_{обр}(p)x(p). \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим: $u(p)=\frac{1}{W_{пр}(p)}x(p)$

Теперь это выражение и третье уравнение системы подставим в первое уравнение:

$$\frac{1}{W_{пр}(p)}x(p)=g(p)\pm W_{обр}(p)x(p)$$

Последовательно преобразуем это уравнение:

$$\left[\frac{1}{W_{пр}(p)}\mp W_{обр}(p)\right]x(p)=g(p)$$

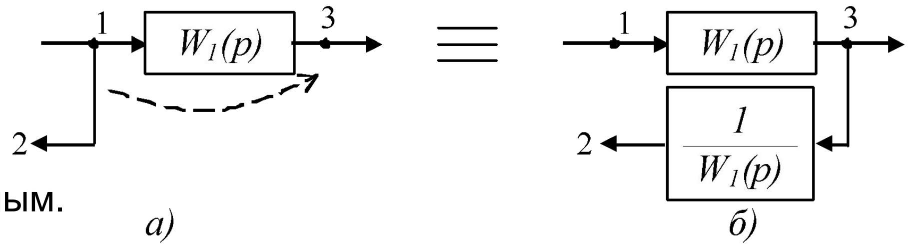
$$\left[1\mp W_{пр}(p)W_{обр}(p)\right]x(p)=W_{пр}(p)g(p)$$

$$\frac{x(p)}{g(p)}=\frac{W_{пр}(p)}{1\mp W_{пр}(p)W_{обр}(p)}=W_0(p)$$

Алгебра передаточных функций

4. Перенос точки съёма воздействия.

а) перенос вперед (с входа звена на выход).



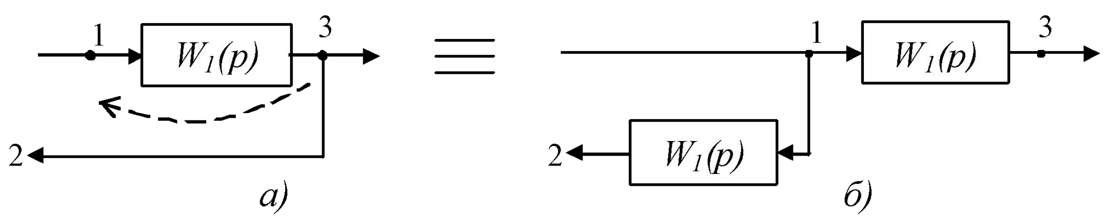
Перенос точки съема сигнала на звено вперед

Перенос точки разветвления должен быть эквивалентным. Переход из точки 1 в точку 2 (рис. а), очевидно, происходит с ПФ (коэффициентом), равной 1.

Если просто перенести точку съема из 1 в 3, то получится, что теперь в точку 2 сигнал будет переходить с коэффициентом $W_1(p)$. Для компенсации этого необходимо поставить звено с обратной ПФ (рис. б).

б) перенос назад (с выхода звена на вход).

Эквивалентный перенос из точки 3 в точку 1 (рис. а) выполняется из тех же соображений, что и перенос вперед.

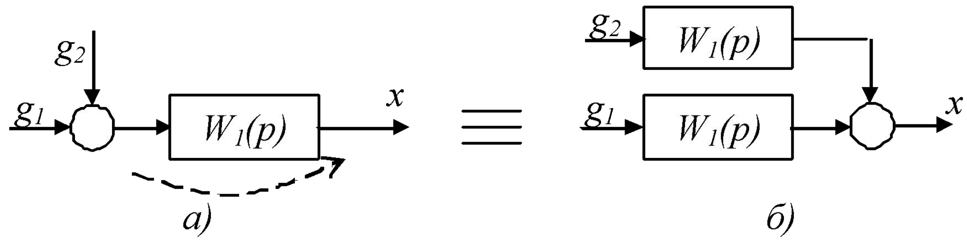


Перенос точки съема сигнала на звено назад

Алгебра передаточных функций

5. Перенос точки приложения воздействия (перенос сумматора).

а) перенос вперед (с входа звена на выход).

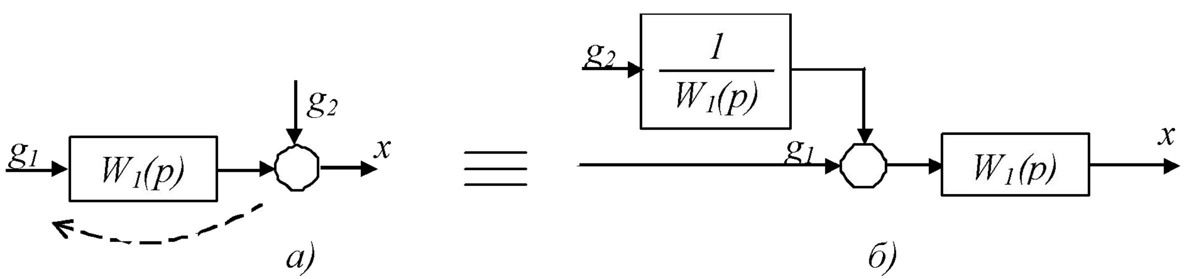


Перенос сумматора на звено вперед

Этот перенос также основан на принципе эквивалентности. В схеме (рис.а) выходной сигнал x формируется в результате передачи суммы сигналов g_1+g_2 с ПФ $W_1(p)$. Если просто перенести сумматор через звено, окажется, что воздействие g_2 будет передаваться с коэффициентом единица. Для коррекции этого в канале передачи воздействия g_2 следует установить звено с ПФ $W_1(p)$ (рис.б).

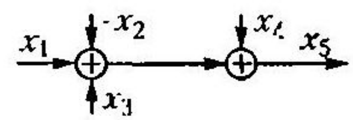
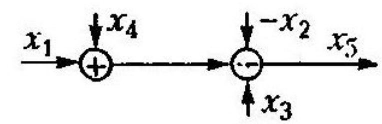
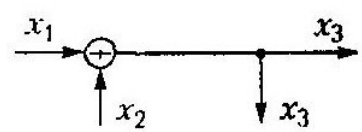
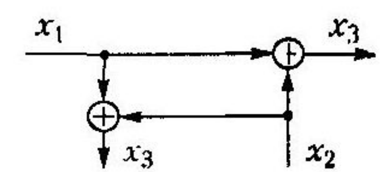
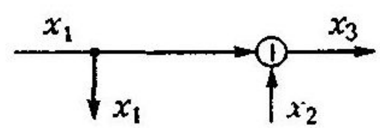
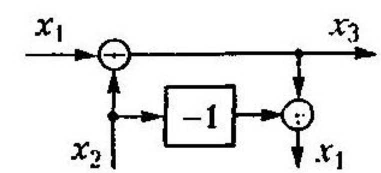
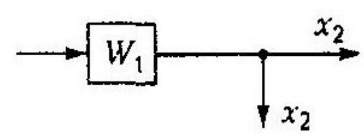
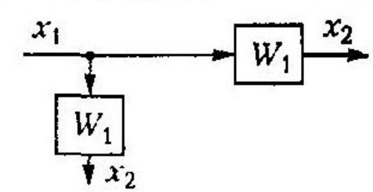
Правильность такого преобразования подтверждается тем, что математические описания схем рис. а и б совершенно идентичны.

б) перенос назад (с выхода звена на вход).

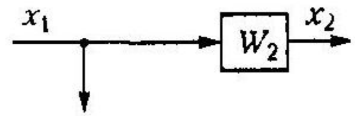
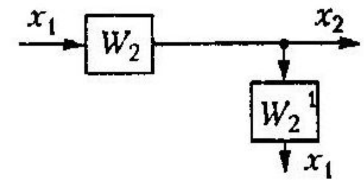
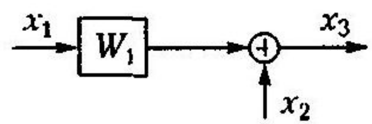
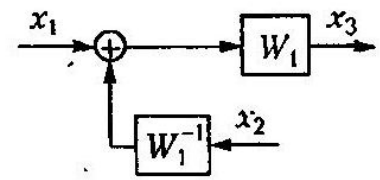
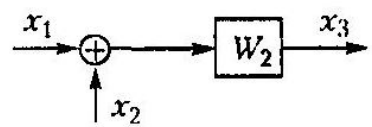
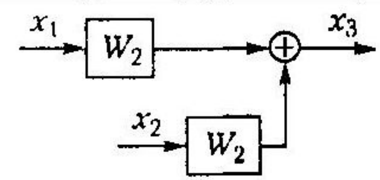
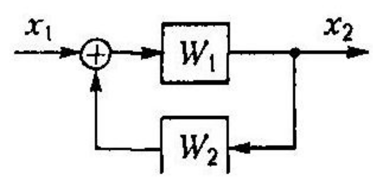
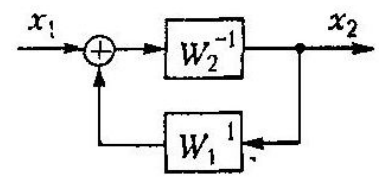
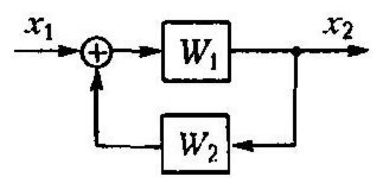
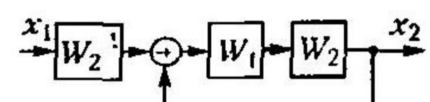


Перенос сумматора на звено назад

Алгебра передаточных функций

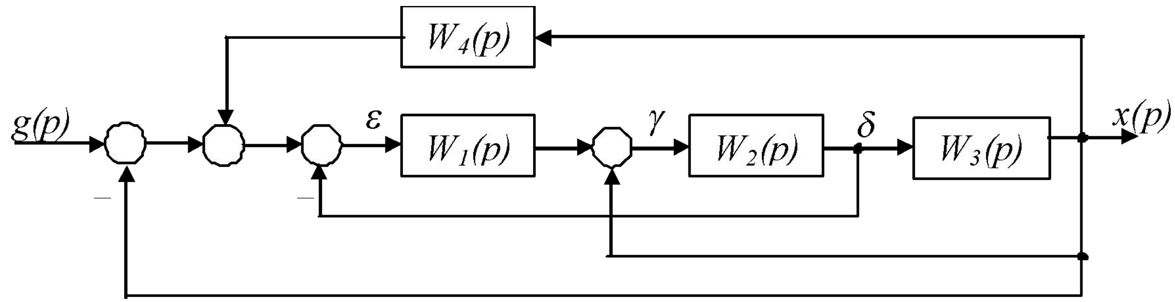
Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка сумматоров или элементов сравнения	 $x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$	 $x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$
Перестановка звеньев		
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		

Алгебра передаточных функций

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перенос узла с входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Перенос сумматора с входа на выход звена		
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Переход к единичной обратной связи		

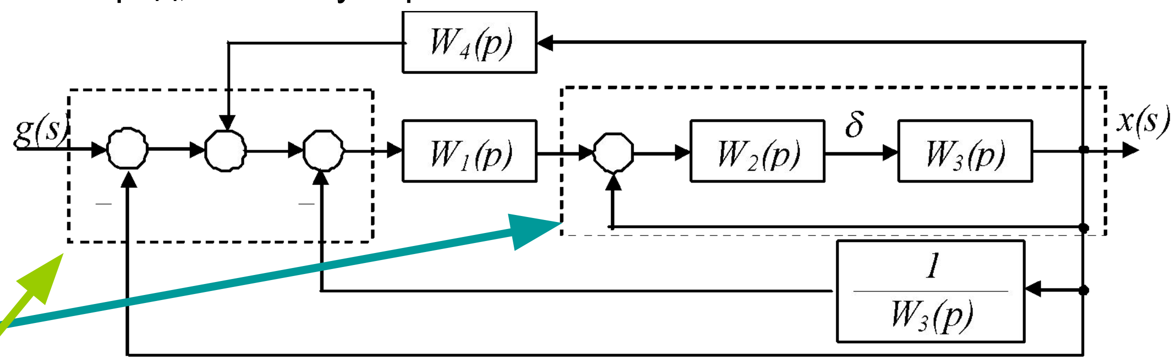
Алгебра передаточных функций

Пример.   Найти ПФ САР:



Решение.

Переносим точку съема сигнала δ на звено вперед, используя правило 4а.



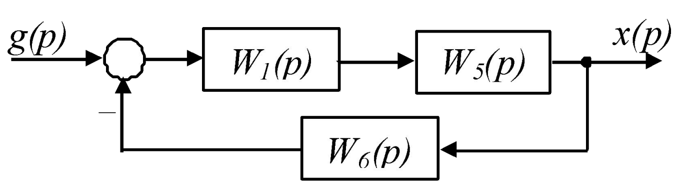
Для выделенной за блоком $W_1(p)$ части схемы находим эквивалентную ПФ, используя правило 3 для цепи, охваченной положительной обратной связью:

$$W_5(p) = \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 - W_2(p)W_3(p)}$$

На три сумматора в начальной части схемы параллельно приходит один и тот же сигнал, но с разными ПФ. Используя правило 2, находим общую ПФ ветви отрицательной обратной связи:

$$W_6(p) = 1 + \frac{1}{W_3(p)} - W_4(p)$$

Теперь структурную схему можно представить в виде:



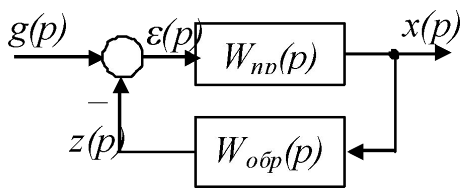
Определяем результирующую ПФ, используя правило 3:

$$W_0(p) = \frac{W_1(p)W_5(p)}{1 + W_1(p)W_5(p)W_6(p)}$$

Алгебра передаточных функций

Передаточные функции разомкнутых и замкнутых САР

Современные регулируемые ЭП, обладающие высококачественными динамическими и статическими характеристиками, строятся с использованием отрицательной обратной связи (ОС), т.е. работают по замкнутому циклу.
Рассмотрим обобщенную схему такой САР, состоящую из прямой ветви, охваченной отрицательной ОС.



g(p) – входное воздействие;
x(p) – выходная переменная;
z(p) – сигнал ОС;
ε(p) – ошибка.

САР с отрицательной ОС.

Передаточная функция замкнутой САР определяется по правилу 3 преобразования структурных схем:

$$W_{\text{ЗСАР}}(p) = K_0(p) = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 + W_{\text{пр}}(p) W_{\text{ос}}(p)}$$

$W_{\text{пр}}(p)$ – ПФ прямой части САР, связывающая вход с интересующим нас выходом;

$W_{\text{ос}}(p)$ – ПФ цепи ОС.

При обозначении ПФ замкнутых систем вместо символа *W* используется символ *K*.

Смысл ПФ замкнутой САР в том, что она показывает, как входной сигнал *g(p)* преобразуется в выходной *x(p)*:

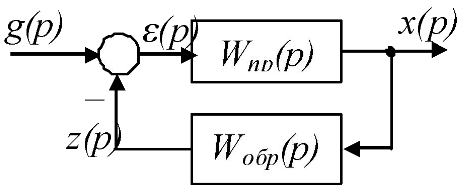
$$x(p) = K_0(p) g(p)$$

Алгебра передаточных функций

Передаточные функции разомкнутых и замкнутых САР

Передаточная функция разомкнутой САР получается после размыкания замкнутой САР в произвольном месте, и рассмотрения образовавшегося разомкнутого контура как последовательного соединения звеньев, не учитывая знак сумматора. Таким образом, используя правило 1, ПФ разомкнутой САР запишем в виде:

$$W_{PCAP}(p) = W_0(p) = W_{np}(p) W_{oc}(p)$$



g(p) – входное воздействие;
x(p) – выходная переменная;
z(p) – сигнал ОС;
ε(p) – ошибка.

САР с отрицательной ОС.

Смысл ПФ разомкнутой САР в том, что она показывает, как сигнал ошибки *ε(p)* преобразуется в сигнал обратной связи *z(p)*.

1. ПФ разомкнутой САР $W(p)$ не зависит от места размыкания САР.
2. Неправильно считать, что ПФ разомкнутой САР равна ПФ САР, полученной после отбрасывания цепи ОС.
3. ПФ разомкнутой САР совпадает с ПФ прямой части САР только в одном случае, когда $W_{oc}(p) = 1$.

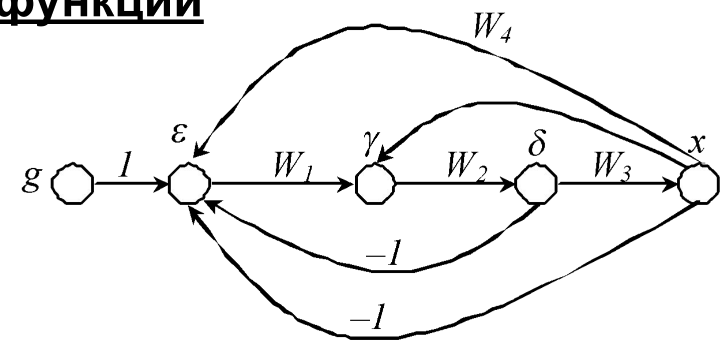
Связь между ПФ разомкнутой и замкнутой САР выражается следующей формулой:

$$K_0(p) = \frac{W_{np}(p)}{1 + W_0(p)}$$

то есть, *ПФ цепи, замкнутой отрицательной ОС, равна ПФ прямой части, разделенной на ПФ разомкнутой САР, увеличенную на единицу.*

В редких случаях, когда ОС положительная, в знаменателе ПФ замкнутой САР символ "+" меняется на "–".

Алгебра передаточных функций



Понятие о графе САР.

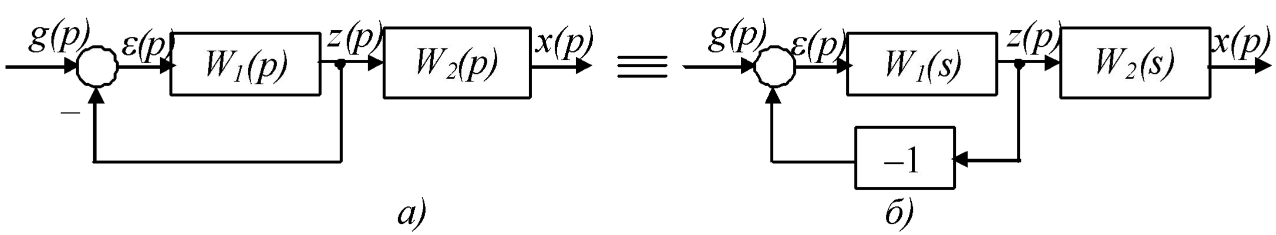
Граф САР, изображенной ранее.

Правило Мейсона (Мезона)

Это правило позволяет определить ПФ сколь угодно сложной замкнутой САР, не прибегая к преобразованию ее структурной схемы. Для его формулирования введем следующие определения:

Путем между двумя координатами (*простым* или *прямым путем*) называется последовательность линий и звеньев между этими двумя координатами такая, что каждое звено и каждая промежуточная координата встречаются только один раз. Передаточная функция пути равна произведению ПФ звеньев, встречающихся на этом пути.

Контур – это замкнутый путь. Другими словами – это такой путь, когда входная и выходная координаты совпадают. Передаточная функция замкнутого контура равна произведению ПФ звеньев, входящих в него, с учетом знаков сумматоров (если сигнал поступает на вход "+", ПФ сумматора равна единице, если на "–" – то –1.



В схеме присутствует один прямой путь – $g(p) \to x(p)$ – с ПФ $W_П(p) = W_1(p)W_2(p)$,
и также один замкнутый контур – $\varepsilon(p) \to \varepsilon(p)$ – с ПФ $W_K(p) = -W_1(p)$
где наличие знака "минус" понятно из эквивалентной схемы.

Алгебра передаточных функций

Правило Мейсона гласит:

Передаточная функция САР относительно каких либо входа *g* и выхода *x* может быть определена по формуле:

$$K_{g\to x}(p)=\frac{x(p)}{g(p)}=\frac{\sum_{i=1}^{m} W_{\Pi i}\Delta_i}{\Delta}$$

$W_{\Pi i}$ – ПФ *i*-го прямого пути;

m – число прямых путей;

Δ - главный определитель, вычисляемый по правилу:

$$\Delta=1-\sum_j W_{Kj}+\sum_{j,k} W_{Kj}W_{Kk}-\sum_{j,k,l} W_{Kj}W_{Kk}W_{Kl}+\ldots$$

$\sum_j W_{Kj}$ – сумма ПФ всех замкнутых контуров структурной схемы;

$\sum_{j,k} W_{Kj}W_{Kk}$ – сумма произведений всех пар контуров, которые не касаются друг друга (не имеют общих звеньев);

$\sum_{j,k,l} W_{Kj}W_{Kk}W_{Kl}$ – сумма произведений всех троек контуров, которые не касаются друг друга;

Δ_i – определитель *i*-го прямого пути (*определитель подграфа i-го прямого пути*), который вычисляется по тому же правилу, что и главных определитель Δ,

но с учетом того, что учитываемые контуры, пары контуров, тройки контуров и т.д. не должны касаться *i*-го прямого пути. В частном случае, когда все контуры касаются *i*-го пути, $\Delta_i=1$

Алгебра передаточных функций

Пример 1. Найти ПФ от входа к выходу по правилу Мейсона.

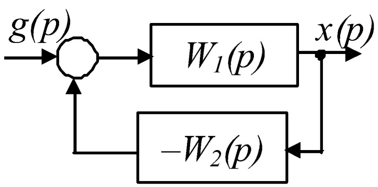


Схема содержит один прямой путь с ПФ $W_П=W_1$, и один контур с ПФ $W_K= -W_1W_2$. Тогда $\Delta_1 = 1$, а $\Delta = 1 - W_K = 1 + W_1W_2$.

Следовательно, искомая ПФ равна

$$K(p) = \frac{W_П \Delta_1}{\Delta} = \frac{W_1}{1 + W_1W_2}$$

Пример 2.

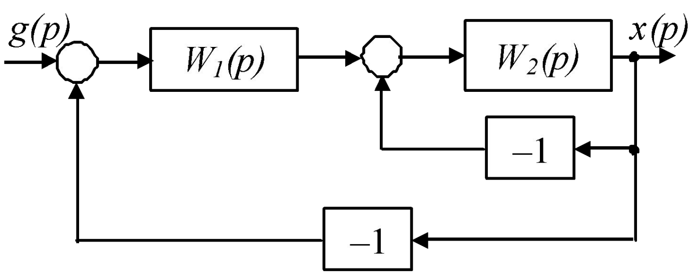


Схема содержит один прямой путь с ПФ $W_П=W_1W_2$, и два контура с ПФ $W_{K1}= -W_1W_2$ (внешний) и $W_{K2}= -W_2$ (внутренний), которые соприкасаются между собой (через звено W_2), а также касаются прямого пути.

$\Delta_1 = 1$

$$\Delta = 1 - (W_{K1} + W_{K2}) = 1 - (-W_1W_2 - W_2) = 1 + W_2 + W_1W_2$$

$$K(s) = \frac{W_П \Delta_1}{\Delta} = \frac{W_1W_2}{1 + W_2 + W_1W_2}$$

Пример 3.

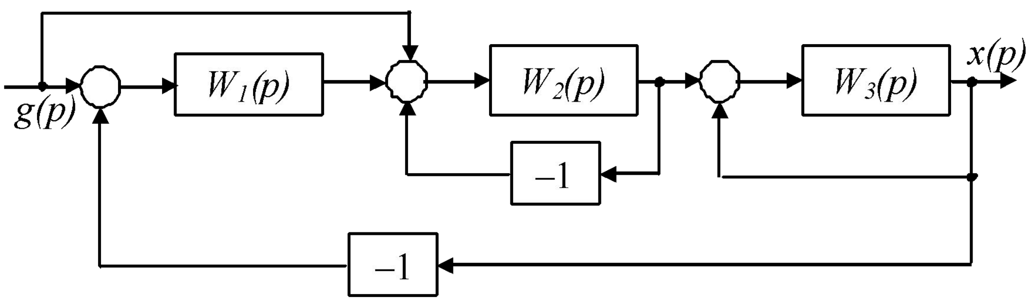


Схема содержит два прямых пути с ПФ $W_{П1}=W_1W_2W_3$ и $W_{П2}=W_2W_3$, и три контура с ПФ $W_{K1}= -W_2$, $W_{K2}=W_3$ (внутренние) и $W_{K3}= -W_1W_2W_3$ (внешний). Все контуры касаются обоих прямых путей. Два контура – W_{K1} и W_{K2} – не касаются друг друга.

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1$

$$\Delta = 1 - (W_{K1} + W_{K2} + W_{K3}) + W_{K1}W_{K2}$$

$$K(s) = \frac{W_{П1}\Delta_1 + W_{П2}\Delta_2}{\Delta} = \frac{W_1W_2W_3 + W_2W_3}{1 + W_2 - W_3 + W_1W_2W_3 - W_2W_3}$$