

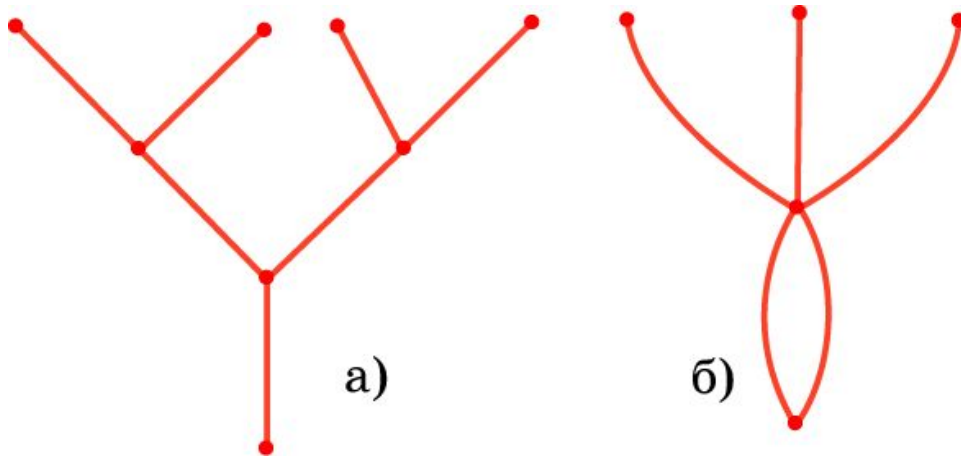
# Определение графа

Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется **плоским графом**, или просто **графом**. Точки называются **вершинами**, а отрезки – ребрами графа.

Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа.

Граф называется **простым**, если его ребра не пересекаются, т.е. не имеют общих внутренних точек.

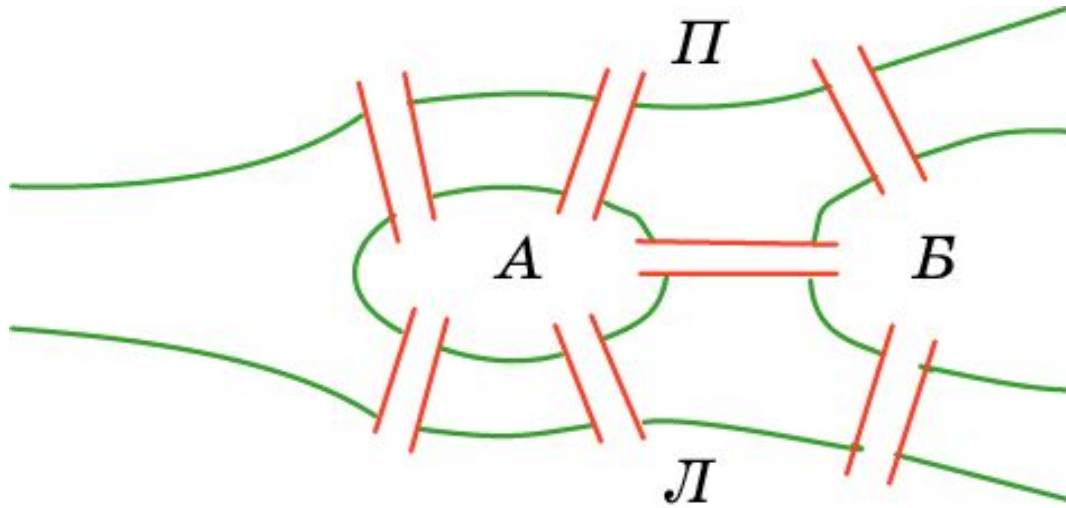
Вместо отрезков в качестве ребер графов рассматриваются также кривые линии.



# Задача Эйлера

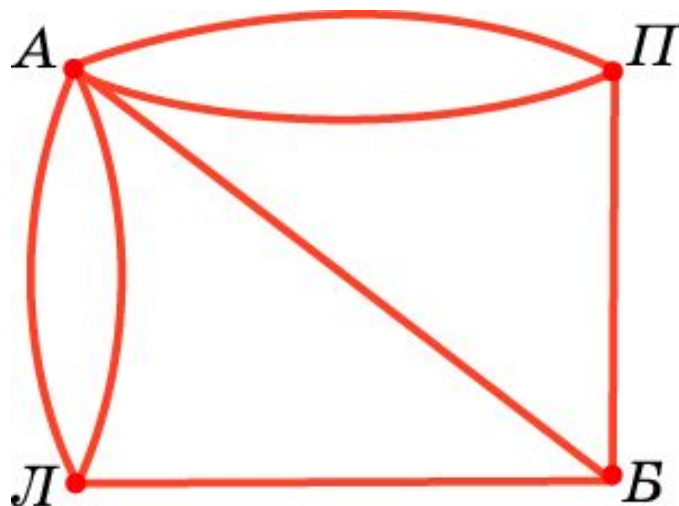
Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

**Задача.** В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?



# Уникурсальные графы

На рисунке представлен граф, соответствующий задаче Эйлера, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – берегам и островам.



Требуется выяснить, можно ли нарисовать этот граф «одним росчерком», т.е. не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз. Такие графы называются **уникурсальными**.

# Теорема Эйлера

**Индексом** вершины графа называется число ребер, сходящихся в этой вершине (ребра, с началом и концом в данной вершине считаются дважды).

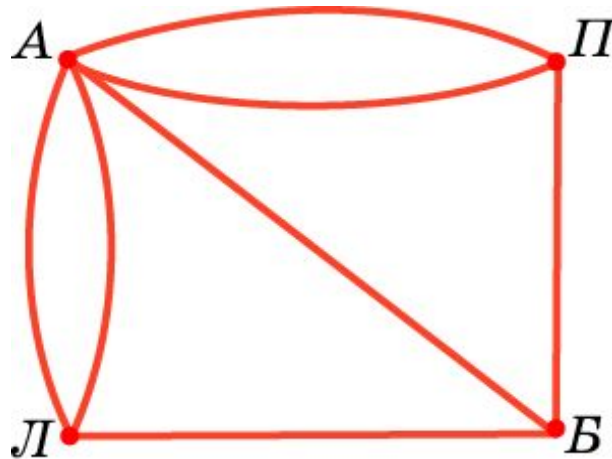
**Теорема.** Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

**Доказательство.** Если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют четный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечетного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет.

**Верно и обратное:** Если у связного графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум, то он является уникурсальным.

# Решение задачи Эйлера

**Решение задачи Эйлера.** Найдем индексы вершин графа задачи Эйлера. Вершина А имеет индекс 5, Б - 3, П - 3 и Л - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Значит, нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.



# Вопрос 1

Какая фигура называется графом?

**Ответ:** Графом называется фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек.

## Вопрос 2

Какой граф называется уникурсальным?

**Ответ:** Граф называется уникурсальным, если его можно ли нарисовать «одним росчерком», т.е. не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз.

## Вопрос 3

Что называется индексом вершины графа?

**Ответ:** Индексом вершины графа называется число ребер, сходящихся в этой вершине (ребра, с началом и концом в данной вершине считаются дважды).



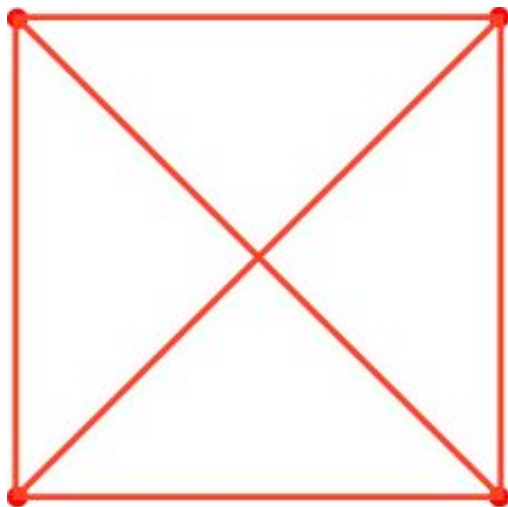
## Вопрос 4

Что можно сказать об индексах вершин уникурсального графа?

**Ответ:** Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

## Упражнение 1

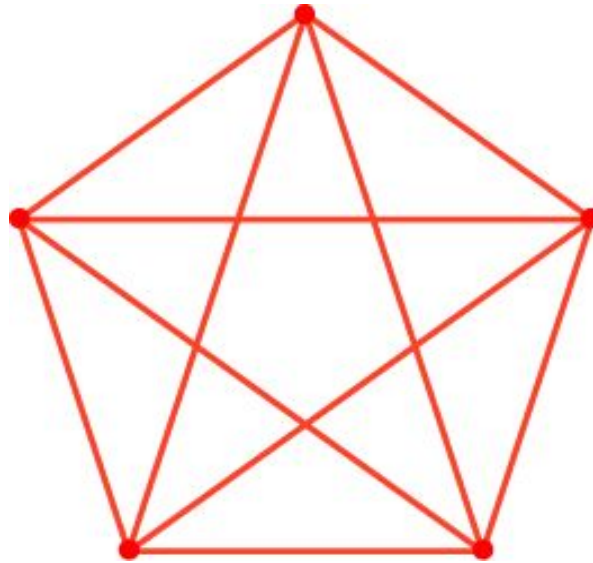
В графе 4 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 6.

## Упражнение 2

В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



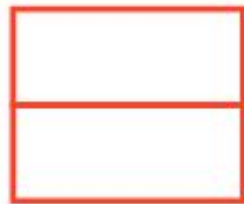
Ответ: 10.

## Упражнение 3

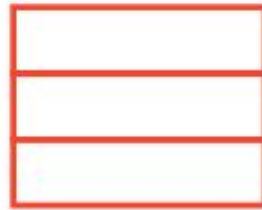
Выясните, какие графы, изображенные на рисунке, являются уникарсальными?



а)



б)



в)



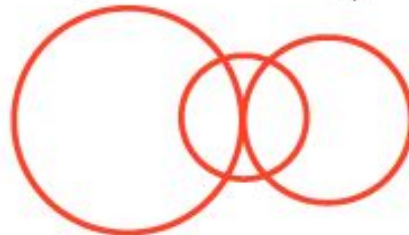
г)



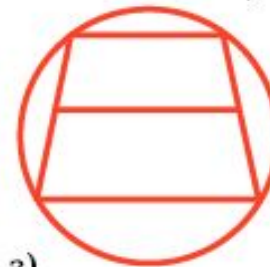
д)



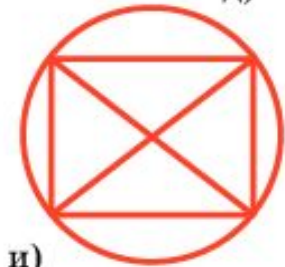
е)



ж)



з)



и)

**Ответ:** а), б), г), д), ж), з).

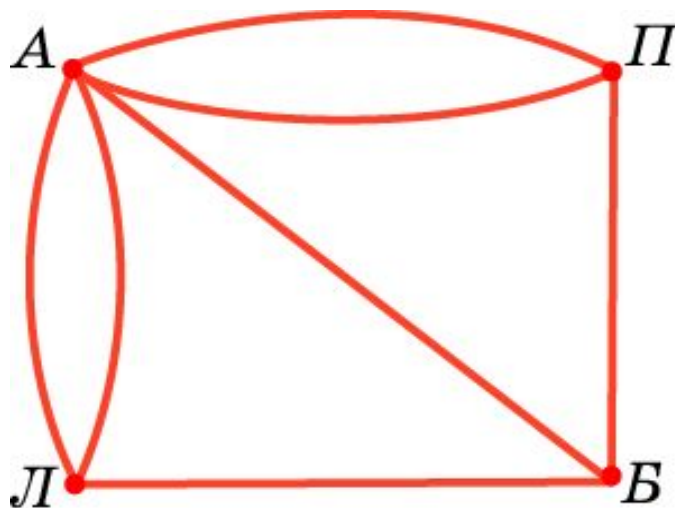
## Упражнение 4

Может ли граф иметь: а) одну вершину нечетного индекса; б) две вершины нечетного индекса; в) три вершины нечетного индекса; г) четыре вершины нечетного индекса?

**Ответ:** а), в) Нет; б), г) да.

## Упражнение 5

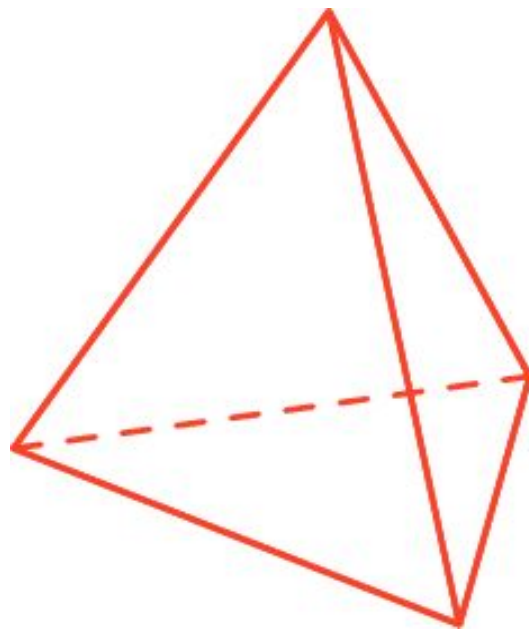
Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придется пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?



Ответ: Два.

## Упражнение 6

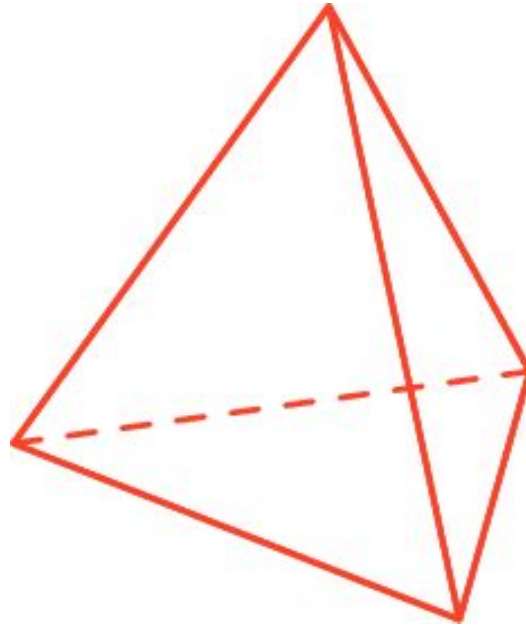
Можно ли обойти все ребра тетраэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



**Ответ:** Нет.

## Упражнение 7

Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра тетраэдра?

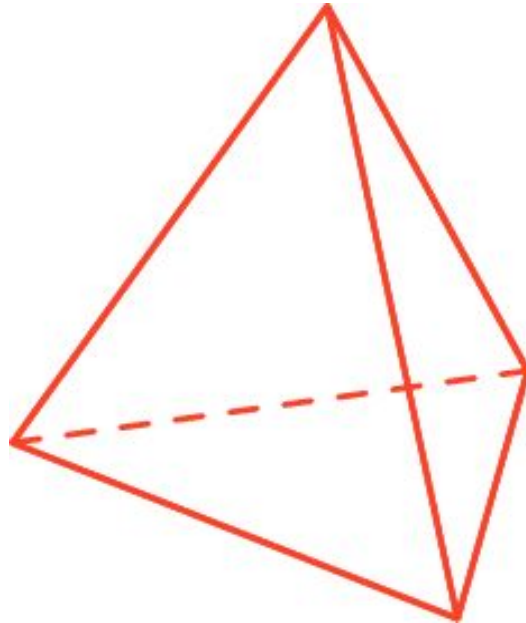


**Ответ:** Одно.



## Упражнение 8

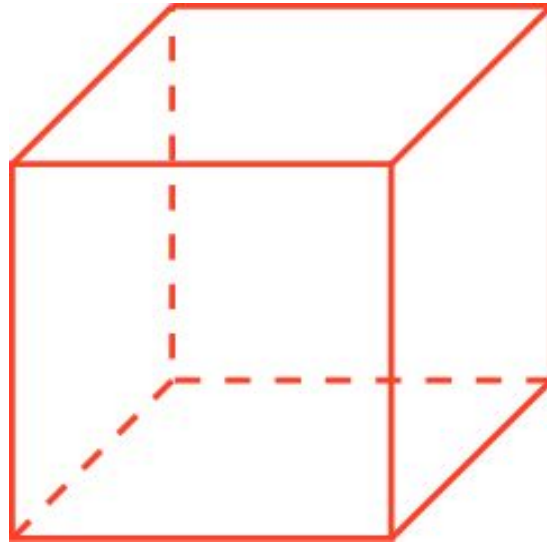
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра тетраэдра и вернуться в исходную вершину?



**Ответ:** Два.

## Упражнение 9

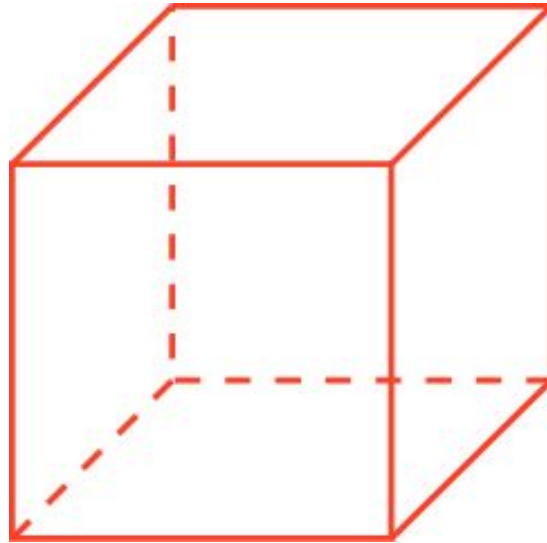
Можно ли обойти все ребра куба, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



**Ответ:** Нет.

## Упражнение 10

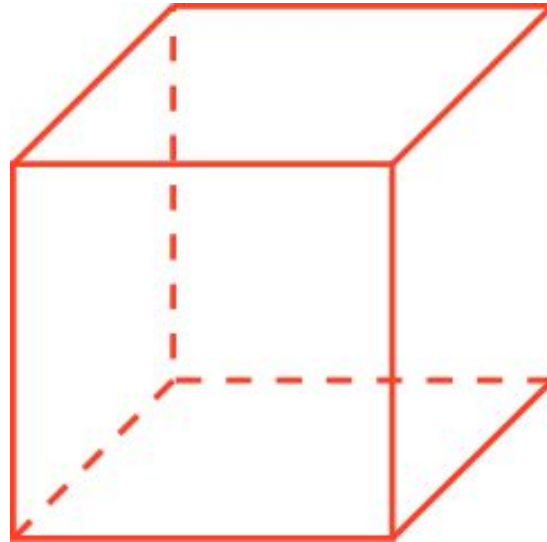
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра куба?



Ответ: Три.

## Упражнение 11

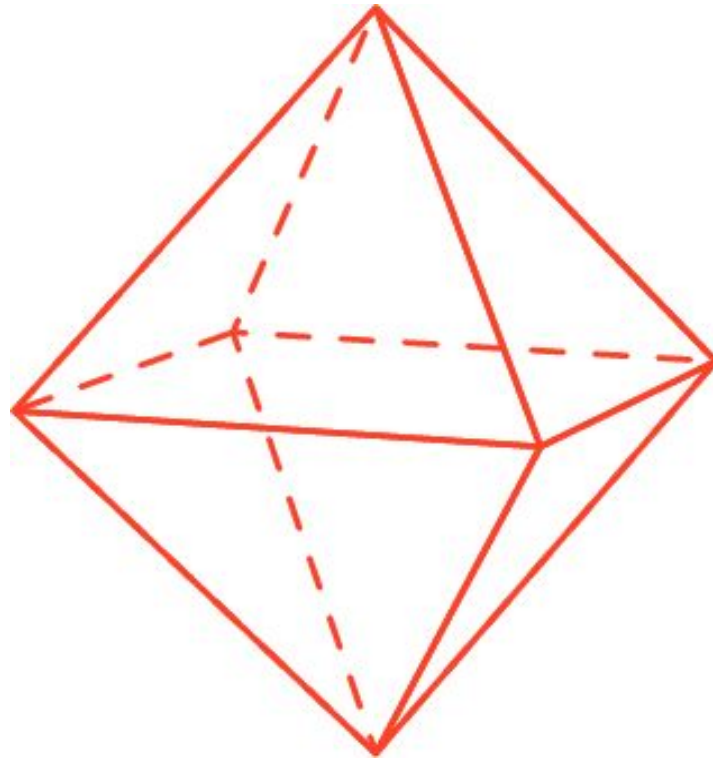
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра куба и вернуться в исходную вершину?



**Ответ:** Четыре.

## Упражнение 12

Можно ли обойти все ребра октаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Да.

## Упражнение 13

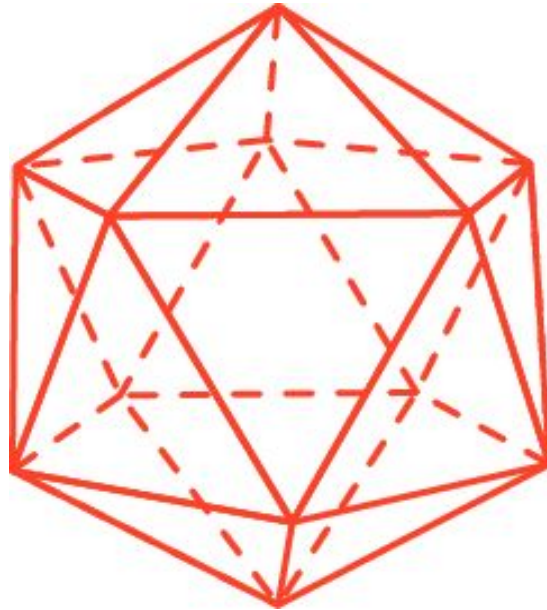
Можно ли обойти все ребра икосаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Нет.

## Упражнение 14

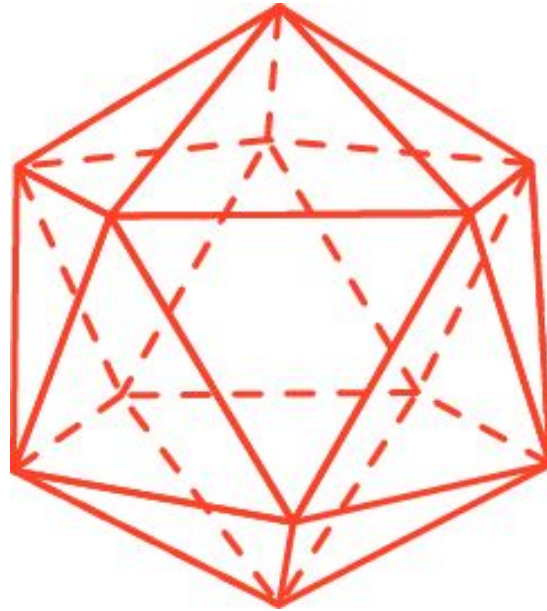
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра икосаэдра?



**Ответ:** Пять.

## Упражнение 15

Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра икосаэдра и вернуться в исходную вершину?

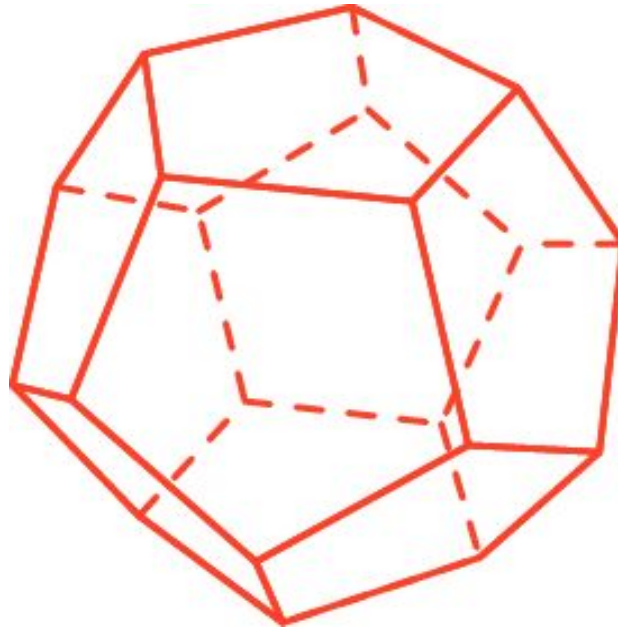


**Ответ:** Шесть.



## Упражнение 16

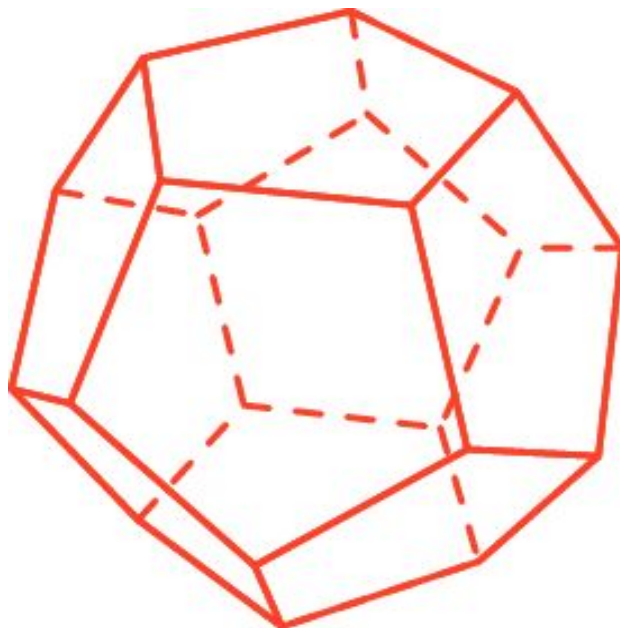
Можно ли обойти все ребра додекаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



**Ответ:** Нет.

## Упражнение 17

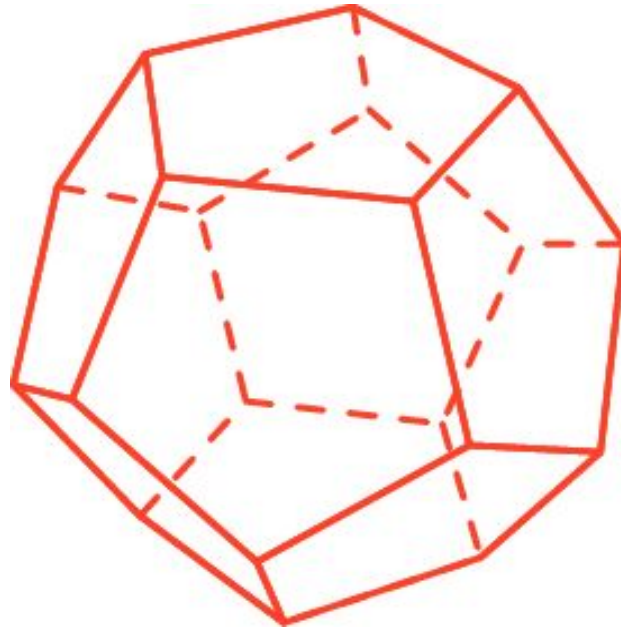
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра додекаэдра?



**Ответ:** Девять.

## Упражнение 18

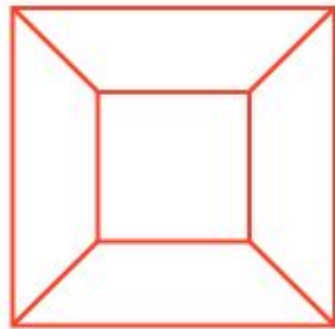
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра додекаэдра и вернуться в исходную вершину?



**Ответ:** Десять.

## Упражнение 19

Каким правильным многогранникам соответствуют графы, изображенные на рисунке?



а)



б)



в)



г)

**Ответ:** а) куб; б) октаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр.