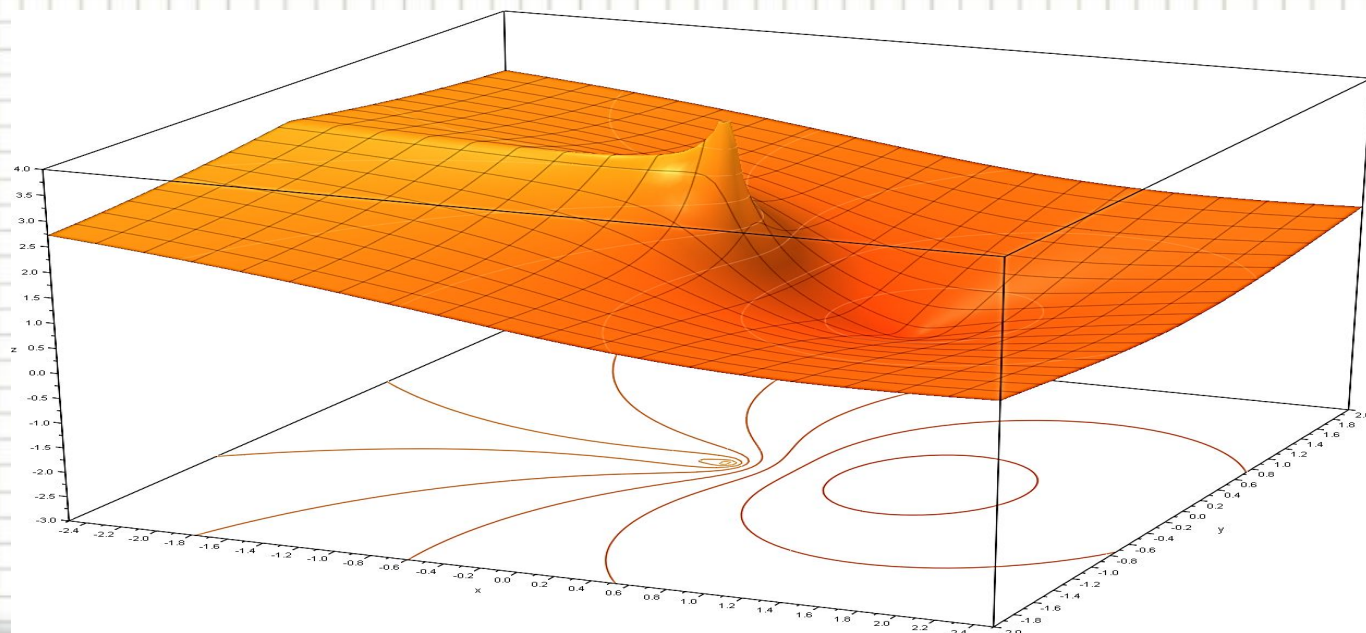


Комплексные числа

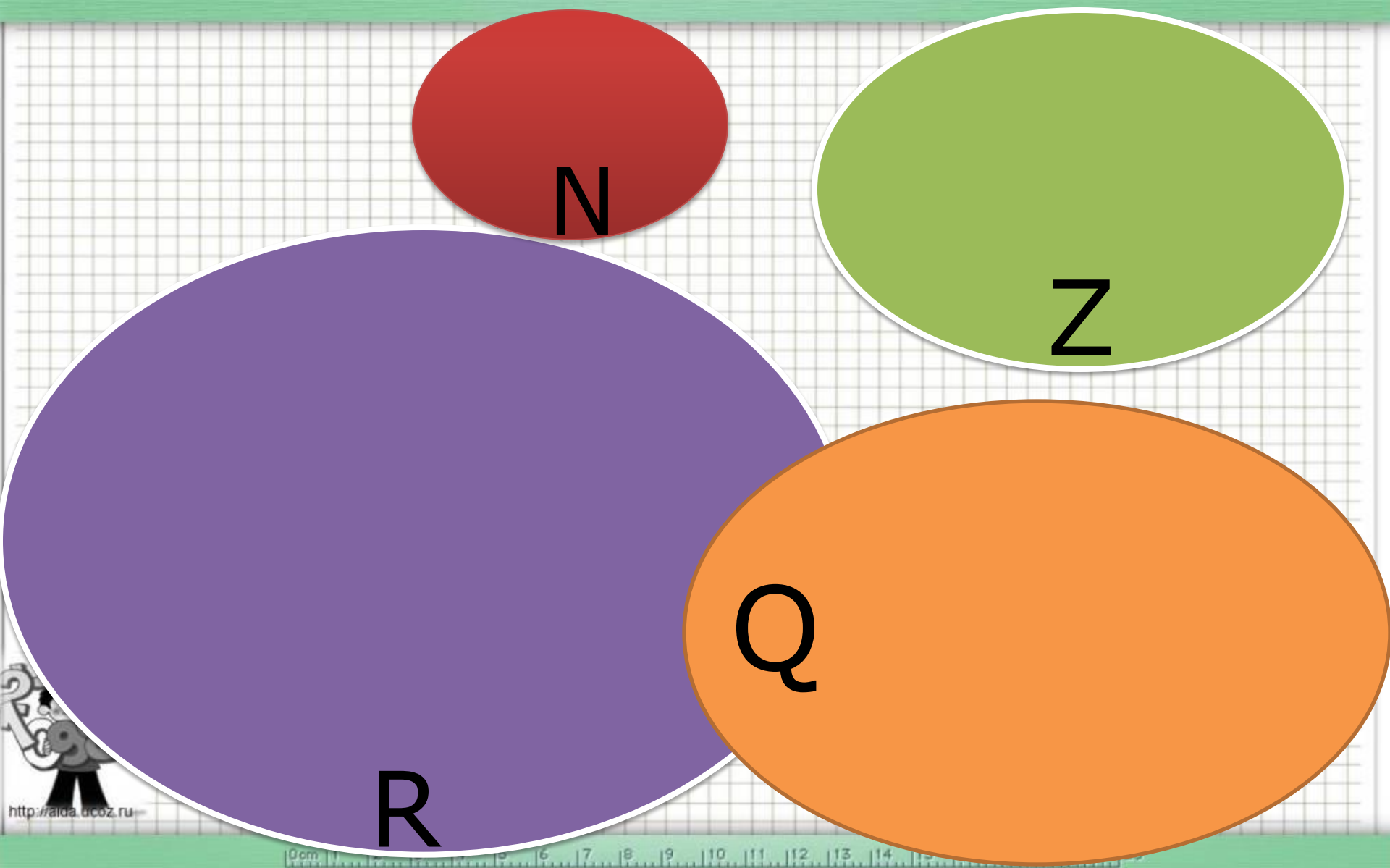


*Числа не управляют миром,
но показывают, как
управляется мир*

И. Гёте



Числовые множества





$$x^2 = 2$$



$$x = \pm\sqrt{2}$$



$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$



Нет решения в R



Решите уравнения:

• Вариант I

• Вариант II

$$x^2 + 1 = 0 \quad x^2 + 9 = 0$$

нет

во множестве действительных чисел!!!!



$$x^2 = -1$$

i – мнимая единица

$$i^2 = -1$$

$$x^2 = i^2 \Rightarrow x = i$$



$$z = a + bi$$

действительная
часть

мнимая
часть

a, b – любые действительные числа

Если $a = 0$, то число $i b$ называется чисто мнимым.

Если $b = 0$, то получается действительное число a .



Множество комплексных чисел

$$z_1 = 3 + 2i$$

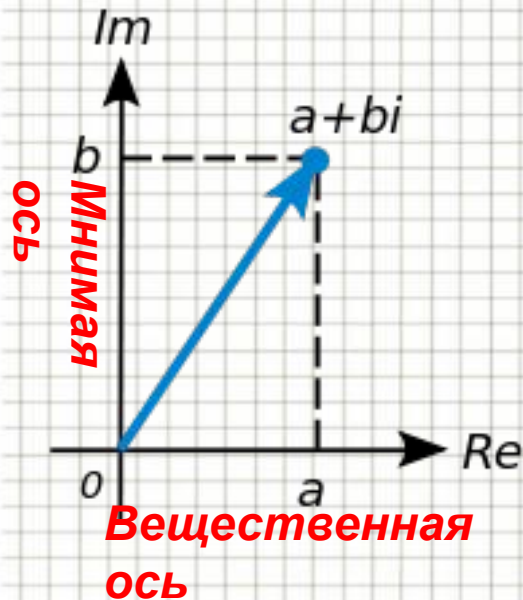
$$z_2 = -2 + i$$

$$z_3 = 1 - 2i$$

C



Геометрическое изображение комплексных чисел.



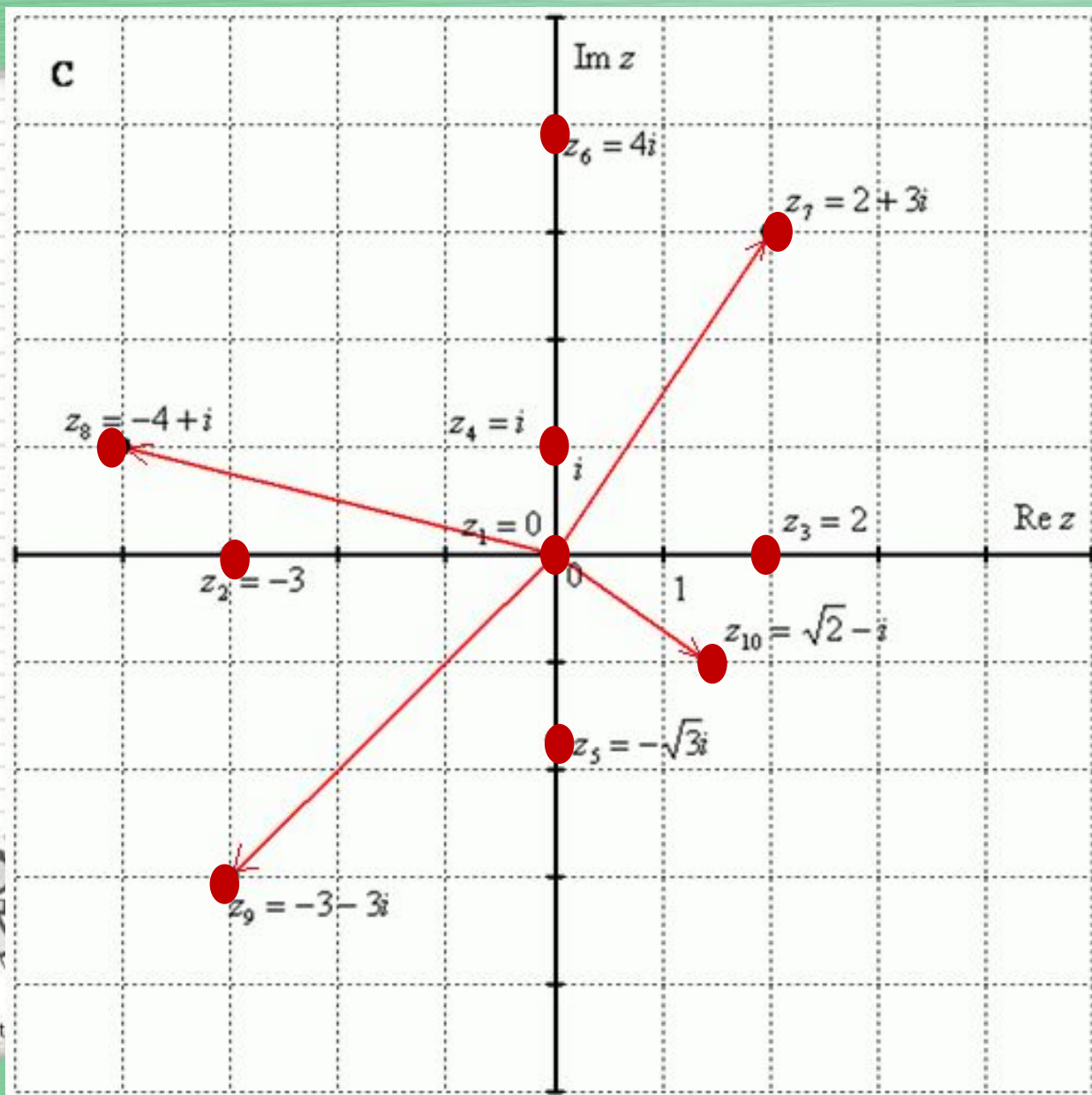
Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат. Каждому комплексному числу сопоставим точку плоскости с координатами (а также радиус-вектор, соединяющий начало координат с этой точкой).

Такая плоскость называется **комплексной**.

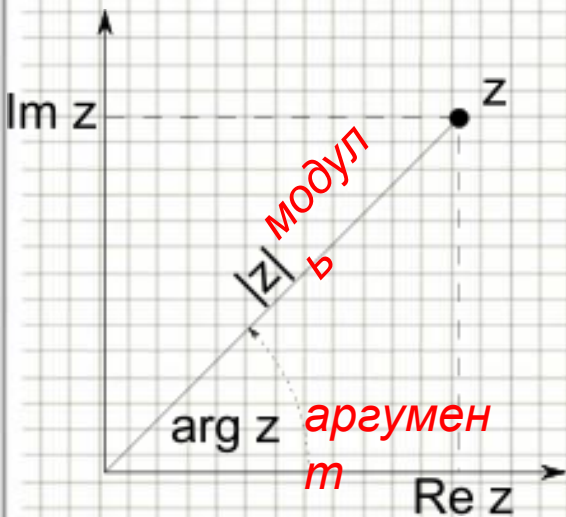
Действительная часть числа на ней занимает горизонтальную ось, мнимая часть изображается на вертикальной оси; по этой причине горизонтальная и вертикальная оси называются соответственно *вещественной* и *мнимой* осями.



Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:



Геометрическое изображение комплексных чисел.



Часто бывает удобно рассматривать на комплексной плоскости также полярную систему координат, в которой координатами точки являются расстояние до начала координат (*модуль*) и угол радиус-вектора точки (показанного синей стрелкой на рисунке) с горизонтальной осью (*аргумент*).

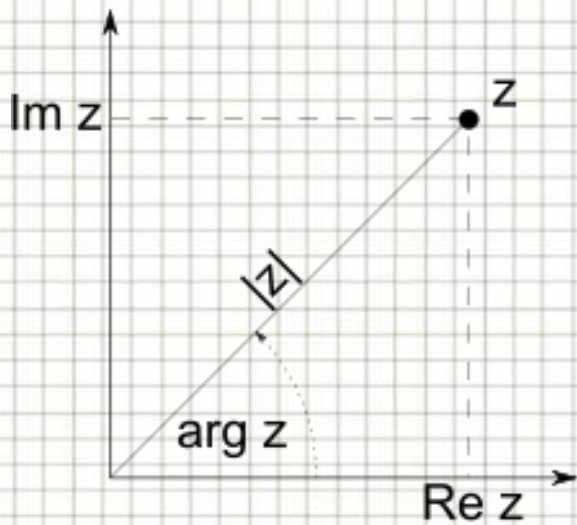
Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg Z$.

$$Z = a + bi$$

$$\varphi = \operatorname{tg} \frac{b}{a}$$



Геометрическое изображение комплексных чисел.



Модулем (абсолютной величиной) комплексного числа называется длина радиус-вектора соответствующей точки комплексной плоскости (или, что то же, расстояние между точкой комплексной плоскости, соответствующей этому числу, и началом координат).

Модуль комплексного числа z обозначается $|z|$ и определяется выражением

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$z = a + bi$$



СУММА

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z = \quad +$$

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$



Решите примеры:

$$Z_1 + Z_2$$

a) $Z_1 = 5 + 4i$ и $Z_2 = -7 - 9i$

б) $Z_1 = 2 + 3i$ и $Z_2 = -1 + 5i$



РАЗНОСТЬ

$$Z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$Z_2 = a_2 + b_2 i$$



РАЗНОСТЬ

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z = \quad - \quad (\quad)$$

$$z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$



Решите примеры:

$$Z_1 - Z_2$$

$$a) Z_1 = 5 + 4i \text{ и } Z_2 = -7 - 9i$$

$$б) Z_1 = 2 + 3i \text{ и } Z_2 = -1 + 5i$$



Возведение в степень

Вычислить:

$$a) i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$б) i^5 = i^2 \cdot i^3 = -1 \cdot (i) = i$$

$$в) i^7 \quad з) i^{11} \quad д) i^{100}$$



Самостоятельная работа

Для комплексных чисел z_1 и z_2 найдите их сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$, если:

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = -1+2i;$$

Отве

$$z_1 + z_2 = 2$$

т:

$$z_1 - z_1 = 2 - i$$



Произведение

Произведением комплексных чисел является комплексное число:

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) =$$

$$= ac + bci + adi + bdi^2 =$$

$$= (ac - bd) + (bc + ad)i$$



Сопряженные числа

Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному, которое обозначается

$$z = a + bi \text{ комплексное}$$

число;

$$\bar{z} = a - bi$$

сопряженное
число.



Деление

Для того, чтобы разделить два комплексных числа, нужно делимое и делитель умножить на число, сопряженное делителю, т.е.

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \\ &= \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

