Algoritmusok és Adatszerkezetek I.

Bevezetés, algoritmusok elemzése

2018. szeptember 4.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Dr. Farkas Richárd

SzTE TTIK, Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia tanszék

rfarkas@inf.u-szeged.hu

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

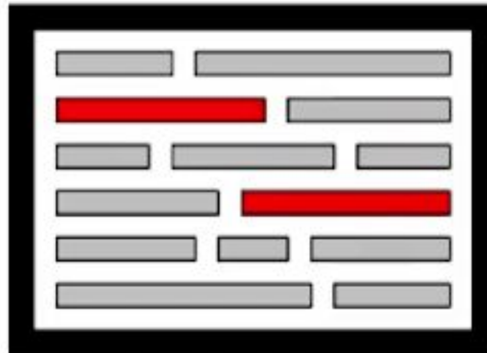
Algoritmusok

Algoritmusnak nevezünk bármilyen ***jól definiált számítási eljárás***t, amely ***bemenetként*** bizonyos értéket vagy értékeket kap és ***kimenetként*** bizonyos értéket vagy értékeket állít elő.

Algoritmus?

- **Jeleníts meg egy képet a weblapon**
  - **túl triviális, nem érdekes itt...**

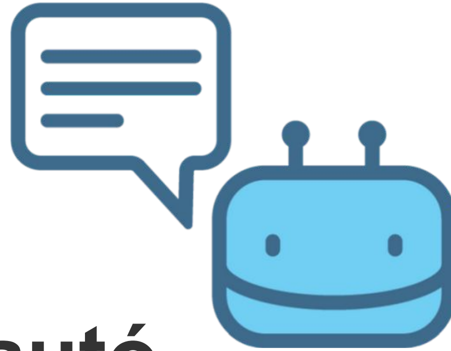
- **Egy adott szó szerepel-e egy fájlban**
  - **Ha sebesség fontos, okos megoldás kell!**



SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Algoritmus?

- Chatrobot

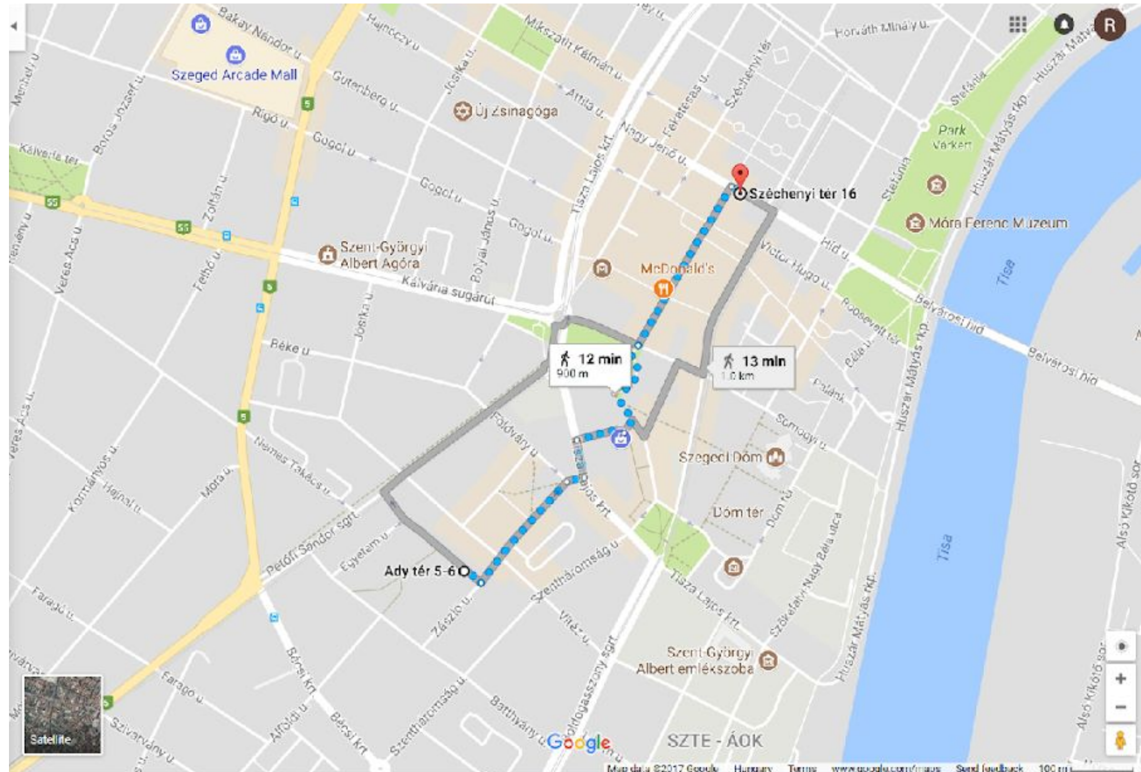


- Önvezető autó

  - Nem jól definiált!
  - Mesterséges Intelligencia

Algoritmus!

- **Legrövidebb út keresése**



- **Nem triviális a megoldás**
- **Egyszerű megoldás túl lassú**

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Adatszerkezetek

Az ***adatszerkezet*** adatok tárolására és szervezésére szolgáló módszer, amely lehetővé teszi a hozzáférést és módosításokat

egfelelő algoritmushoz

egfelelő adatszerkezetet!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Miért tanuljak algoritmusokat?

- **Mindenki fogja használni!**
- **BigData – skálázódás fontos!**

Miért tanuljak algoritmusokat?

- **Algoritmikus gondolkodás!**
  - Algoritmus eddig megoldatlan problémára?
  - Megfelelő algoritmusok és adatszerkezetek kiválasztása
  - Gondoljuk végig a helyességet és hatékonyságot!

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Miért tanuljak algoritmusokat?

- Nyelvfüggetlen programozói szemlélet

> You can practice really hard for two years to become a great programmer and you can practice for 10 years to become an excellent programmer. Or you can practice for two years and take an algorithms course and become an excellent programmer

- Absztraktabb gondolkodás

[How to: Work at Google — Example Coding/Engineering Interview]

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Követelmények

Előadás:

– írásbeli kollokvium

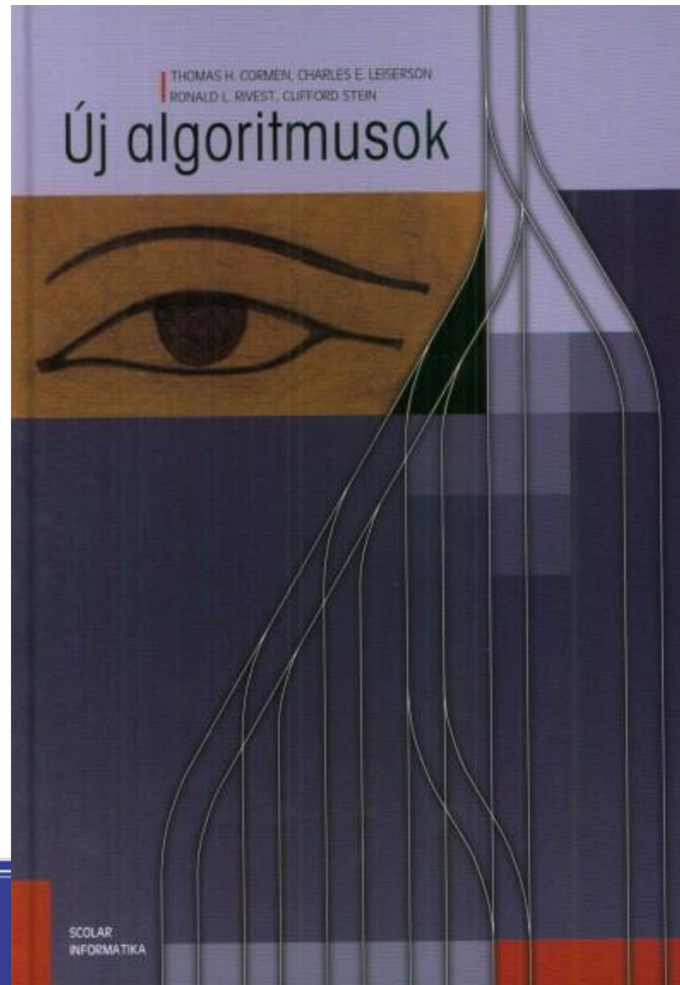
– 7 kérdés, megértés a cél!

Gyakorlat:

????

Anyagok

http://www.inf.u-szeged.hu/~rfarkas



UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Algoritmusok tervezése

- Értsük meg mélyen a feladatot!
- Nincs általános módszertan algoritmizálásra
- A félév folyamán
  - megismerünk hasznos technikákat
  - látunk számtalan algoritmust különböző problémákra

ezek mintául szolgálhatnak a jövőben.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Algoritmusok elemzése

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

- Helyesség
- Hatékonyság:
  - előre megmondjuk, milyen erőforrásokra lesz szüksége az algoritmusnak
  - ***számítási idő***, memória, sávszélesség
- Cél: algoritmusok összehasonlítása

Futási idő

- Milyen hardver?
- CPU? GPU? Felhő?

- ***Futási idő***: egy bizonyos bemenetre a végrehajtott (gépfüggetlen) alapműveletek vagy ”lépések” száma
- Feltesszük, hogy egy kód mindegyik sorának végrehajtásához konstans mennyiségű idő szükséges

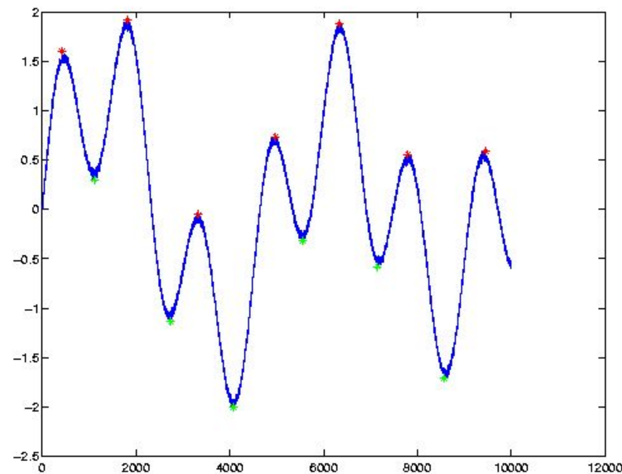
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Feladat: csúcs keresés

Bemenet: egész számok tömbje

Találjunk és adjunk vissza ***egy*** „csúcs”ot ha létezik!

Csúcs: olyan elem a tömbben ami minden szomszédjánál nem kisebb



Forrás: [MIT Introduction to Algorithms, Lecture 1.]

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Feladat: csúcs keresés

1	3	4	3	5	1	3

Csúcs: olyan elem a tömbben ami minden szomszédjánál nem kisebb

Létezik mindig csúcs?

„nem kisebb" helyett „nagyobb" egy másik algoritmust igényelhet!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Egyszerű csúcs kereső alg

- Balról jobbra vizsgáljunk meg minden elemet és ha csúcsot találunk térjünk vissza

1	3	4	3	5	1	3

- Pszeudokód:

for *j* ← 1 **to** *hossz*[*A*]
  do if A[j] ≥ A[j-1] és A[j] ≥ A[j+1]
    return j

Helyes?

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Egyszerű csúcs kereső alg

```
if hossz[A] < 1
  return nil
if hossz[A] = 1
  return 1
else if A[1] ≥ A[2]
  return 1
else if A[hossz[A]] ≥ A[hossz[A]-1]
  return hossz[A]
for j ← 2 to hossz[A]-1
  do if A[j] ≥ A[j-1] és A[j] ≥ A[j+1]
        return j
```

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Egyszerű csúcs kereső alg

```
public static Integer find_a_peak(int[] a) throws IllegalArgumentException {
  //határesetek kezelése:
  if(a == null)
    throw new IllegalArgumentException();
  if(a.length < 1)
    return null;
  if(a.length == 1)
    return 0;
  if(a[0] >= a[1])
    return 0;
  if(a[a.length-1] >= a[a.length-2])
    return a.length-1;

  //algoritmus:
  for(int j = 2 ; j < a.length-1; ++j)
    if((a[j] >= a[j-1])  && (a[j] >= a[j+1]))
      return j;

  //soha nem érhetünk ide:
  return null;
}
```

Algoritmusok (és implementáció) helyességének tesztelése

- **Tesztesetek (unit test)**
- **Először elvárt bemenetekre**

```
find_a_peak(new int[]{1,3,4,3,5,1,3});
```

- **Aztán határesetekre is!**

```
find_a_peak(new int[]{7,3,4,3,5,1,3});
find_a_peak(new int[]{1,3,4,3,5,1,5});
find_a_peak(new int[]{1,3});
find_a_peak(new int[]{1});
find_a_peak(new int[]{});
find_a_peak(null);
```

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Egyszerű csúcs kereső algoritmus elemzése

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

	költség	végrehajtási szám
if *hossz*[A] < 1	c_1	1
return nil	c_2	1
if *hossz*[A] = 1	c_3	1
return 1	c_4	1
else if *A*[1] ≥ *A*[2]	c_5	1
return 1	c_6	1
else if A[*hossz*[A]] ≥ A[*hossz*[A]-1]	c_7	1
return *hossz*[A]	c_8	1
for *j* ← 2 **to** *hossz*[*A*]-1	c_9	n-2
do if A[j] ≥ A[j-1] és A[j] ≥ A[j+1]	c_{10}	n-2
return j	c_{11}	1

Legjobb, átlagos esetek elemzése

- Bemenet mérete konstans ***n***
- Algoritmus futás idejét (utasítások száma) **T(n)**-el jelöljük
- Legjobb esetben az első elem csúcs, ekkor T(n)=2 minden *n*-re
- Az átlagos vagy várható futásidőt nagyon nehéz kiszámolni… (valószínűségi elemzés)

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Legrosszabb eset elemzése

- Inkább legyünk pesszimisták!
- Az algoritmus legrosszabb futási ideje bármilyen bemenetre a futási idő felső korlátja.
  - Gyakran előfordul a legrosszabb eset
  - Az átlagos eset gyakran nagyjából ugyanolyan rossz, mint a legrosszabb eset.

Egyszerű csúcs kereső algoritmus elemzése

	költség	végrehajtási szám
if *hossz*[A] < 1	c_1	1
return nil	c_2	1
if *hossz*[A] = 1	c_3	1
return 1	c_4	1
else if *A*[1] ≥ *A*[2]	c_5	1
return 1	c_6	1
else if A[*hossz*[A]] ≥ A[*hossz*[A]-1]	c_7	1
return *hossz*[A]	c_8	1
for *j* ← 2 **to** *hossz*[*A*]-1	c_9	n-2
do if A[j] ≥ A[j-1] és A[j] ≥ A[j+1]	c_{10}	n-2
return j	c_{11}	1

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Legrosszabb esetben:

$$T(n) = c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + c_9(n-2) + c_{10}(n-2) + c_{11}$$

Egyszerű csúcs kereső algoritmus elemzése

Legrosszabb esetben:

$T(n) = c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + c_9(n\text{-}2) + c_{10}(n\text{-}2) + c_{11}$

$T(n) = (c_9 + c_{10})(n\text{-}2) + c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + c_{11}$

- Tényleges futásidők helyett *c* konstansok
- Nagy *n* esetén $c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + c_{11}$ elhanyagolható
- Hatékonyság szempontjából minket az érdekel, hogy hogyan skálázódik az algoritmus, azaz milyen a ***növekedési sebessége***
- Elég csak a fő tagot figyelembe venni: $(c_9 + c_{10})(n\text{-}2)$
- Nagyságrendileg T(n) *n* lineáris függvénye

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Algoritmusok stressz tesztelése

```
public static void running_time(){
  int size = 100000000;
  int[] ints = new int[size];
  ints[size-1] = 0;
  for(int i=0;i<size-1;++i)
    ints[i]=i;
  long time = System.currentTimeMillis();
  find_a_peak(ints);
  System.out.println((System.currentTimeMillis()-time) +
" msec");
}
```

```
stdout 10M:   9 msec
stdout 100M: 78 msec
```

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Feladat: csúcs keresés

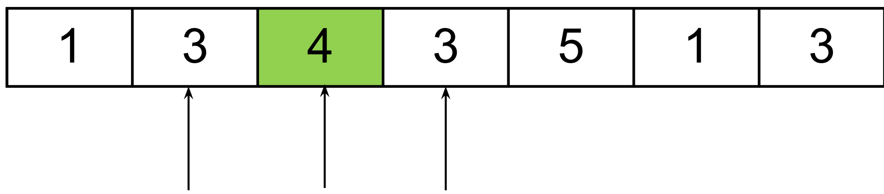
- Feladat ugyanaz!
- Tudunk hatékonyabb megoldást találni?

- Gondoltam egy számra 1 és 2^{32} közt

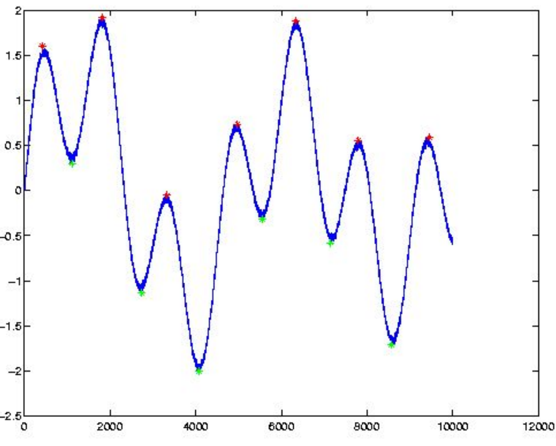
- **Oszd meg és uralkodj!**

Felező csúcskereső algoritmus

Vizsgáljuk meg a középső elemet. Ha nem csúcs akkor egyik szomszéd nagyobb, vizsgáljuk a bemenet felét a ezen szomszéd irányába!



Helyes?



Felező csúcskereső algoritmus

```
public static Integer find_a_peak(int[] a){
  // határesetek kezelése ugyanaz, mint a lassú verzióban!

  // algoritmus:
  int lo = 1;
  int hi = a.length - 2;
  while (lo <= hi) {
    //kell lennie csucsnak az a[lo..hi]-ban
    int mid = lo + (hi - lo) / 2;
    if (a[mid] < a[mid - 1])
      hi = mid - 1;
    else if (a[mid] < a[mid + 1])
      lo = mid + 1;
    else
      return mid;
  }

  // Soha nem érhetünk ide:
  return null;
}
```

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Felező csúcskereső algoritmus futási ideje

$T(n) = T(n/2) + c$

$T(1) = c$

$T(16) = T(8) + c = T(4) + c + c = T(2) + c + c + c = T(1) + c + c + c + c = c + c + c + c + c = 5c$

$T(n) = (\log_2 n + 1)\, c$

Legrosszabb esetben is T(n) *n* függvényében logaritmikus növekedési sebességű

Megj: $\log_a b = \log_c b / \log_c a$ miatt a logaritmus alapja nem számít, hiszen az „csak” konstans szorzó. Nem írjuk ki a kurzuson, hanem mindig 2-es alapú logaritmussal számolunk.

stdout 100M: 0 msec

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Feladat: 2D csúcs keresés

Bemenet: egész számok két dimenziós tömbje (mátrix)

Találjunk és adjunk vissza ***egy*** „csúcs”ot ha létezik!

Csúcs: olyan elem a 2D tömbben ami minden szomszédjánál nem kisebb

Feladat: 2D csúcs keresés
Értsük meg a feladatot!

0	0	9	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0
0	3	0	0	0	0	0
0	5	0	0	0	0	0
0	4	7	0	0	0	0

méret: n x n

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Mohó hegymászó 2D csúcskereső

Induljunk valahonnan (középről vagy egyik sarokból), minden lépésben lépjünk az egyik nagyobb szomszédra. Ha nincs nagyobb szomszéd csúcsot találtunk.

Minden n mérethez kezdőponthoz és lépési startégiához lehet adni olyan bemenetet amire az egész mátrixot be fogja járni (legrosszabb eset) azaz T(n) n^2 növekedési sebességű.

Helyes?

2D csúcskeresés 1D csúcskeresésre visszavezetve

Válasszuk a középső oszlopot. Keressünk 1D csúcsot ebben. A talált 1D csúcs sorában keressünk újra 1D csúcsot. Ez 2D csúcs lesz.

Legrosszabb esetben is log*n* növekedési sebességű, hiszen log*n* idő alatt találunk 1D csúcsot

Helyes?

2D csúcskeresés 1D csúcskeresésre visszavezetve

8	4	1
7	5	3
2	3	1

Egy helyes de nem hatékony algoritmus ér valamit, nem úgy mint egy helytelen de hatékony ☺

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

2D csúcskeresés felezéssel

Válasszuk a középső oszlopot. Keressünk meg egy maximális elemet ebben. Ha ennek bal vagy jobb szomszédja nagyobb, mint az elem ismételjük meg az eljárást ebben a fél mátrixban. Ha bal és jobb szomszédok nem kisebbek 2D csúcsot találtunk.

Helyes?

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

2D csúcskeresés felezéssel

0	0	9	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0
0	3	0	0	0	0	0
0	5	0	0	0	0	0
0	4	7	0	0	0	0

Helyes?

2D csúcskeresés felezéssel futási ideje

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Ha csak egy oszlop van a maximum elem keresés legrosszabb időben n lépést igényel.

$T(n, 1) = cn$

$T(n, m) = T(n, m/2) + cn$

$T(n, m) = \log n \cdot cn$

Legrosszabb esetben $n \cdot \log n$ növekedési sebességű az algoritmus

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Feladat: 2D csúcs keresés

Mohó hegymászó	✓ n^2
Visszavezetés 1D-re	✗ $\log n$
Mátrixfelezés	✓ $n \cdot \log n$

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITARUM SZEGEDIENSIS

Aszimptotikus hatékonyság

Ha a bemenet mérete elég nagy, akkor az algoritmus futási idejének csak a nagyságrendje lényeges

Theta:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{ létezik } c_1, c_2 \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ teljesül minden } n \geq n_0 \text{ esetén}\}.$$

Theta:

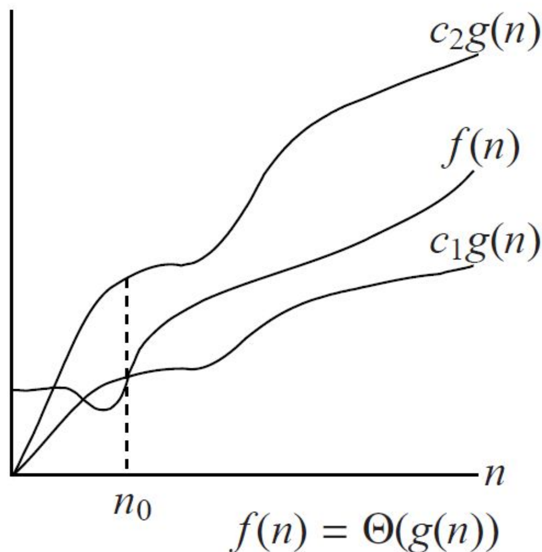
$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{ létezik } c_1, c_2 \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \text{ teljesül minden } n \ge n_0 \text{ esetén}\}.$$

Ordó:

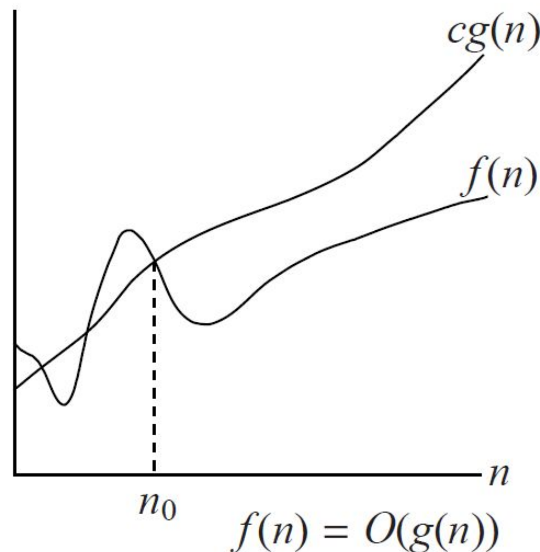
$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ létezik } c \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \le f(n) \le c g(n) \text{ teljesül minden } n \ge n_0 \text{ esetén}\}.$$

Omega:

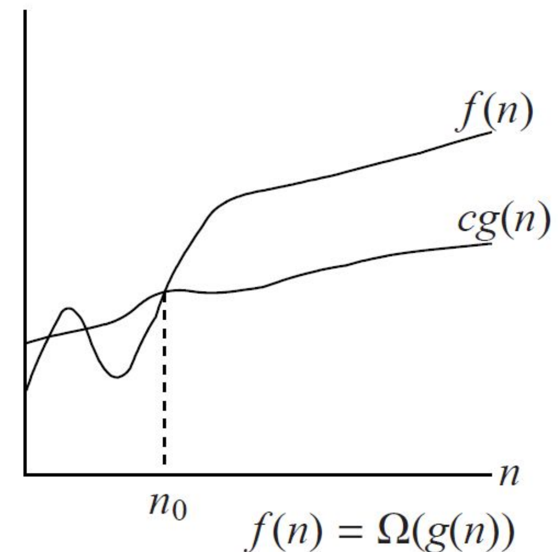
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ létezik } c \text{ és } n_0 \text{ pozitív konstans úgy, hogy } 0 \le c g(n) \le f(n) \text{ teljesül minden } n \ge n_0 \text{ esetén}\}.$$



$f(n) = \Theta(g(n))$



$f(n) = O(g(n))$



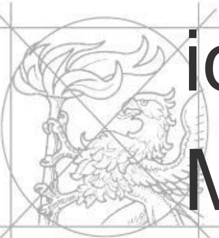
$f(n) = \Omega(g(n))$

Aszimptotikus felső korlát

Ordó

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ létezik } c \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ teljesül minden } n \ge n_0 \text{ esetén}\}.$$

Ha nem mondunk mást $O(n)$ azt jelenti, hogy a vizsgált algoritmus ***legrosszabb*** esetben is aszimptotikusan lineáris időben lefut.



Megj. egy lineáris fgv. is $O(n^2)$-ben van

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Aszimptotikus felső korlát

$T(n)=9999n^3 + \sin n + 78n\log n=O(n^3)$

- Architektúrától független
- Fontos konstans szorzókat elfed!
- Kényelmes használni, de ne feledkezzünk meg róla, hogy ez csak ***aszimptotikus*** korlát!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS

Tipikus aszimptotikus felső korlátok

$O(n^n)$

$O(n^3)$

$O(n^2)$

$O(n)$

$O(\sqrt{n})$

$O(\log n)$

$O(1)$

Time

Input (number)

Összegzés

- Algoritmusok tervezése
  - Értsük meg a problémát/feladatot
  - Legegyszerűbb megoldást elemezzük
  - Ha kell tervezzünk hatékonyabb algoritmust!
- Algoritmusok elemzése
  - helyesség
  - hatékonyság (skálázódás)

    eszköze: legrosszabb eset aszimptotikus felső korlátja

UNIVERSITAS SCIENTIARUM SZEGEDIENSIS
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM