

Дифференциальные уравнения

Кулемин ПКС 14

Содержание

План

Простейшие дифференциальные уравнения(первого порядка)

Понятие дифференциального уравнения

Теорема Коши

Самый простой пример

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.

К ним относят:

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка:

$$y' = f(x) ;$$

Уравнения с разделяющимися переменными:

$$f(x, y) = p(x) h(y) ;$$

Однородные уравнения первого порядка

$$y' = f(y / x);$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$y' + a(x) y = f(x);$$

Уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Называется ДУ первого порядка.

где x -независимая переменная

y -неизвестная функция

y' -ее производная

Если из уравнения можно выразить производную неизвестной функции, то оно примет вид:

$$y' = f(x, y):$$

Это уравнение называется ДУ первого порядка, решенным относительно первой производной

Например:

$$(y')^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) , которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество.

Теорема Коши

Пусть дано ДУ:

$$y' = f(x, y)$$

Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости x, y , то в некоторой окрестности любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющего условию $x = x_0, y = y_0$.

Условия, задающие значения функции в фиксированной точке называются начальными условиями (условиями Коши):

$$y|_{x=X_0}=Y_0$$

Рассмотрим уравнение

$$y' = 2x$$

Правая часть этого уравнения удовлетворяет всем условиям теоремы Коши во всех точках плоскости x, y :

Функции $f(x, y) = 2x$ и $f'_y = 0$ определены и непрерывны на всей плоскости.

Общее решение уравнения:

$$y = x^2 + C$$