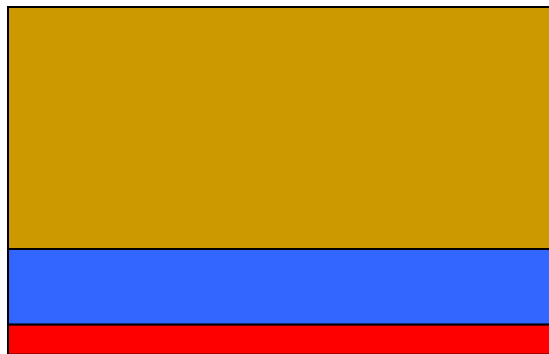

Введение в асимптотические методы.

Лекция 8

Сращивание разложений:
подслои

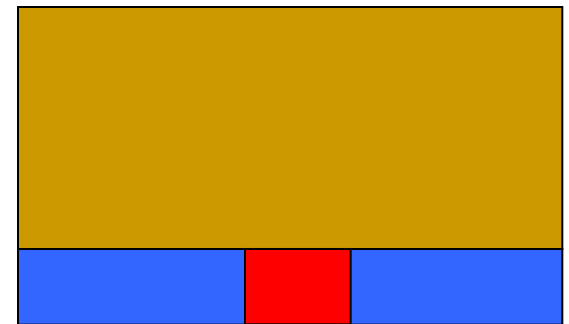
1. Подслои

Рассматриваемая до сих пор схема: внешнее разложение + погранслоем не всегда достаточна. Погранслоем сам может оказаться структурированным: содержать внутри себя **подслои**.



Трехпалубная модель

внешняя область
погранслоем
подслоем



Слои влияют друг на друга и построение решения в каждом из них должно быть согласовано с построением решения в других слоях

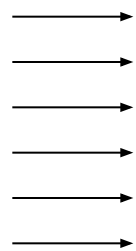
2. Теплообмен при больших числах Пекле: постановка задачи

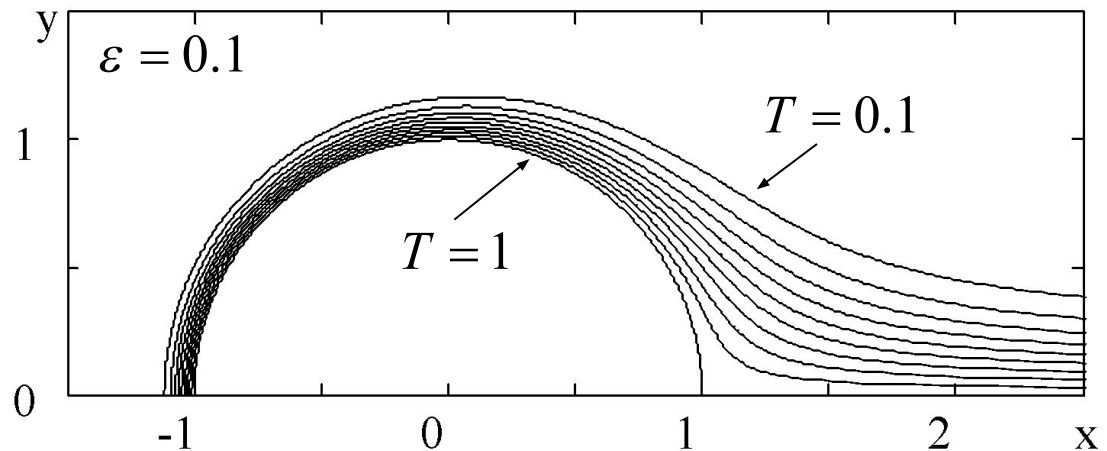
Рассматривается задача стационарного теплообмена цилиндра с обтекающим его потенциальным потоком идеальной жидкости при больших числах Пекле: $Pe = \varepsilon^{-2}$

$$\underbrace{\cos\theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial T}{\partial r}}_{\mathbf{v} \cdot \nabla T} - \underbrace{\frac{\sin\theta}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial T}{\partial \theta}}_{\Delta T} = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right), \quad r > 1$$

$$T|_{r=1} = 1, \quad T|_{r=\infty} = 0.$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_x$$

$$T = 0$$




3. Внешнее разложение и толщина ПС

Внешнее разложение в главном члене $\mathbf{V} \cdot \nabla T = 0$

T постоянна вдоль линий тока
 T равна нулю вдоль любой линии тока при $r \rightarrow \infty$ } $T \equiv 0$

Толщина ПС $\delta \ll 1$ ПС координата $R = \frac{r-1}{\delta}$

$$2R \cos \theta \frac{\partial T}{\partial R} - 2 \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + O(\delta) = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + O(\delta) \right). \quad \longrightarrow \quad \boxed{\delta = \varepsilon}$$

В погранслойных координатах обеспечивается баланс конвекции и действующей по нормали к поверхности тела кондукции

4. Внутреннее разложение: АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ

Внутреннее разложение в главном члене

$$\left\{ \begin{array}{l} 2R \cos \theta \frac{\partial T_0}{\partial R} - 2 \sin \theta \frac{\partial T_0}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial R^2}, \\ T_0|_{R=0} = 1, \quad T_0|_{R=\infty} = 0. \end{array} \right.$$

← условие срачивания

Ищем автомодельное решение задачи вида $T_0(R, \theta) = u(\xi), \quad \xi = Rg(\theta)$

$$2R \cos \theta g(\theta) u' - 2R \sin \theta g'(\theta) u' = g^2(\theta) u''$$

$$\frac{u''}{u'} = 2R \left(\frac{g \cos \theta - g' \sin \theta}{g^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} u'' = 2k\xi u' & \text{Задача для } u(\xi) \\ g \cos \theta - g' \sin \theta = kg^3 & \text{Задача для } g(\theta) \end{cases}$$

За счет нормировки $g \left(g \rightarrow g / \sqrt{|k|} \right)$ всегда можно добиться чтобы $k = \pm 1$

5. Внутреннее разложение: решение автомодельной задачи

$$u'' = \pm 2\xi u' \Rightarrow u' = \text{const} \times e^{\pm \xi^2} \quad \text{должна затухать при } R \rightarrow \infty$$

$$\xi = Rg(\theta) \Rightarrow \text{нужный знак - (+) при } g > 0 \text{ (} g < 0 \text{)}$$

$$g > 0 \quad u = C_1 \int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + C_2, \quad u(0) = 1, \quad u(+\infty) = 0 \Rightarrow u(\xi) = \text{erfc } \xi$$

$$g < 0 \quad \Rightarrow u(\xi) = \text{erfc}(-\xi)$$

$$u(\xi) = \text{erfc}|\xi|$$

$$\frac{g \cos \theta - g' \sin \theta}{g^2} = -g \Rightarrow \left(\frac{\sin \theta}{g} \right)' = -\frac{g}{\sin \theta} \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g^{-2} \sin^2 \theta)' = -2 \sin \theta \Rightarrow g^2 = \frac{\sin^2 \theta}{2(C + \cos \theta)}$$

$$|g| = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2(C + \cos \theta)}}$$

$$C \geq 1$$

$$T = \text{erfc} \left(\frac{R \sin \theta}{\sqrt{2(C + \cos \theta)}} \right)$$

Константа C не определена. Для ее нахождения нужно рассмотреть подслои вблизи критич. точки

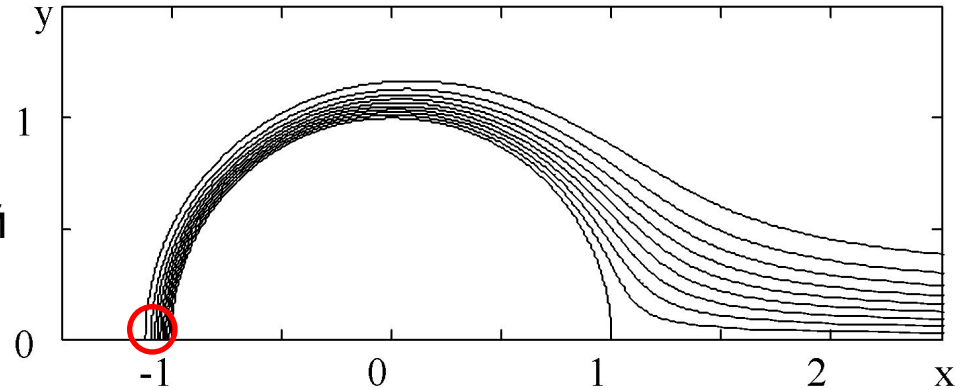
6. Подслой: сращивание с пограничным слоем

Вблизи особой точки скорости малы

$$V_x \approx -4(1+x), V_y \approx 4y$$

и конвекция соизмерима с кондукцией

ПС координаты $X = \frac{x+1}{\varepsilon}, Y = \frac{y}{\varepsilon}$



$$\left. \begin{aligned} -2X \frac{\partial T}{\partial X} + 2Y \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \\ T(0, Y) &= 1, T(\infty, Y) = 0 \end{aligned} \right\}$$

T есть функция только X

$$T = \operatorname{erfc}(-X)$$

Рассматриваемый подслой является частью пограничного слоя, отвечающей малой окрестности точки $\theta = \pi$ В главных членах $X = -R, Y = (\pi - \theta)/\varepsilon$

$$C = 1 \Rightarrow T = \operatorname{erfc}\left(\frac{R \sin \theta}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}\right) \approx \operatorname{erfc}\left(\frac{-X \cdot \varepsilon Y}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 Y^2\right)}}\right) = \operatorname{erfc}(-X)$$

$$C > 1 \Rightarrow T = 1 + O(\varepsilon)$$

7. Динамический гистерезис: определяющее уравнение

Изотермическая пульсация маленького пузырька с газом Ван-дер-Ваальса

$$p = p(t), \quad \rho = \rho(t), \quad T = \text{const}$$

Равновесный (бесконечно медленный) процесс

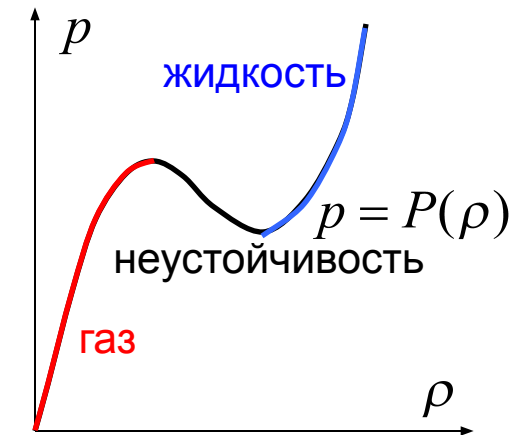
$$p = P(\rho)$$

Релаксационный закон для медленных процессов

время релаксации \rightarrow $\tau \dot{\rho} = p - P(\rho)$

Задавая внешними условиями закон изменения давления $p = p_0(t)$ получим ОДУ для нахождения ρ

$$\tau \dot{\rho} + P(\rho) = p_0(t)$$



Характерная особенность – неустойчивость в области, где $P'(\rho) < 0$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho_*$$

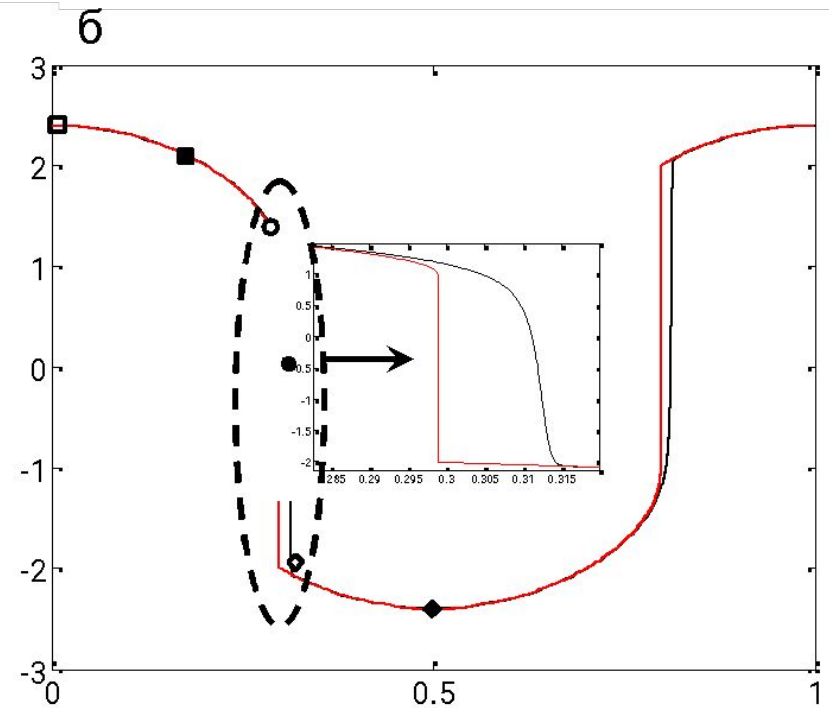
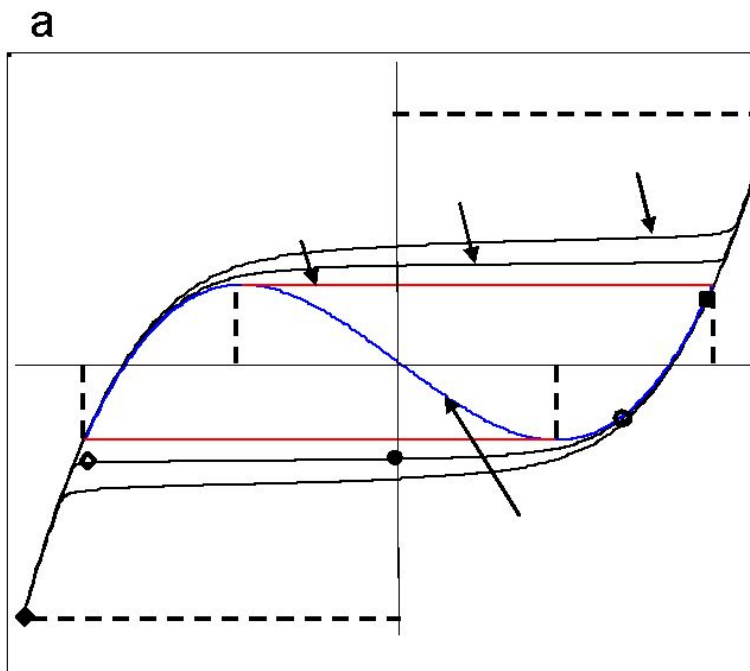
$$p = \bar{p} + p_* \quad \longrightarrow \quad \tau \dot{\rho}_* + P'(\bar{\rho})\rho_* = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho_* = A \exp(-P'(\bar{\rho})t)$$

$$\bar{p} = P(\bar{\rho})$$

8. Модельная задача: счет

$$\rho' + \underbrace{(\rho^3 - 3\rho)}_{P(\rho)} = p(t) \equiv p_0 \cos \omega t$$

$$A_0 > 2, \quad \omega \rightarrow 0$$



9. Медленная фаза

Перенормировка: $T = \omega t$ $\omega \rho' + \rho^3 - 3\rho = p_0 \cos T$

Разложение: $\rho = \rho_0(T) + \omega \rho_1(T)$ (1)

$$\omega^0: \rho_0^3 - 3\rho_0 = p_0 \cos T \Rightarrow T = \arccos\left(\frac{\rho_0^3 - 3\rho_0}{p_0}\right) \quad \left(T < T_0 = \arccos\frac{-2}{p_0}\right)$$

$$T \rightarrow T_0: \rho_0 \approx 1 + \sqrt{B(T_0 - T)} \quad B = 3p_0 \sin T_0 = 3\sqrt{p_0^2 - 4}$$

$$\omega^1: \rho_0' + 3\rho_0^2 \rho_1 - 3\rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \frac{-\rho_0'}{3(\rho_0^2 - 1)}$$

$$T \rightarrow T_0: \rho_1 \approx \frac{1}{12(T_0 - T)}$$

Где разложение (1) перестает быть справедливым?

$$\rho - 1 \approx \left(B^{1/2} \omega^{1/2} (t_0 - t)^{1/2} + \dots \right) + \omega \left(\frac{1}{12} \omega^{-1} (t_0 - t)^{-1} + \dots \right) \quad (t \rightarrow t_0 = T_0 / \omega)$$

Соизмеримы, когда $t_0 - t \propto \omega^{-1/3}$ При этом оба члена $\propto \omega^{1/3}$

Это дает нам нужную перенормировку для следующей фазы

10. Промежуточная фаза

Перенормировка: $t - t_0 = (9B\omega)^{-1/3} \tau$, $\rho = 1 + (B\omega/3)^{1/3} y \Rightarrow y' + y^2 + \tau + (\omega B/9)^{1/3} y^3 = 0$

Разложение: $y = y_0(\tau) + (\omega B/9)^{1/3} y_1(\tau) + \dots$

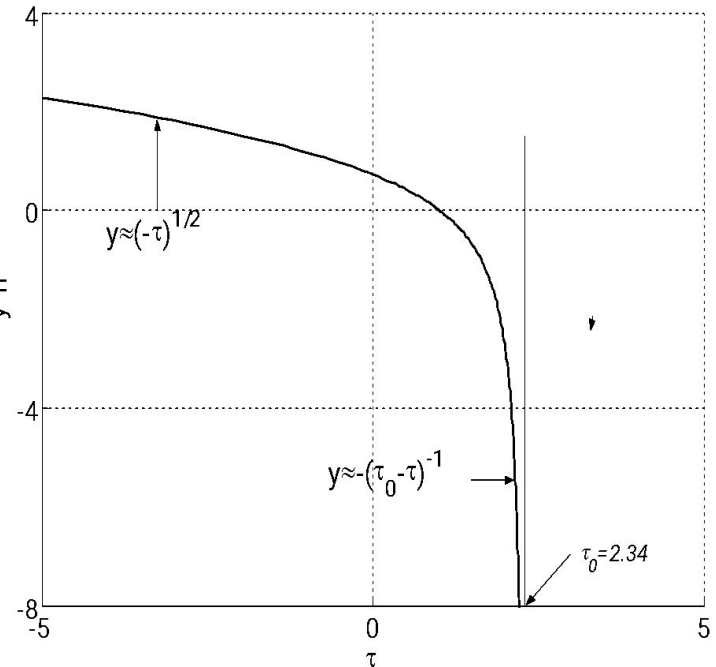
ω^0 : $y_0' + y_0^2 + \tau = 0$ уравнение Рикатти

Сращивание

$$y_0 = (\omega B/3)^{-1/3} (\rho_0 - 1) \boxtimes (\omega B/3)^{-1/3} \sqrt{B(T_0 - T)} \underset{y}{=} \\ = (\omega B/3)^{-1/3} \sqrt{-(\omega B/3)^{2/3} \tau} = \sqrt{-\tau}$$

$$\left[\begin{array}{l} y' + y^2 + \tau = 0 \\ \tau \rightarrow \infty: y \boxtimes (-\tau)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{Решение} \Rightarrow$$

$$\tau \rightarrow \tau_0: y_0 \boxtimes (\tau - \tau_0)^{-1}$$



11. Промежуточная фаза

$$\omega^{1/3}: \quad y_1' + 6y_1y_0 + y_0^3 = 0$$

$$\tau \rightarrow \tau_0: \quad y_0 \propto (\tau - \tau_0)^{-1} \Rightarrow$$

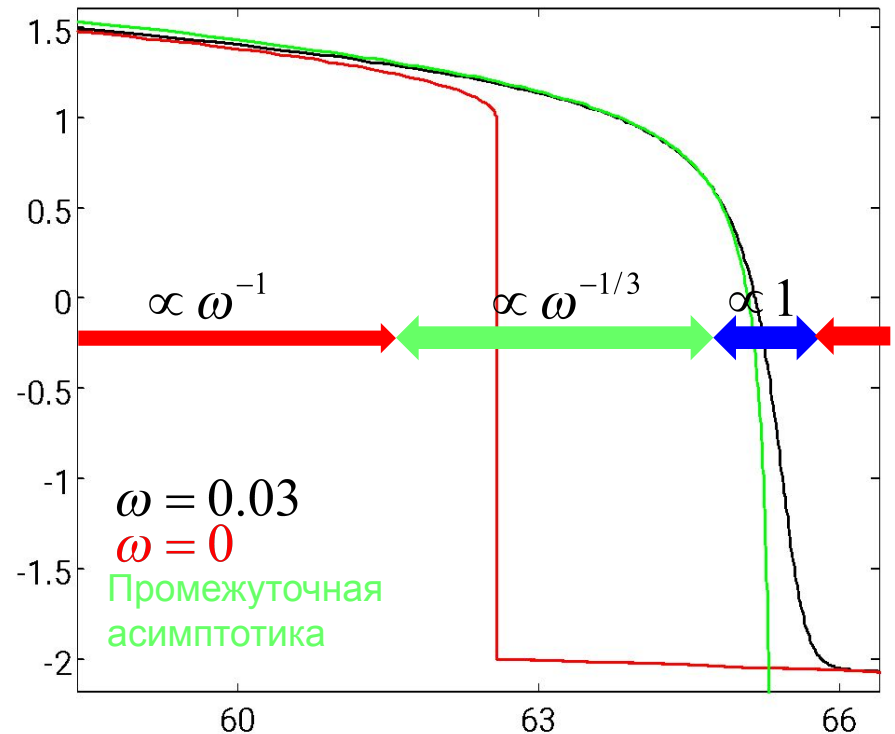
$$\Rightarrow \tau \rightarrow \tau_0: \quad y_1 \propto (\tau - \tau_0)^{-2}$$

Где промежуточное разложение перестает быть справедливым?

$$\rho \approx 1 + (B\omega/3)^{1/3} \left((\tau_0 - \tau)^{-1} + \dots \right) + (B\omega/3)^{2/3} \left((\tau_0 - \tau)^{-2} + \dots \right)$$

Соизмеримы, когда $\tau - \tau_0 \propto (\omega B/3)^{1/3}$ При этом все члены $\propto 1$

Это дает нам нужную перенормировку для следующей фазы



12. Быстрая фаза

Перенормировка:

$$t - t_* = t_{new}, \rho \Rightarrow$$

$$\rho' + (\rho - 1)^2(\rho + 2) = O(\omega^{2/3})$$

Сращивание:

$$t \rightarrow -\infty: \quad \rho \approx 1 + \frac{1}{3t}$$

$$\frac{d\rho}{(\rho - 1)^2(\rho + 2)} = dt$$

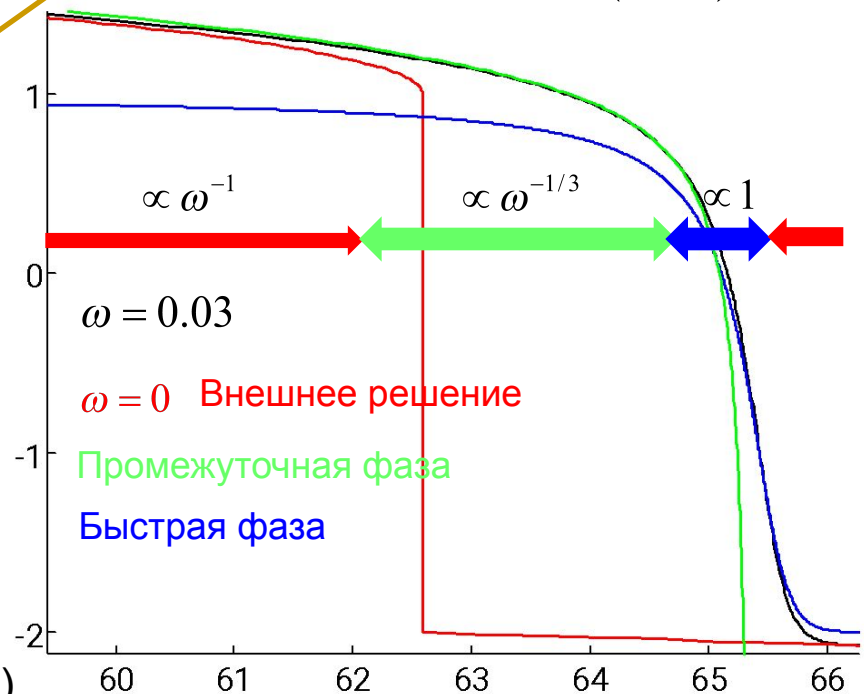
$$\frac{1}{9} \ln \frac{2 + \rho}{1 - \rho} + \frac{1}{3(1 - \rho)} = t + \text{Const}$$

Максимум скорости (максимальная скорость фазового перехода) достигается на этой фазе

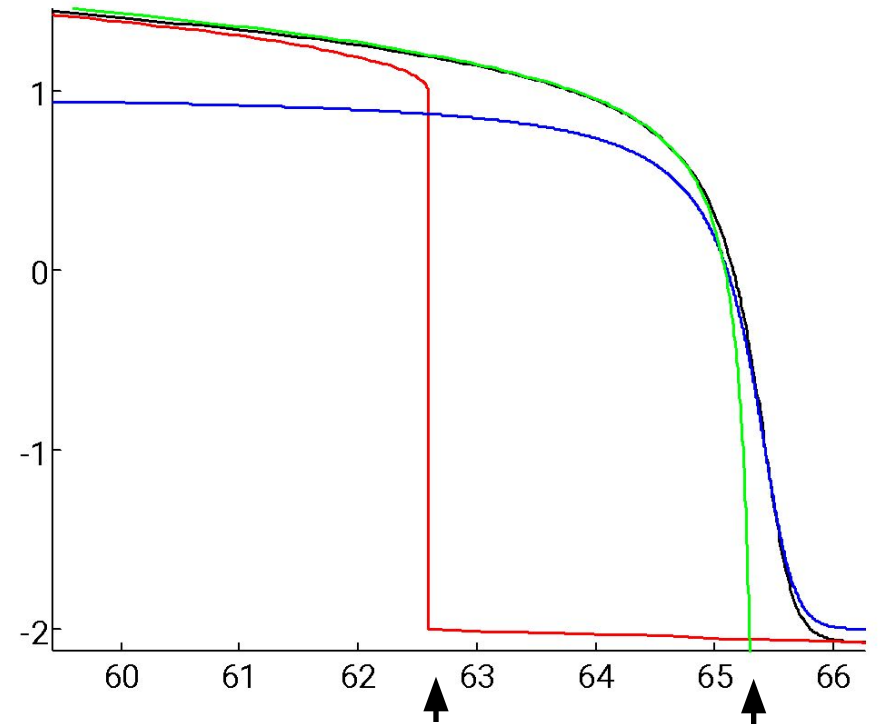
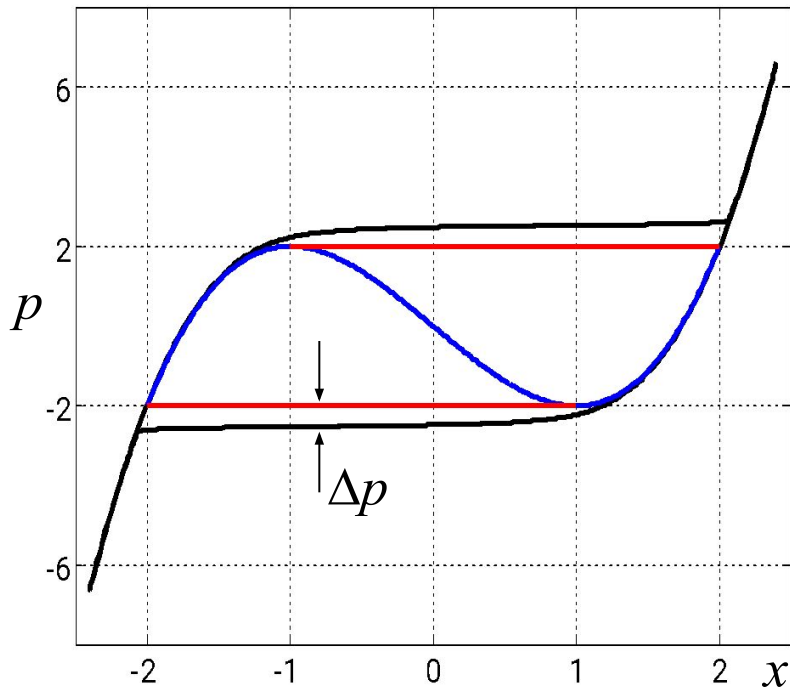
$$\left| \frac{d\rho}{dt} \right|_{\max} = 12 \quad \text{при} \quad \rho = -1$$

Он не зависит от внешних условий (констант p_0, ω в правой части уравнения)

$$t_0^* = T_0 \omega^{-1} + \tau_0 (9B\omega)^{-1/3}$$



13. Площадь петли гистерезиса



$$S(\omega) - S(0) \propto 1 \cdot \Delta p$$

$$\Delta p = p_0 \cos\left(T_0 + (\propto \omega^{2/3})\right) - p_0 \cos(T_0) \propto \omega^{2/3}$$

$$S(\omega) - S(0) \propto \omega^{2/3}$$

$$\frac{T_0}{\omega}$$

$$\frac{T_0}{\omega} + \frac{\tau_0}{\sqrt[3]{3B\omega}}$$

14. Упражнение к лекции 8

1. Рассмотреть осесимметричную задачу о теплообмене сферы с обтекающим ее потенциальным потоком идеальной жидкости при больших значениях критерия Пекле

$$\vec{V} \cdot \nabla T = \varepsilon^2 \Delta T, \quad r > 1$$

$$T|_{r=1} = 1, \quad T|_{r=\infty} = 0.$$

Используйте полярные координаты, в которых поле скоростей имеет вид

$$V_r = \cos \theta \left(1 - \frac{1}{r^3} \right), \quad V_\theta = -\sin \theta \left(1 + \frac{2}{r^3} \right), \quad V_\varphi = 0$$

2. Рассмотреть следующую «трехпалубную» задачу:

$$x^3 y' = \varepsilon \left((1 + \varepsilon)x + 2\varepsilon^2 \right) y^2, \quad 0 < x < 1$$

$$y(1) = 1 - \varepsilon$$

Вычислить последовательно два члена внешнего, затем два члена погранслоного, и наконец один член подслоного разложения.