

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б.Б. ГОРОДОВИКОВА»

Численные методы в астрофизике

Выполнила: Ольдеева Е.А.

Магистрант 2 года обучения

По направлению «Математика»


Магистерская программа

«Математический анализ»

Научный руководитель:

К.ф.-м. наук, доцент

Бисенгалиев Р.А.



Целью работы является рассмотреть некоторые задачи теоретической физики Солнца, которые сводятся к численному исследованию алгебраических уравнений и краевых задач на собственные значения.

Актуальность работы связана с тем, что механизм образования Солнечных магнитных аркад и корональной петли не ясен до сих пор.

Содержание работы

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА ПЕРВАЯ. МЕТОД НЬЮТОНА, МЕТОД РУНГЕ-КУТТА, МЕТОД
СТРЕЛЬБ

- 1.1. Метод Ньютона
- 1.2. Метод Рунге-Кутта
- 1.3. Метод стрельб

ГЛАВА ВТОРАЯ. МОДЕЛЬ МАГНИТНОЙ АРКАДЫ НА СОЛНЦЕ

- 2.1. Основные уравнения и равновесная модель
- 2.2. Постановка краевой задачи. Граничные условия
- 2.3. Алгоритм решения краевой задачи
- 2.4. Численный анализ закона дисперсии

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОРОНАЛЬНЫХ ПЕТЕЛЬ

- 3.1. Модель корональной петли с продольным электрическим током
- 3.2. Линейные уравнения МГД в идеально проводящей среде
- 3.3. Обсуждение результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ



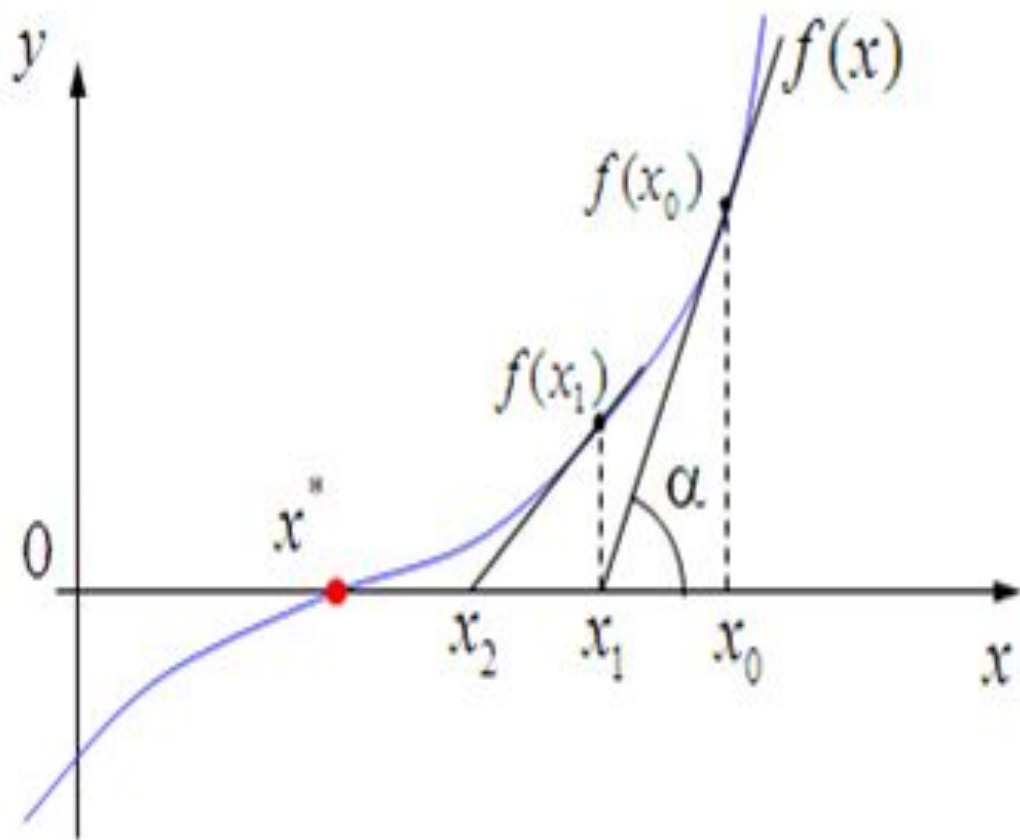
Глава первая.

Метод Ньютона, метод Рунге-Кутта, метод стрельб

Использованные мною численные методы

- Метод Ньютона
- Метод Рунге-Кутта
- Метод стрельб

Метод Ньютона



Метод Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n), \quad h_n = x_{n+1} - x_n \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (2)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Метод стрельб.

$$\frac{d\hat{\xi}}{dx} = A\hat{\xi} + B\hat{p} \quad (1)$$

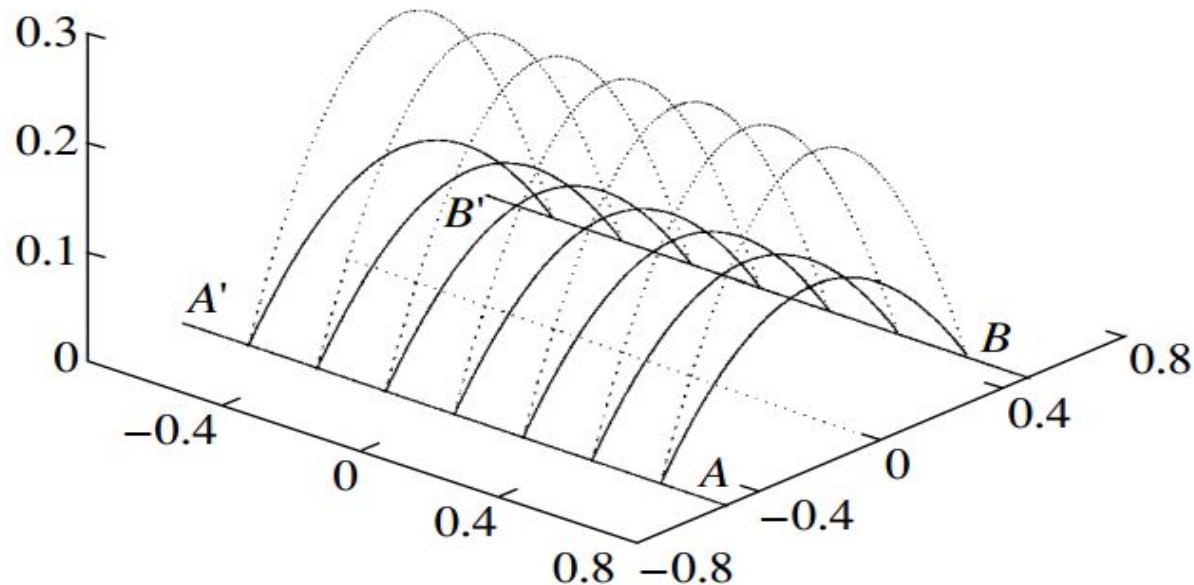
$$\frac{d\hat{p}}{dx} = C\hat{\xi} + D\hat{p} \quad (2)$$

Здесь A, B, C и D – комплексные коэффициенты, зависящие от стационарных (равновесных) распределение термодинамических параметров модели, скорости и магнитного поля, от компонент волнового вектора k_y, k_z и комплексной частоты ω . Вместе с граничными условиями на собственные функции $\hat{\xi}(x)$ и $\hat{p}(x)$ определяемыми из физических соображений, система (1)-(2) образует краевую задачу типа Штурма-Лиувилля на собственные значения частоты ω .

Глава вторая.

Модель магнитной аркады на Солнце.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости модели Солнечных магнитных аркад.



Исходной системой уравнения МГД является

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}[\mathbf{V}\mathbf{B}]] \right] = \rho q,$$

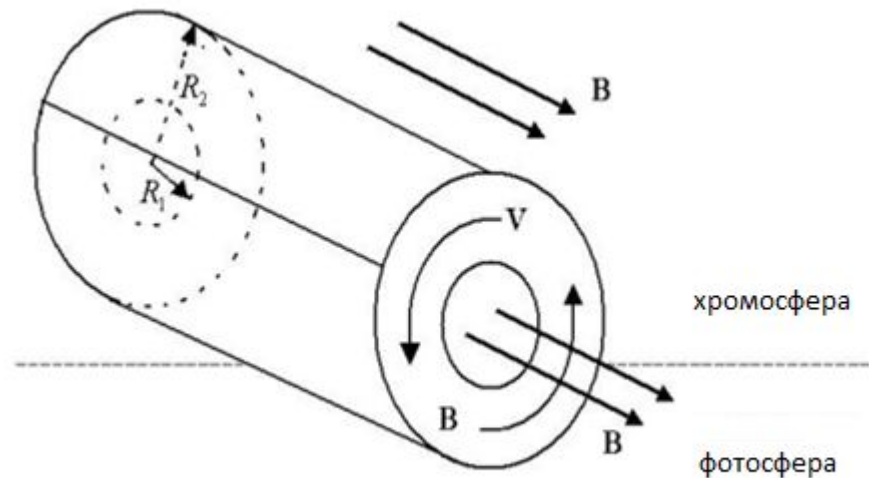
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{8\pi\rho} \nabla \mathbf{B}^2 + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

и уравнения состояния

$$\frac{P}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma} = (\gamma - 1)\varepsilon = \frac{R}{\mu} T,$$



Мною была поставлена следующая краевая задача:

В цилиндрическом слое ($R_1 < r < R_2$) линеаризованная система МГД-уравнений примет вид:

$$\frac{d\xi}{dr_b} = C_1(r_b)p + C_2(r_b)\xi,$$
$$\frac{dp}{dr_b} = C_3(r_b)p + C_4(r_b)\xi,$$

Вне цилиндрическом слое ($r < R_1, r > R_2$) линеаризованная система МГД-уравнений примет вид:

$$r_b^2 \frac{d^2 p}{dr_b^2} + r_b \frac{dp}{dr_b} - (m^2 + \chi^2 r_b^2) p = 0,$$

с граничными условиями

$$p_{ex} = A_1 \cdot I_m(\chi r_b), \quad r_b < R_1 / \Delta R,$$

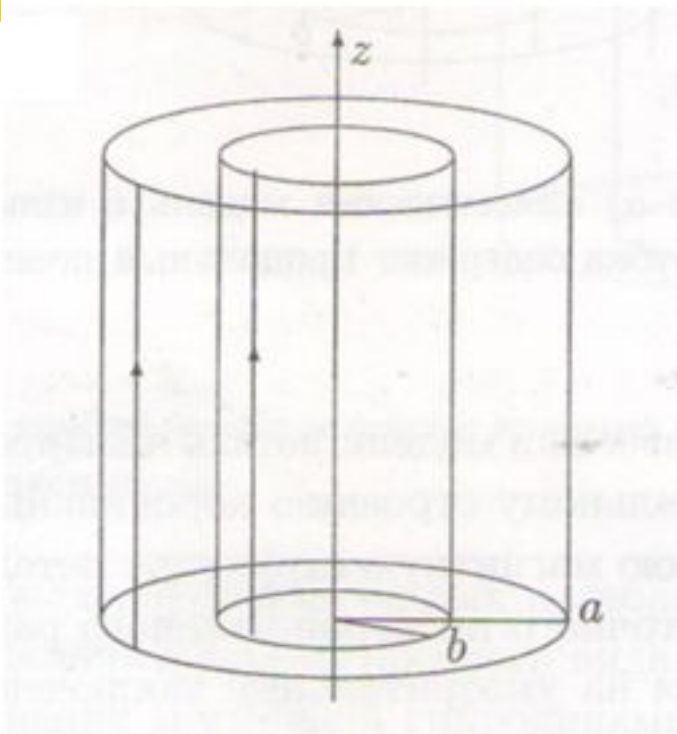
$$p_{ex} = B_1 \cdot K_m(\chi r_b), \quad r_b > R_2 / \Delta R,$$

где $A_1 = A / (\rho_{ex} c_{ex}^2)$, $B_1 = B / (\rho_{ex} c_{ex}^2)$, A, B

Глава третья.

Неустойчивость корональных петель

Посвящена исследованию устойчивости модели корональной петли на Солнце



$$\rho_0(r) = \begin{cases} \rho_{0i} - const, & r < b, \\ \rho_{0m}(r), & b < r < a, \\ \rho_{0e} - const, & a < r. \end{cases}$$

$$p_0(r) = \begin{cases} p_{0i} - const, & r < b, \\ p_{0m}(r), & b < r < a, \\ p_{0e} - const, & a < r. \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_0(r) = \begin{cases} B_{0i} \mathbf{e}_z, B_{0i} - const, & r < b, \\ B_{0\varphi}(r) \mathbf{e}_\varphi + B_{0z}(r) \mathbf{e}_z, & b < r < a, \\ B_{0e} \mathbf{e}_z, B_{0e} - const, & a < r. \end{cases}$$

Распределения в оболочке должны удовлетворять
уравнению равновесия

$$\frac{dp_{0m}(r)}{dr} + \frac{1}{4\pi} B_{0z}(r) \frac{dB_{0z}(r)}{dr} + \frac{1}{4\pi} B_{0\varphi}(r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r B_{0\varphi}(r) = 0$$

Условие равновесия трубки:

$$p_{0i} + \frac{1}{8\pi} B_{0i}^2 = p_{0m}(b) + \frac{1}{8\pi} (B_{0\varphi}^2(b) + B_{0z}^2(b)),$$

$$p_{0m}(a) + \frac{1}{8\pi} (B_{0\varphi}^2(a) + B_{0z}^2(a)) = p_{0e} + \frac{1}{8\pi} B_{0e}^2.$$

Уравнения малых возмущений в идеальной покоящейся среде

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0 / 4\pi + \text{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B} / 4\pi,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \rho_0 \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma p_0 \text{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla p_0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \text{div} \mathbf{B} = 0.$$

Линеаризованная система МГД вне шнура ($r < b$ и $r > a$)

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{ex}} \nabla \tilde{p} - \frac{B_{ex}}{4\pi\rho_{ex}} \nabla \tilde{b}_z + \frac{B_{ex}}{4\pi\rho_{ex}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial t} = B_{ex} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial z} - B_{ex} \mathbf{e}_z \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}},$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \square) \rho_{ex} + \rho_{ex} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \square) P_{ex} = c_{ex}^2 \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \square) \rho_{ex} \right].$$

Данную систему свели к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\xi}{dr_b} = C_5(r_b)p - \frac{\xi}{r_b},$$

$$\frac{dp}{dr_b} = C_6(r_b)\xi,$$

Последнюю систему в свою очередь свели к модифицированному уравнению Бесселя:

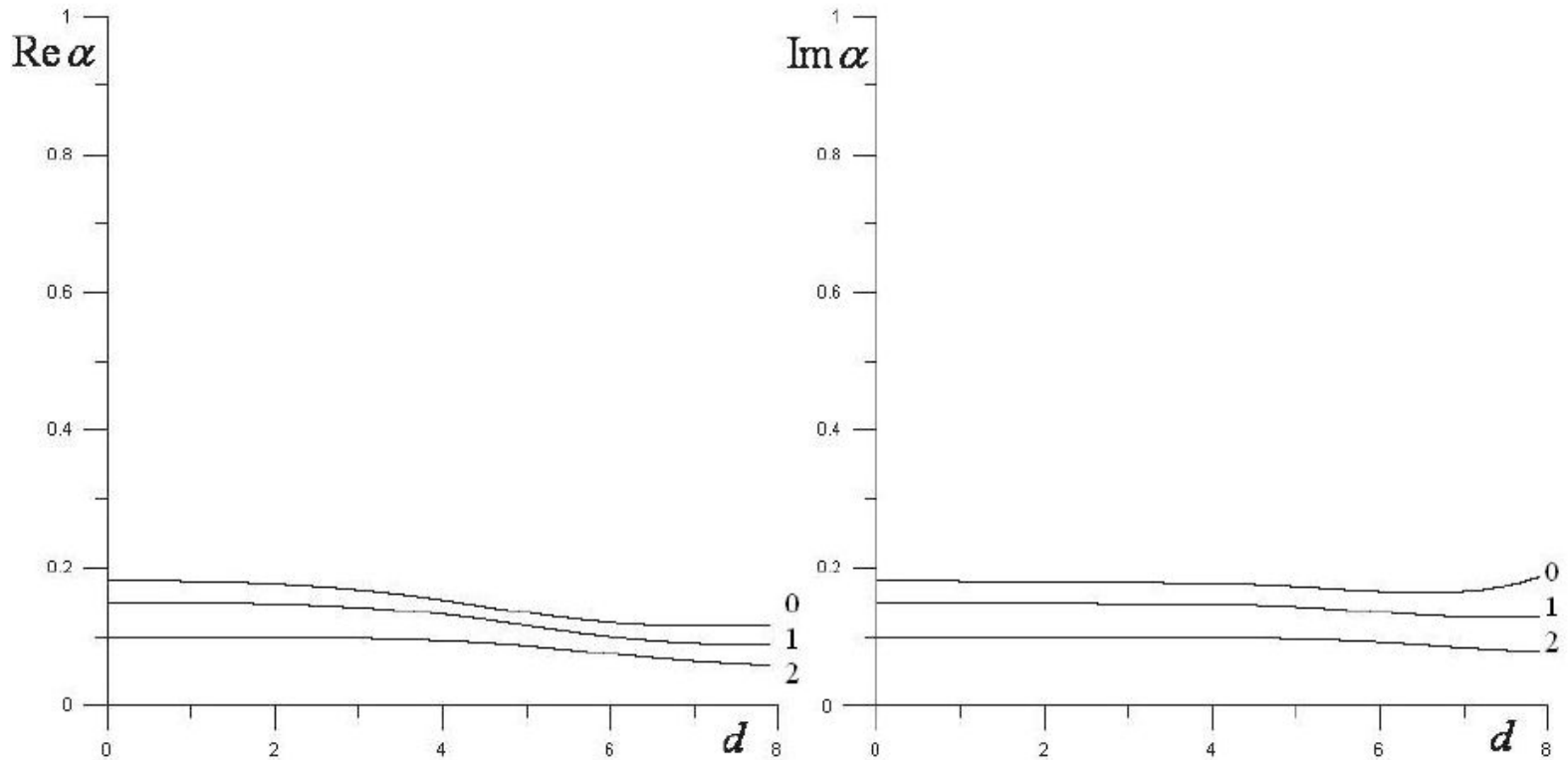
$$r_b^2 \frac{d^2 p}{dr_b^2} + r_b \frac{dp}{dr_b} - (m^2 + \chi^2 r_b^2)p = 0,$$

с граничными условиями

$$\xi_{ri}(b) = \xi_{rm}(b), \xi_{rm}(a) = \xi_{re}(a),$$

$$P_i(b) = P_m(b) - \frac{B_{0\varphi}^2(b)}{4\pi b} \xi_{ri}(b), P_m(a) - \frac{B_{0\varphi}^2(a)}{4\pi a} \xi_{ri}(a) = P_e(a)$$

Поставленная краевая задача решалась численно на ЭВМ методом стрельб. Полученная при ее решении дисперсионные кривые приведены на рис.1





Спасибо за внимание!