Логарифмы Решение логарифмических уравнений и неравенств

Понятие логарифма

При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ степень a^p с произвольным действительным показателем p определена и равна некоторому положительному действительному числу b: $a^p = b$. Показатель p степени a^p называется логарифмом этой степени с основанием a.

* Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a: $log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x.

$$a^{log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = log_a x$$

*

* СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

* 1) Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0,$ то

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y \ .$$

* Если $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0,$ то

$$log_a(x \cdot y) = log_a(-x) + log_a(-y) \ .$$

* 2) Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0,$ то

$$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y \ .$$

* Если $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0,$ то

* $$log_a \frac{x}{y} = log_a(-x) - log_a(-y) \ .$$

*

Во всех равенствах

$$a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, x > 0, y > 0\ .$$

3) $\log_a(x^c) = c\log_a x$;

4) $\log_{a^d}(x^c) = \frac{c}{d}\log_a x$;

5) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

6) $\log_a x \cdot \log_b y = \log_b x \cdot \log_a y$;

7) $\log_{\sqrt[n]{a}} x = n\log_a x$;

8) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$;

9) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

10) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $a^{(\log_a x)^2} = x^{\log_a x}$;

11) $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$, $y \neq 1$;

12) $\log_a(xy) + \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x^2\right)$, если $xy > 0$;

13) $\log_a\left(x^k\right) = k \log_a|x|$, если k -чётное число,

$\log_a\left(x^k\right) = k \log_a(x)$, если k -нечётное число.

*

*Примеры с логарифмами

* Найдите значение выражения:
* № 1. $(log_2 16) \cdot (log_6 36)$;
* № 2. $7 \cdot 5^{log_5 4}$;
* № 3. $36^{log_6 5}$;
* № 4. $log_4 8$;
* № 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4$;
* № 6. $log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3$;
* № 7. $\frac{log_3 25}{log_3 5}$;
* № 8. $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$;
* № 9. $log_5 9 \cdot log_3 25$;

* № 10. $\frac{9^{log_5 50}}{9^{log_5 2}}$;
* № 11. $(1 - log_2 12)(1 - log_6 12)$;
* № 12. $6\, log_7 \sqrt[3]{7}$;
* № 13. $\frac{log_3 18}{2 + log_3 2}$;
* № 14. $\frac{log_3 5}{log_3 7} + log_7 0,2$;
* № 15. $log_{0,8} 3 \cdot log_3 1,25$;
* № 16. $5^{log_{25} 49}$;
* № 17. $\left(log_{\sqrt{7}} 49\right)^2$;
* № 18. $5^{3 + log_5 2}$;
* № 19. $8^{2\, log_8 3}$;
* № 20. $64^{log_8 \sqrt{3}}$;
* № 21. $log_4 log_5 25$;

* № 22. $\frac{24}{3^{\log_3 2}}$;
* № 23. $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$;
* № 24. $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$;
* № 25. $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$;
* № 26. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$;
* № 27. Найдите значение выражения $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$;
* № 28. Найдите значение выражения $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_a b = -2$.

*

*Простейшие логарифмические уравнения

*Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида:

*$\log_a x = b$; $\log_a f(x) = b$; $\log_a f(x) = \log_a u(x)$,

*где a и b – действительные числа,

*$a \neq 1$; $a > 0$; $f(x)$, $u(x)$ - выражения, содержащие x.

*

*Методы решения простейших логарифмических уравнений

*1. По определению логарифма.

*А) Если $a \neq 1$, $a > 0$, то уравнение $log_a f(x) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

*В) Уравнение $log_{a(x)} f(x) = b$ равносильно системе

*$$\begin{cases} a(x)^b = f(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

*

2. Метод потенцирования.

* А) Если $a \neq 1, \quad a > 0$, то уравнение $log_a f(x) = log_a u(x)$
* равносильно системе $\begin{cases} f(x) = u(x), \\ u(x) > 0 \ (\text{или } f(x) > 0). \end{cases}$

* В) Уравнение $log_{a(x)} f(x) = log_{a(x)} u(x)$ равносильно системе

* $$\begin{cases} f(x) = u(x), \\ u(x) > 0 \ (\text{или } f(x) > 0), \\ a(x) > 0, \quad a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - u(x)}{a(x) - 1} = 0, \\ u(x) > 0 \ (\text{или } f(x) > 0), \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

* *Решение простейших логарифмических уравнений

* № 1. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{15}(5x-25)=2}$.
* *Решение.*
* $log_{15}(5x-25)=2$; $5x-25=15^2$; $5x-25=225$; $5x=200$; $x=40$.
* *Ответ.* 4.

* № 2. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{2,5}(6x+11)=log_{2,5}(11x+6)}$.
* *Решение.*
* $log_{2,5}(6x+11)=log_{2,5}(11x+6)$; $6x+11=11x+6$; $5x=5$; $x=1$.
* *Ответ.* 1.

* № 3. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{2x-1}(3x+16)=2}$.
* *Решение.*
* $log_{2x-1}(3x+16)=2 \iff \begin{cases} (2x-1)^2=3x+16, \\ 2x-1\neq 1, \\ 2x-1>0; \end{cases}$
* $\iff \begin{cases} 4x^2-4x+1=3x+16, \\ x\neq 1, \\ x>\frac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2-7x-15=0, \\ x\neq 1, \\ x>\frac{1}{2}; \end{cases} \iff$
* $\begin{cases} x_1=-1{,}25\,, \quad x_2=3\,, \\ x\neq 1, \\ x>\frac{1}{2}\ ; \end{cases} \iff x=3\,.$
* *Ответ.* 3.

* № 4. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{x+1}(x+4) = log_{x+1}(x^2+4x)}$.

* *Решение.*

* $log_{x+1}(x+4) = log_{x+1}(x^2+4x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = x^2+4x\ , \\ x+4 > 0, \\ x+1 \neq 1,\ x+1 > 0; \end{cases}$

* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4\ ,\ \ x_2 = 1\ , \\ x > -1, \\ x \neq 0\ ; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1\ .$

* *Ответ.* 1.

* Методы решения логарифмических уравнений
* 1. Метод потенцирования.
* 2. Функционально-графический метод.
* 3. Метод разложения на множители.
* 4. Метод замены переменной.
* 5. Метод логарифмирования.

Особенности решения логарифмических уравнений

* Применять простейшие свойства логарифмов.
* Распределять слагаемые, содержащие неизвестные, при применении простейших свойств логарифмов, таким образом, чтобы не возникали логарифмы отношений.
* Применять цепочки логарифмов: цепочка раскрывается на основании определения логарифма.
* Применение свойств логарифмической функции.

* № 1. Решите уравнение $\boldsymbol{log_5((x-3)(x-5)) + log_5\frac{x-5}{x-3} = log_5(x+25)^2}$.

* *Решение.*

* *Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись свойствами логарифма. Данное уравнение равносильно системе:*

* $$\begin{cases} log_5\left((x-3)(x-5)\cdot\frac{x-5}{x-3}\right) = log_5(x+25)^2, \\ (x-3)(x-5) > 0, \\ x+25 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $$\begin{cases} \log_5(x-5)^2 = \log_5(x+25)^2, \\ x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ x \neq -25. \end{cases}$$

* *Решим первое уравнение системы:*
* $(x-5)^2=(x+25)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2-(x+25)^2=0 \Leftrightarrow$
  $(x-5-x-25)(x-5+x+25)=0 \Leftrightarrow -30\cdot(2x+20)=0$
  $\Leftrightarrow 2x+20=0 \Leftrightarrow x=-10$.
* *Учитывая, что* $x\in(-\infty;3)\cup(5;+\infty)$ *и* $x\neq -25$, *получаем* $x=-10$.
* *Ответ.* -10.

* № 2. Решите уравнение $\boldsymbol{log_2 log_{0,5} log_{625}(x^2 + x - 1) = 1}$.
* *Решение.*
* $log_2 log_{0,5} log_{625}(x^2 + x - 1) = 1$.
* *Воспользуемся определением логарифма, получаем* $log_{0,5} log_{625}(x^2 + x - 1) = 2 \Leftrightarrow log_{625}(x^2 + x - 1) = 0{,}25 \Leftrightarrow$ $x^2 + x - 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
* *Выполним проверку, подставляя найденные значения переменной в квадратный трёхчлен* $x^2 + x - 1$, *получаем* $(-3)^2 + (-3) - 1 = 5 > 0$, $2^2 + 2 - 1 = 5 > 0$, *следовательно, значения* $x = -3; x = 2$ *являются корнями данного уравнения.*
* *Ответ.* $-3; 2$.

* № 3. Решите уравнение
$\boldsymbol{log_2\left(x^2-4x+3\right)-log_2(x-1)\cdot log_2(x-3)=1.}$

* *Решение.*

* *Находим область определения уравнения:*

* $$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x-1>0, \\ x-3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3)>0, \\ x>1, \\ x>3; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty), \\ x>3; \end{cases} \Leftrightarrow x>3\ .$$

* *Преобразовываем данное уравнение*

* $$log_2\big((x-1)(x-3)\big)-log_2(x-1)\cdot log_2(x-3)=1 \Leftrightarrow$$
$$log_2(x-1)+log_2(x-3)-log_2(x-1)\cdot log_2(x-3)=1 \Leftrightarrow$$
$$log_2(x-1)(1-log_2(x-3))+log_2(x-3)-1=0 \Leftrightarrow$$

* $log_2(x-1)(1-log_2(x-3))-(1-log_2(x-3))=0 \Leftrightarrow$
* $(1-log_2(x-3))\cdot(log_2(x-1)-1)=0 \Leftrightarrow$
* $\left[\begin{array}{l}1-log_2(x-3)=0,\\ log_2(x-1)-1=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x-3)=1,\\ \log_2(x-1)=1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=2,\\ x-1=2;\end{array}\right. \Leftrightarrow$
* $\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=3.\end{array}\right.$
* *Учитывая область определения уравнения, получаем* $x=5$.
* *Ответ.* 5.

* № 4. Решите уравнение $\frac{-3\log_9 x}{1-\log_3 x} = \log_{\frac{1}{3}}(27x^2)$.
* *Решение.*
* *Область определения уравнения:*
* $x > 0$.
* *Преобразуем данное уравнение:*
* $\frac{-3\log_9 x}{1-\log_3 x} = \log_{\frac{1}{3}}(27x^2) \Leftrightarrow \frac{-3\log_{3^2} x}{1-\log_3 x} = \log_{3^{-1}}(27x^2) \Leftrightarrow$
* $\frac{-1{,}5\log_3 x}{1-\log_3 x} = -\log_3(27x^2) \Leftrightarrow \frac{1{,}5\log_3 x}{1-\log_3 x} = \log_3(27x^2) \Leftrightarrow$
* $\frac{1{,}5\log_3 x}{1-\log_3 x} = \log_3 27 + \log_3(x^2) \Leftrightarrow \frac{1{,}5\log_3 x}{1-\log_3 x} = 3 + 2\log_3 x$.
* *Решаем методом замены переменной.*
* *Пусть* $\log_3 x = a$ *, тогда уравнение принимает вид:*

* $\frac{1,5a}{1-a} = 3 + 2a$.
* Учитывая, что $1 - a \neq 0,\ a \neq 1$, получаем уравнение
* $1,5a = (3 + 2a)(1 - a) \Leftrightarrow 3a = 2(3 + 2a)(1 - a) \Leftrightarrow$
* $3a = 6 - 2a - 4a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 5a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$
* Обратная замена:
* $\left[\begin{array}{l} log_3 x = -2, \\ log_3 x = \frac{3}{4}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{-2}, \\ x = 3^{\frac{3}{4}}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{9}, \\ x = \sqrt[4]{27}. \end{array}\right.$
* Ответ. $\frac{1}{9}$, $\sqrt[4]{27}$.

* № 5. Решите уравнение $\mathbf{5^{x^2-3} \cdot 6^x = 180}$.
* *Решение.*
* *Можно угадать корень данного уравнения:* $x = 2$.
* *Проверяем:* $5^{2^2-3} \cdot 6^2 = 180;\ 5 \cdot 36 = 180;\ 180 = 180.$
* *Верное равенство, следовательно,* $x = 2$ *является корнем данного уравнения.*
* *А теперь:*
* **СЛОЖНО – ЛОГАРИФМИРУЙ!**
* *Прологарифмируем обе части уравнения по основанию* 5 .
* *Получаем равносильное уравнение:*
* $log_5\left(5^{x^2-3} \cdot 6^x\right) = log_5 180 \Leftrightarrow$
  $(x^2-3)\log_5 5 + x\log_5 6 = \log_5 36 + \log_5 5 \Leftrightarrow$
* $x^2 - 3 + x\, log_5 6 = 2\, log_5 6 + 1 \Leftrightarrow$
  $x^2 + x\, log_5 6 - 4 - 2\, log_5 6 = 0$.

* *Получили квадратное уравнение, у которого известен один корень.*
* *По теореме Виета находим сумму корней:*
* $2 + x = -log_5 6$, *следовательно, находим второй корень:*
* $x = -2 - log_5 6$.
* *Ответ.* $-2 - \log_5 6\,; 2.$