

# Преобразование иррациональных выражений.



Преподаватель: Нургалиева Айнаш  
Кенжебековна

## Формулы извлечения корня n-й степени:

1.  $(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[n]{a^n}) = a;$

2.  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$

3.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$

4.  $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$

5.  $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$

6.  $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$

**ВЫ ЗНАЕТЕ:**

Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне  $n$ -й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

**ПРИМЕР**

1. Выполним указанные действия:  $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$ .

*Решение.*  $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 21 \cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10 \cdot 3 = 12 + \sqrt{6}$ .

*Ответ:*  $12 + \sqrt{6}$ .

**ПРИМЕР**

2. Выполним деление:  $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$ .

*Решение.*  $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} =$   
 $= 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$ .

*Ответ:*  $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$ .

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень  $n$ -й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня  $n$ -ой степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если  $n$  — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если  $n$  — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

#### ПРИМЕР

3. Вычислим значение выражения:  $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$ .

*Решение.* Заметим, что  $27 + 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 5)^2$ ;  $27 - 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 5)^2$ . Отсюда

$$\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} = |\sqrt{2} + 5| + |\sqrt{2} - 5| = \sqrt{2} + 5 + 5 - \sqrt{2} = 10.$$

*Ответ:* 10.

**ПРИМЕР**

4. Найдем значение выражения:  $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$ .

*Решение. Первый способ.* Возведем данное выражение в квадрат:

$$\begin{aligned} (\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}})^2 &= 29 - 12\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{(29 - 12\sqrt{5})(29 + 12\sqrt{5})} + 29 + 12\sqrt{5} = \\ &= 58 - 2\sqrt{841 - 144 \cdot 5} = 58 - 2\sqrt{121} = 58 - 22 = 36. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как  $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} > \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$ , то данное выражение отрицательно.

*Второй способ.* Подкоренное выражение является полным квадратом.

$$\begin{aligned} \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} &= \sqrt{29 - 2 \cdot 6\sqrt{5}} = \sqrt{29 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + 3^2} = \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = |2\sqrt{5} - 3| = 2\sqrt{5} - 3. \end{aligned}$$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом:  $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 3 - (2\sqrt{5} + 3) = -6$ .

*Ответ:* -6.

**ПРИМЕР**

5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + 8}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + 8}} \text{ при } x = 3.$$

*Решение.* Область допустимых значений (ОДЗ) переменной  $(2\sqrt{2}; +\infty)$ . Вначале упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2}} = \\ & = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{|x - 2\sqrt{2}|} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{|x + 2\sqrt{2}|}. \end{aligned}$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства  $x - 2\sqrt{2} > 0$ ,  $x + 2\sqrt{2} > 0$ , поэтому можно записать, что  $|x - 2\sqrt{2}| = x - 2\sqrt{2}$  и  $|x + 2\sqrt{2}| = x + 2\sqrt{2}$ . Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{|x - 2\sqrt{2}|} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{|x + 2\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{x - 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{x + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку  $x = 3$  лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо  $x$  его значение 3:

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } & \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \\ & = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 2. \end{aligned}$$

*Ответ: 2.*

**ПРИМЕР**

6. Разложим на множители:  $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$ .

*Решение.* Используем способ группировки:  $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$ .

*Ответ:*  $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$ .

**ПРИМЕР**

7. Сократим дробь:  $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$ .

*Решение.* 
$$\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1 - 2\sqrt{x})} =$$
  

$$= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}$$

*Ответ:*  $\frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}$ .

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ *введения новой переменной*.

**ПРИМЕР**

9. Докажите тождество при допустимых значениях пере-

менной: 
$$\sqrt{\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right)^2 - 8\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + 48} = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2.$$

*Решение.* Введем обозначение  $a + \frac{2}{a} = t$ . Тогда  $a^2 + \frac{4}{a^2} = t^2 - 4$ .

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{(t^2 - 4)^2 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 8t^2 + 16 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 16t^2 + 64} = \sqrt{(t^2 - 8)^2} = |t^2 - 8|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left| \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 8 \right| = \left| a^2 + 4 + \frac{4}{a^2} - 8 \right| = \left| a^2 - 4 + \frac{4}{a^2} \right| = \left| \left(a - \frac{2}{a}\right)^2 \right| = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2.$$

*Ответ:*  $\left(a - \frac{2}{a}\right)^2$ .



В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида  $\sqrt{A + \sqrt{B}}$  (где  $A, B$  — положительные рациональные числа,  $B$  не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем (сложным радикалом)*. Сложный корень  $\sqrt{A + \sqrt{B}}$  может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$


Для доказательства равенства (1) возведем обе части равенства в квадрат, поскольку все корни арифметические.

Квадрат левой части:  $(\sqrt{A + \sqrt{B}})^2 = A + \sqrt{B}.$

Квадрат правой части:  $\left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} + 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} =$$

$$= A + \sqrt{A^2 - (A^2 - B)} = A + \sqrt{B}.$$

Так как при возведении в квадрат левой и правой частей получили одинаковые выражения, то, следовательно, равенство (1) верно. 

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (2)$$

**ПРИМЕР**

10. Вычислим значение выражения:  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ .

*Решение.* Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения:

$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$ . Тогда данное выражение примет вид  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ , где  $A = 3$ ,  $B = 8$ . Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

*Ответ:*  $\sqrt{2} + 1$ .

## Домашнее задание:

Краткий конспект

Выписать и выучить определения

Решить с №11.1( 1;2) по №11.4 (1;2)

### Упражнения

#### А

Выполните действия (11.1—11.2):

$$11.1. 1) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}; \quad 2) \frac{11 + \sqrt{21}}{11 - \sqrt{21}} + \frac{11 - \sqrt{21}}{11 + \sqrt{21}};$$

$$3) \frac{1}{11 - 2\sqrt{30}} - \frac{1}{11 + 2\sqrt{30}}; \quad 4) \frac{5}{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{5}{3 - 2\sqrt{2}}.$$

$$11.2. 1) \sqrt[4]{6 + \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 - \sqrt{20}}; \quad 2) \sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt[4]{4 - \sqrt{15}};$$

$$3) (\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28}; \quad 4) (3\sqrt{5} + \sqrt{15})^2 - 10\sqrt{27}.$$

11.3. Используя формулы сложных корней упростите выражение:

$$1) \sqrt{5 + \sqrt{24}}; \quad 2) \sqrt{6 - \sqrt{20}}; \quad 3) \sqrt{7 - \sqrt{13}}; \quad 4) \sqrt{8 + \sqrt{28}};$$

$$5) \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}; \quad 6) \sqrt{6 + 3\sqrt{3}}; \quad 7) \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}; \quad 8) \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}.$$

$$11.4. \text{ Упростите выражение: } \left( \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} - 3} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} + 3} \right) : \frac{2m}{m - 6\sqrt{m} + 9}.$$