

ГИДРОСТАТИКА

Поверхность раздела между жидкостью и газообразной средой называется **свободной поверхностью жидкости.**

Жидкость может находиться в **абсолютном или относительном покое.** В гидростатике рассматриваются законы равновесия жидкости (газа).

Если жидкость (газ) находится в состоянии покоя относительно стенок сосуда, в котором она заключена, а сосуд покоится или движется с постоянной скоростью относительно Земли, то покой называется **абсолютным**. Если жидкость покоится относительно стенок сосуда, а сосуд движется относительно Земли с ускорением, то покой называется **относительным**. Движение жидкости в случае относительного

Уравнение равновесия. При равновесии ($u = 0$) из уравнения неразрывности получаем $dp/dt = 0$. Это означает что в принятой системе отчета поле плотности стационарно, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho F_x = \frac{dp}{dx}, \\ \rho F_y = \frac{dp}{dy}, \\ \rho F_z = \frac{dp}{dz}, \end{array} \right. y, z).$$

Уравнение равновесие Эйлера

Гидростатическим давлением (г.с.д.)

называют предел отношения силы ΔP , действующей на элементарную площадку, к площади этой площадки $\Delta \omega$, которая, в свою очередь, стремится к нулю:

$$p = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta \omega}$$

Давление в системе СИ измеряется в паскалях:

$$***Па = Н / м^2 .***$$

Связь единиц давления в различных системах измерения такая:

$$***100000 Па = 0,1 МПа = 1 кгс/см^2 = 1 ат = 10 м вод. Ст.***$$

г.с.д. характеризует внутреннее напряжение сжатия и обладает следующими свойствами:

- 1.) г.с.д. всегда направлено по внутренней нормали к площадке действия;
- 2.) г.с.д. в любой точке жидкостной системы по всем направлениям одинаково, т. е. не зависит от ориентации в пространстве площадки, на которую оно действует.

Абсолютное (или полное) гидростатическое давление p_A в данной точке по основному уравнению гидростатики равно

$$P_A = P_0 + \rho g h_A$$

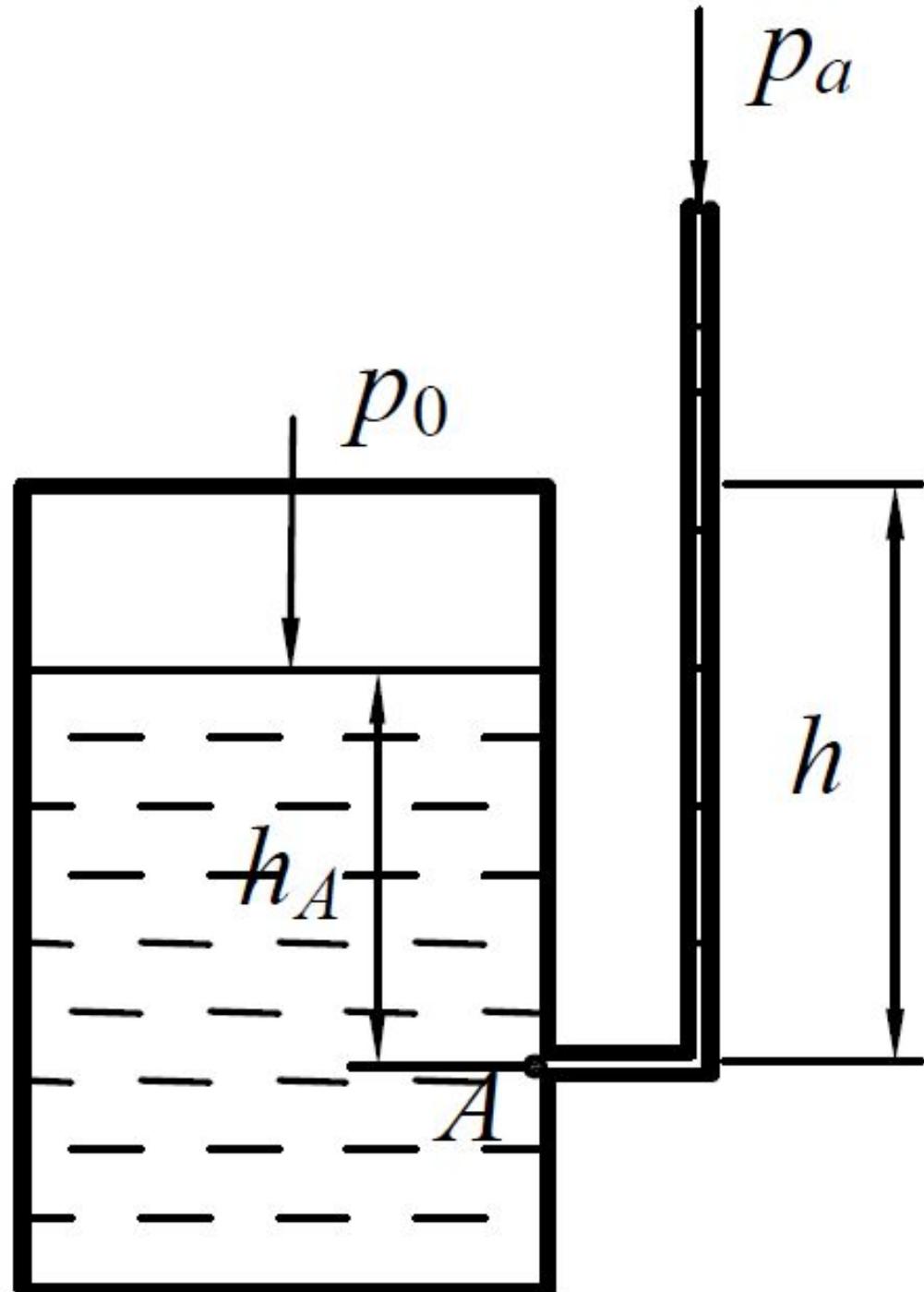
где p_0 – **поверхностное давление** (давление на свободной поверхности жидкости); $\rho g h_A$ – **весовое давление** (вес столба жидкости высотой h_A с площадью поперечного сечения, равной единице); ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; h_A – глубина погружения данной точки под свободную поверхность.

Избыточное давление (манометрическое) представляет собой разность между абсолютным давлением и атмосферным:

$$P = P_A - P_a$$

В обычных технических расчётах **атмосферное давление** p_a принимают равным одной технической атмосфере (1 ат = 1 кгс/см²). В случае, когда поверхностное давление равняется атмосферному ($p_0 = p_a$) избыточное давление определяется по формуле

$$p = \rho g h$$



Абсолютное давление - величина, измеренная относительно давления, равного абсолютному нулю. Другими словами, это давление относительно абсолютного вакуума (p отсчитывается от 0). Барометрическое давление - это абсолютное давление земной атмосферы. Свое название этот тип давления получил от измерительного прибора барометра, который, как известно, определяет атмосферное давление в определенный момент времени при определенной

Относительно этого давления определяются избыточное давление и вакуум. Манометрическим давлением называется разность между абсолютным давлением и барометрическим. Избыточное давление - положительная разность между измеряемым давлением и барометрическим. То есть избыточное давление - это величина, на которую измеряемое давление больше барометрического. Вакуум, или, по-другому, вакуумметрическое давление - это величина, на которую измеряемое давление меньше барометрического. Если избыточное давление обозначается в положительных единицах, то вакуум - в отрицательных (или подразумевает отрицательный знак, когда имеется в виду вакуум). Таким образом, абсолютное давление

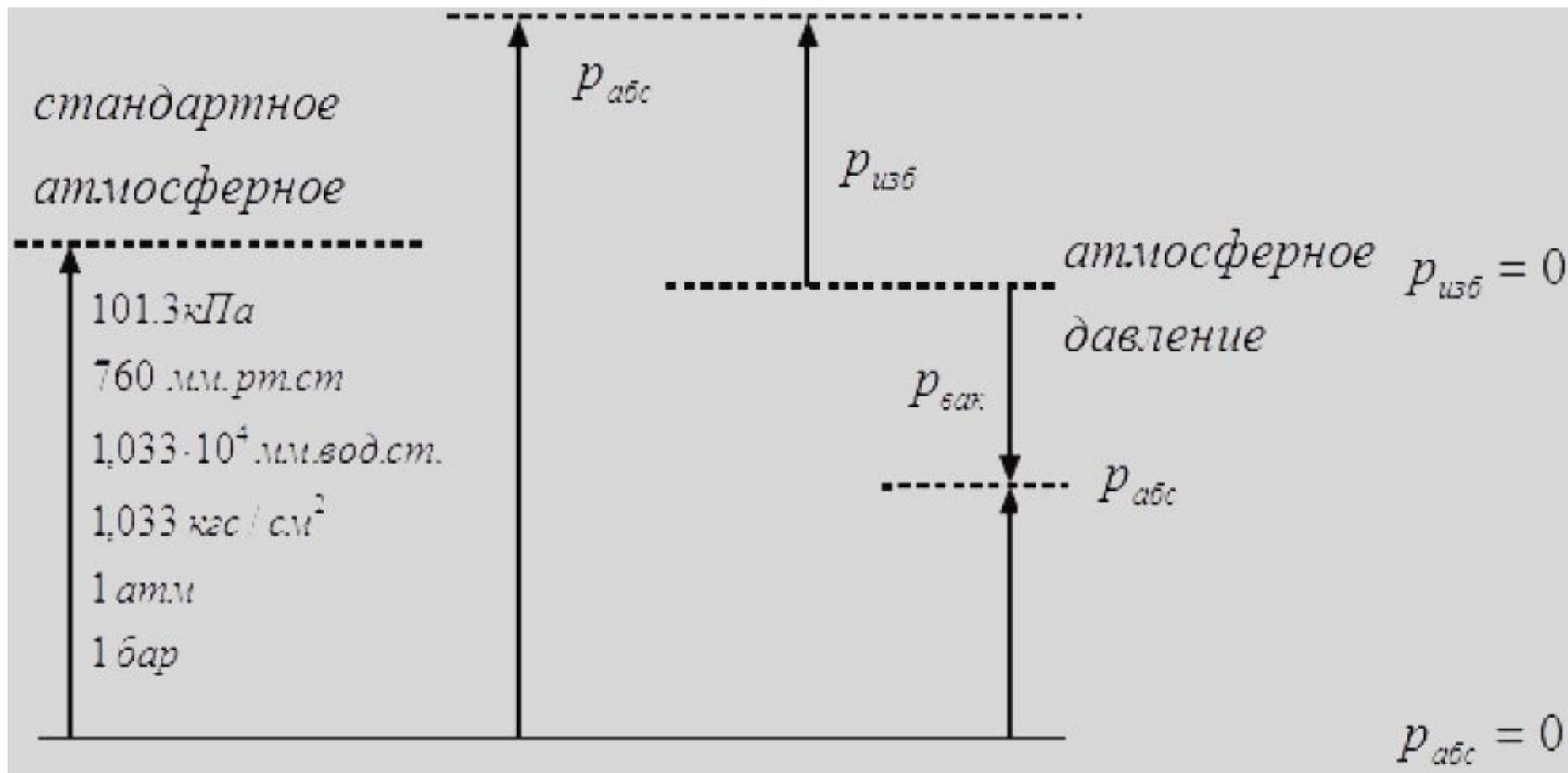
$$P_{абс} = P_{изб} + P_{атм}$$

$$P_{абс} = P_{атм} + P_{вак}$$

Атмосферное давление изменяется с высотой относительно уровня моря. Атмосферное давление на уровне моря чаще упрощают его как $P_{атм}$. Также его принято измерять миллиметрами ртутного или водного столба. Для вычисления давления столба жидкости используют формулу

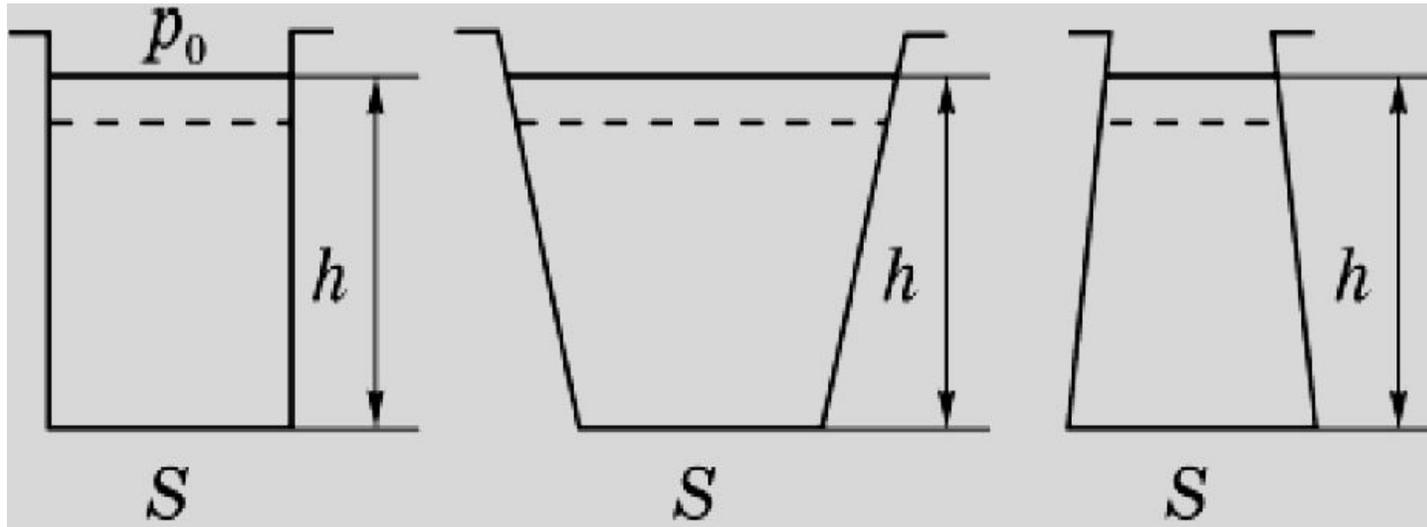
$$P = \rho g h$$

где ρ - плотность жидкости; h - высота столбика. На рис. наглядно проиллюстрированы виды давлений и их связь с атмосферным давлением.



Шкала давлений

сила давления жидкости на дно сосуда с площадью основания не зависит от его формы. Данный результат обычно называется парадоксом Паскаля



Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидко

$$F = \rho_{жс} g V$$

**Выведем закон сохранения энергии в гидростатике.
Вернемся к последнему выражению из**

$$dp = -\rho g dz \rightarrow dp + \rho g dz = 0 \rightarrow \frac{p}{\rho g} + z = \text{const}$$

В таком виде основной закон гидростатики представляет собой частный случай выражения основного закона сохранения энергии (сумма потенциальной и кинетической энергии постоянна): т. к. жидкость неподвижна, то ее кинетическая энергия равна нулю и, следовательно, потенциальная энергия жидкости в каждой точке неподвижного объема является величиной постоянной и ее значение определяется только положением точки по вертикали. Первый член уравнения определяет потенциальную энергию гидростатического давления в каждой точке объема жидкости, а второй член - потенциальную энергию положения данной точки. Необходимо помнить, что в данной интерпретации величина энергии представляется ее удельным значением, отнесенным к единице силы тяжести, и выражается в системе СИ в метрах столба жидкости.

Пример. Переведите 230 кПа в мм. рт. столба и мм в. столба.

Решение. Гидростатическое давление

$$P = \rho g h$$

$$h = \frac{P}{\rho g}$$

Для ртути:

$$h = \frac{230000}{13600 \cdot 9.81} \approx 1.723 \text{ м} = 1723 \text{ мм.рт.ст.}$$

Жидкость находится в равновесии только тогда, когда система массовых сил, действующих на неё, будет иметь потенциал. Это состояние системы характеризуется уравнением равновесия (уравнением $\int \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp$

где X, Y, Z - проекции массовых сил, отнесённых к единице массы, на соответствующие направления, м/с^2 ; dp - полный дифференциал давления, Па.

Рассмотрим наиболее важный для практики частный случай равновесия элементарного объёма жидкости, находящейся под действием только сил тяжести (закон Паскаля). Для данного случая уравнение равновесия выглядит следующим образом:

$$p_{\text{абс}} = p_0 + \rho h$$

где $p_{\text{абс}}$ - абсолютное давление, Па; p_0 - давление над свободной поверхностью жидкости, Па; h - глубина погружения рассматриваемого элементарного объёма жидкости, м.

Для случая, когда рассматривается равновесие двух и более элементарных объёмов в покоящейся жидкости, это условие имеет вид (основное уравнение гидрос

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} = H_{ст} = const$$

где z_i - расстояние от плоскости сравнения до рассматриваемой точки (высота положения), м; p_i - манометрическое $\frac{p_i}{\rho g}$ давление в данной точке, Па; $\frac{p_i}{\rho g}$ - пьезометрическая высота, м; $H_{ст}$ - гидростатический напор, м.

Сила суммарного давления, действующего на плоскую поверхность, определяется как аналитическим, так и графоаналитическим методами.

В случае аналитического метода сила суммарного давления $\sum P_n$ определяется из выражения

$$\sum p_n = p_c \omega$$

где p_c - гидростатическое давление в центре тяжести плоской фигуры (поверхности), Па; ω - площадь фигуры, м².

При графоаналитическом методе строят эпюры давления, выражающие закон распределения давления на рассматриваемый элементарный объём, погружённый в жидкость.

Сила суммарного давления, действующего на криволинейную поверхность, определяется тремя взаимно перпендикулярными составляющими: ΔP_x , ΔP_y , ΔP_z . Горизонтальные составляющие ΔP_x и ΔP_y определяются как силы давления на плоскую поверхность, равную проекции данной криволинейной поверхности на соответствующую вертикальную плоскость. Для определения вертикальной составляющей ΔP_z строят тело давления. При этом криволинейная поверхность проектируется вертикально на

Телом давления называется тело, с одной стороны ограниченное криволинейной поверхностью, с другой - пьезометрической плоскостью, а со сторон - вертикальной проектирующей поверхностью. Сила ΔP_z равна весу жидкости, занимающей объём тела давления $V_{\text{тд}}$

$$\Delta P_z = \rho g V_{\text{тд}}$$

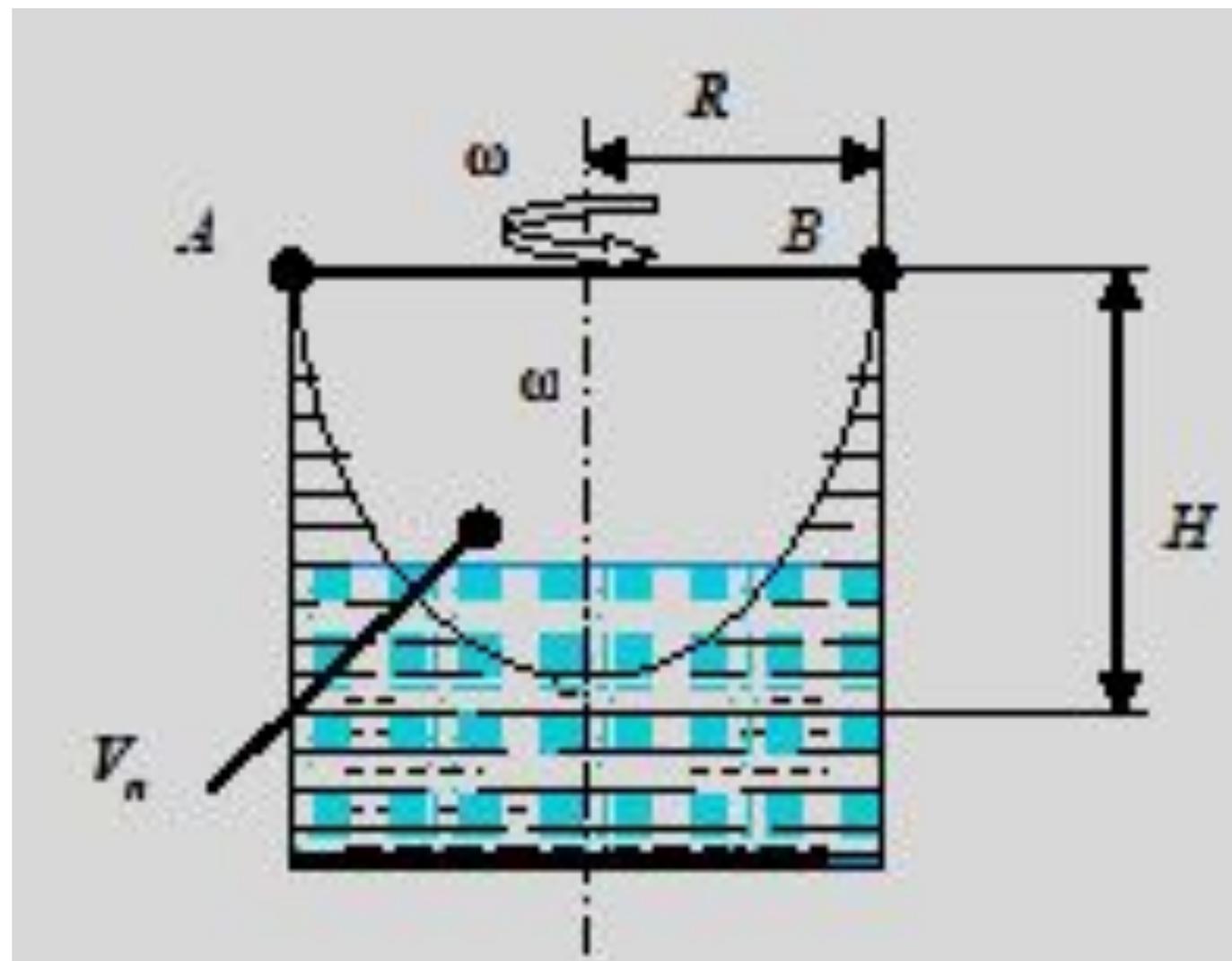
Телом давления называется тело, с одной стороны ограниченное криволинейной поверхностью, с другой - пьезометрической плоскостью, а со сторон - вертикальной проектирующей поверхностью. Сила ΔP_z равна весу жидкости, занимающей объём тела давления $V_{\text{тд}}$

$$\Delta P_z = \rho g V_{\text{тд}}$$

При определении сил суммарного давления жидкости, действующего на сложные поверхности, целесообразно сначала графически суммировать эпюры, а также тела давления, построенные для отдельных частей рассматриваемой поверхности.

Например, при вращении жидкости вместе с цилиндрическим сосудом радиусом R относительно его вертикальной оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω , её поверхность под воздействием центробежных сил принимает форму параболоида вращения ABC , высота H которого определяется из выражения

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$



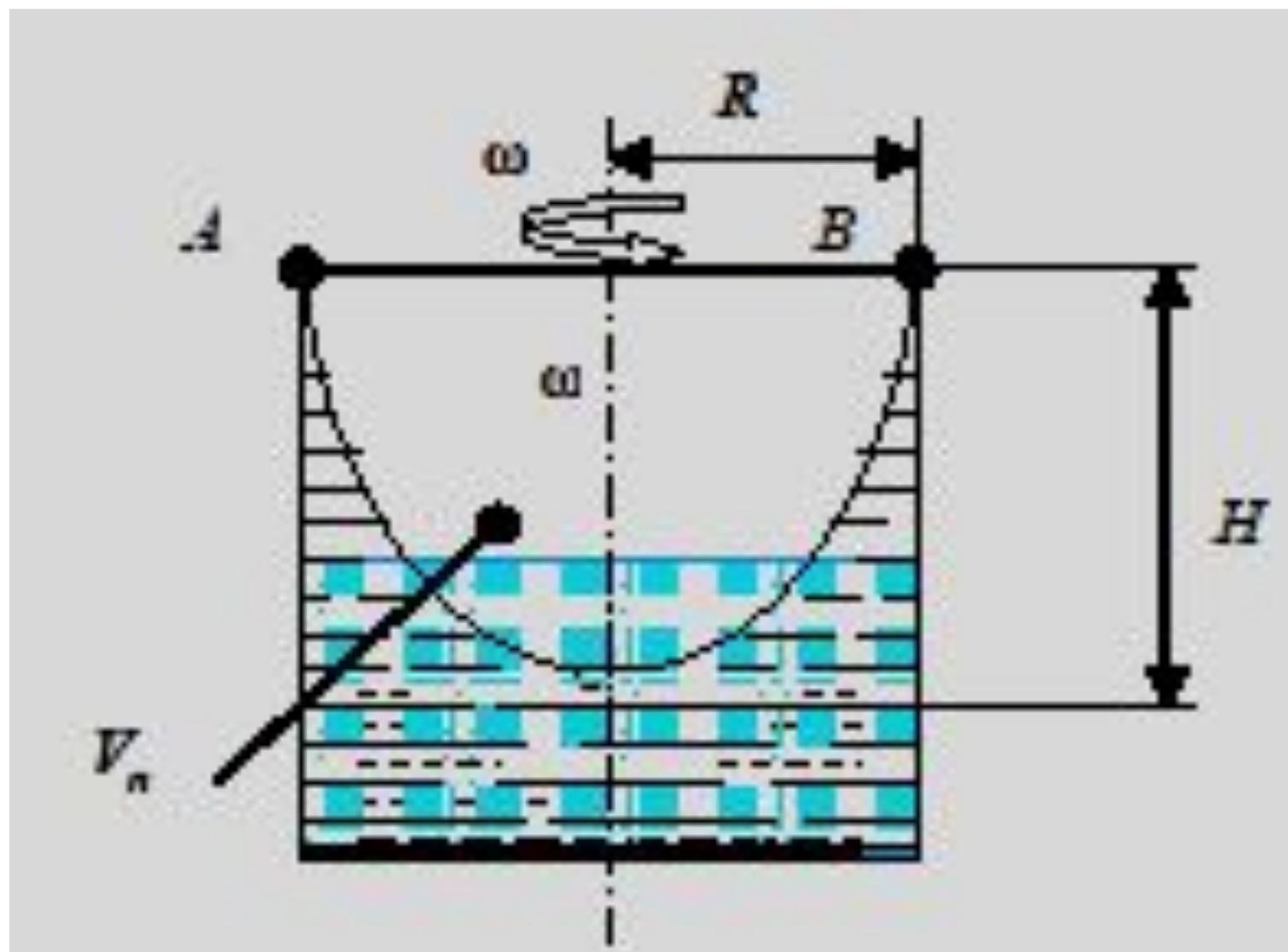
а объём параболоида вращения V_n будет равен

$$V_n = \frac{\pi R^2 H}{2}$$

Когда при вращении жидкости её свободная поверхность пересекает дно резервуара (рис. 3), показанный объём жидкости V определяется из выражений

$$V = \frac{\pi(R^2 - R_1^2)h}{2}$$

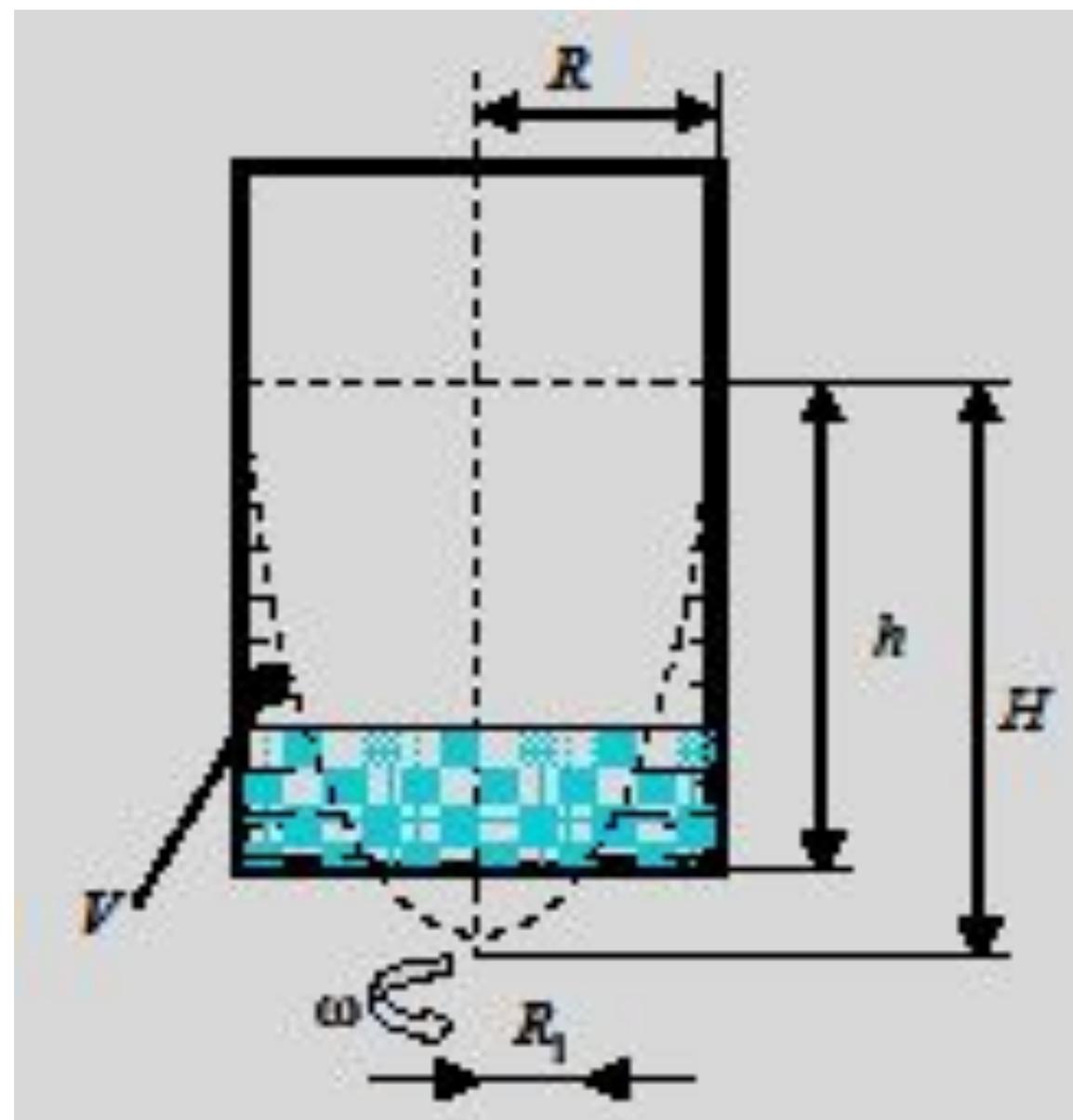
$$V = \frac{\pi g h^2}{\omega^2}$$



Когда при вращении жидкости её свободная поверхность пересекает дно резервуара (рис. 3), показанный объём жидкости V определяется из выражений

$$V = \frac{\pi(R^2 - R_1^2)h}{2}$$

$$V = \frac{\pi gh^2}{\omega^2}$$



Приборы для измерения давления

Различают абсолютное давление $p_{аб}$, манометрическое (или избыточное) p_m ($p_{изб}$) и вакуум $p_{вак}$.

Между указанными давлениями существуют следующие зависимости:

$$p_m(p_{изб}) = p_{аб} - p_{атм}$$

$$p_{вак} = p_{атм} - p_{аб}$$

$$p_{вак} = -p_m(p_{изб})$$

В общем случае расстояние по вертикали до пьезометрической плоскости h_n (пьезометрическая высота) определяется из выражения

$$h_n = \frac{p_{изб}}{\rho g}$$

где $p_{изб}$ - манометрическое давление (или вакуум) в рассматриваемой точке объёма жидкости, Па; ρ - плотность жидкости, кг/м³; g - ускорение свободного падения, м/с²;

Расстояние h откладывается от той точки жидкости, давление в которой равно p , вверх, если оно манометрическое, и вниз - в случае вакуума.

Для измерения давления применяется большое количество различных устройств и приборов. Тип и конструкция их зависит от величины измеряемого давления и той точности, которая должна быть обеспечена в результате измерений. Все приборы, служащие для измерения давления, разделяются на три группы:

- пьезометрами,**
- манометрами,**
- вакуумметрами.**

Пьезометр обычно представляет собой вертикальную стеклянную трубку, нижняя часть которой сообщается с исследуемой точкой в жидкости, где нужно измерить давление (например, точка А на рис. 2), а верхняя её часть открыта в атмосферу. Высота столба жидкости в пьезометре h_p является показанием этого прибора и позволяет измерять избыточное (манометрическое) давление в точке по соотношению

$$P_{\text{изб}} = \gamma h_p$$

Манометры чаще всего применяются механические, реже - жидкостные. Все манометры измеряют не полное давление, а избыточное

$$P_{ман} = P_{изб} = p - P_{атм}$$

Рассмотрим U-образный манометр. В манометре находятся вода и ртуть. Рассмотрим давление в двух точках:

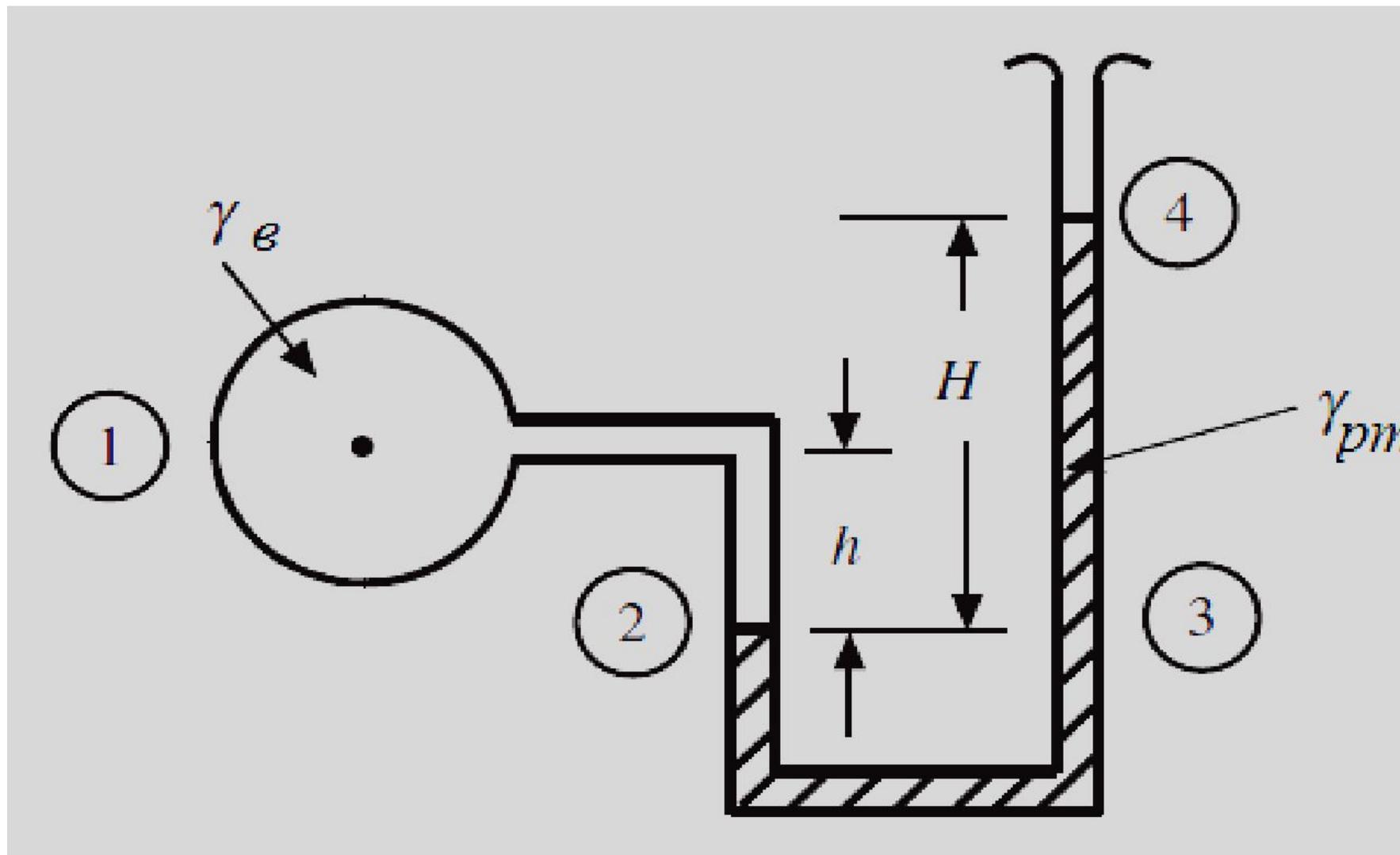
$$p_2 = p_3$$

Данное равенство можно расширить согласно основному закону гидростатики

$$p_1 + \gamma_{\text{в}} h = p_4 + \gamma_{\text{рт}} H$$

**Вычислим избыточное давление в точке 1.
Заметим, что точка 4 находится на
поверхности атмосферного давления,
следовательно, тогда**

$$p_1 = \gamma_{рт} H - \gamma_{с} h$$



U-образная манометрическая трубка с водой и ртутью

напоминает манометр, а показывает он ту долю давления, которая дополняет полное давление в жидкости до величины одной атмосферы. Вакуум в жидкости - это не пустота, а такое состояние жидкости, когда полное давление в ней меньше атмосферного на величину p_v , которая измеряется вакуумметром. Вакуумметрическое давление p_v , показываемое прибором, связано с полным и атмосферным так:

$$p_v = p_{атм} - p$$

Величина вакуума p_v не может быть больше 1 ат , то есть предельное значение $p_e \approx 100000 \text{ Па}$, так как полное давление не может быть меньше абсолютного нуля.

Приведём примеры снятия показаний с приборов:

- пьезометр, показывающий $h_p = 160 \text{ см вод. ст.}$, соответствует в единицах СИ давлениям $p_{изб} = 16000 \text{ Па}$ и $p = 100000 + 16000 = 116000 \text{ Па}$;

- манометр с показаниями $p_{ман} = 2,5 \text{ кгс/см}^2$ соответствует водяному столбу $h_p = 25 \text{ м}$ и полному давлению в СИ $p = 0,35 \text{ МПа}$;

- вакуумметр, показывающий $p_v = 0,04 \text{ МПа}$, соответствует полному давлению $p = 100000 - 40000 = 60000 \text{ Па}$, что составляет 60 % от атмосферного.

Законы Архимеда и Паскаля

Закон Архимеда о подъёмной (архимедовой) силе F_n , действующей на погружённое в жидкость тело, имеет вид

$$F_n = \gamma V_m$$

где V_m - объём жидкости, вытесненной телом

Закон Архимеда гласит: тело, погружённое в жидкость, испытывает со стороны жидкости силу давления, направленную снизу вверх и равную весу жидкости в объёме погруженной части тела. Эта сила давления называется *подъёмной* или *выталкивающей силой* F .

$$F = \rho g W_{\text{погр}}$$

где $W_{\text{погр}}$ – объём погруженной в жидкость части тела.

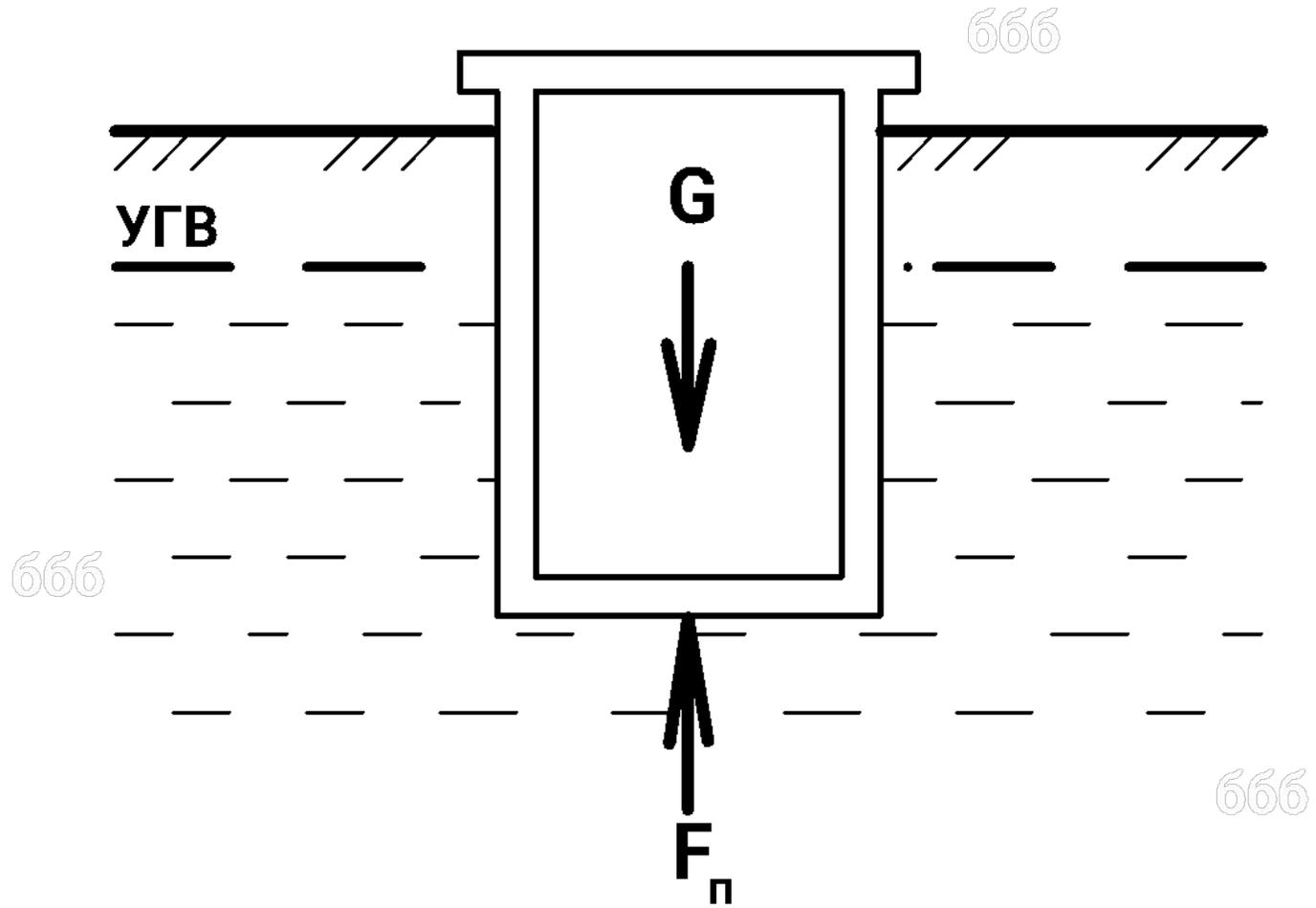


Схема к закону Архимеда

666

характеристика покоящейся жидкости. Напор измеряется в метрах по высоте (вертикали). Гидростатический напор H складывается из двух величин

$$H = z + h_p = z + \frac{p_{изб}}{\gamma}$$

где z - геометрический напор или высота точки над нулевой горизонтальной плоскостью отсчёта напора $O-O$; h_p - пьезометрический напор (высота).

Гидростатический напор H характеризует потенциальную энергию жидкости (её энергию покоя). Его составляющая z отражает энергию положения. Например, чем выше водонапорная башня, тем больший напор она обеспечивает в системе водопровода. Величина h_p связана с давлением. Например, чем выше избыточное давление в водопроводной трубе, тем больше напор в

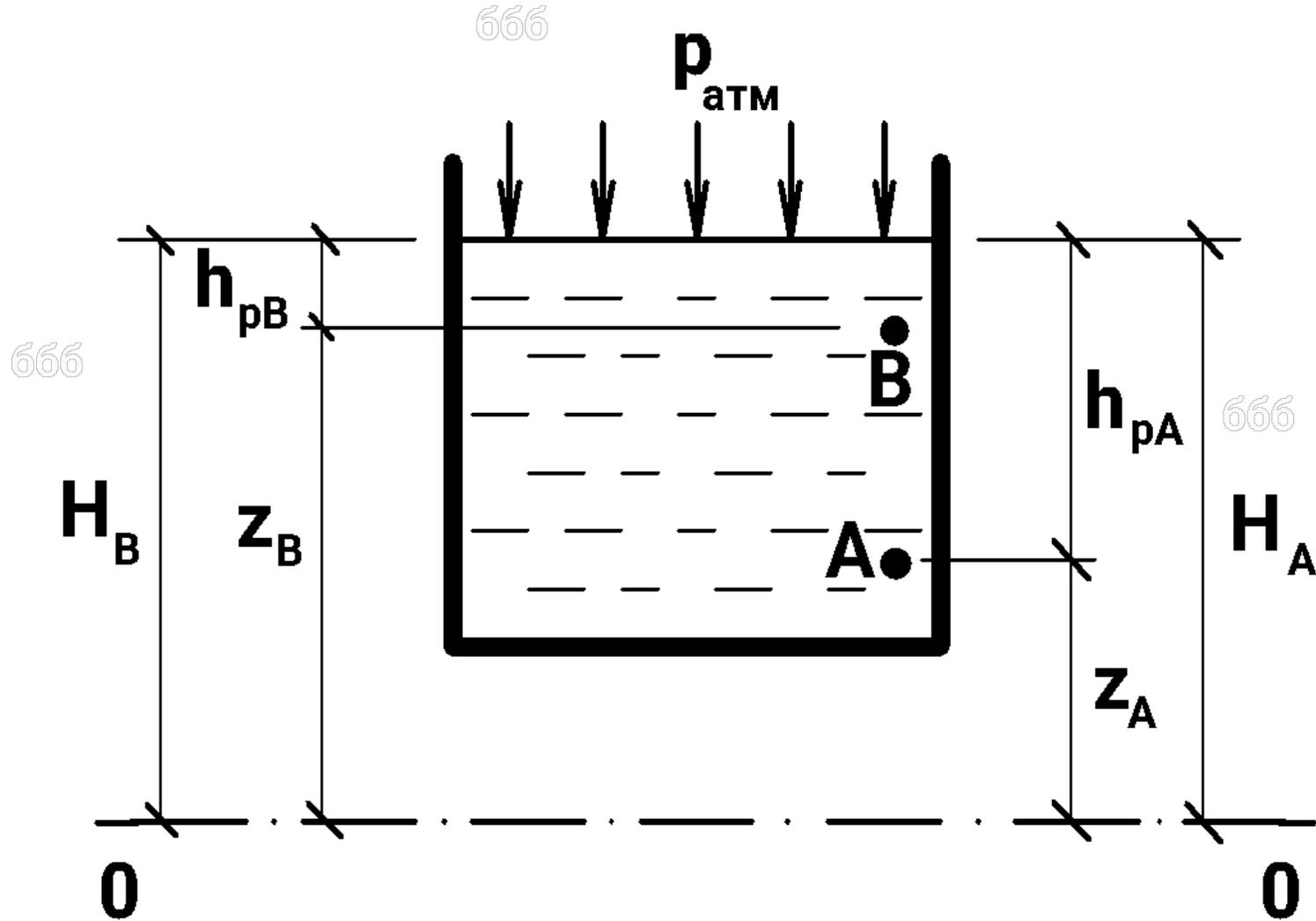


Схема к понятию гидростатического напора

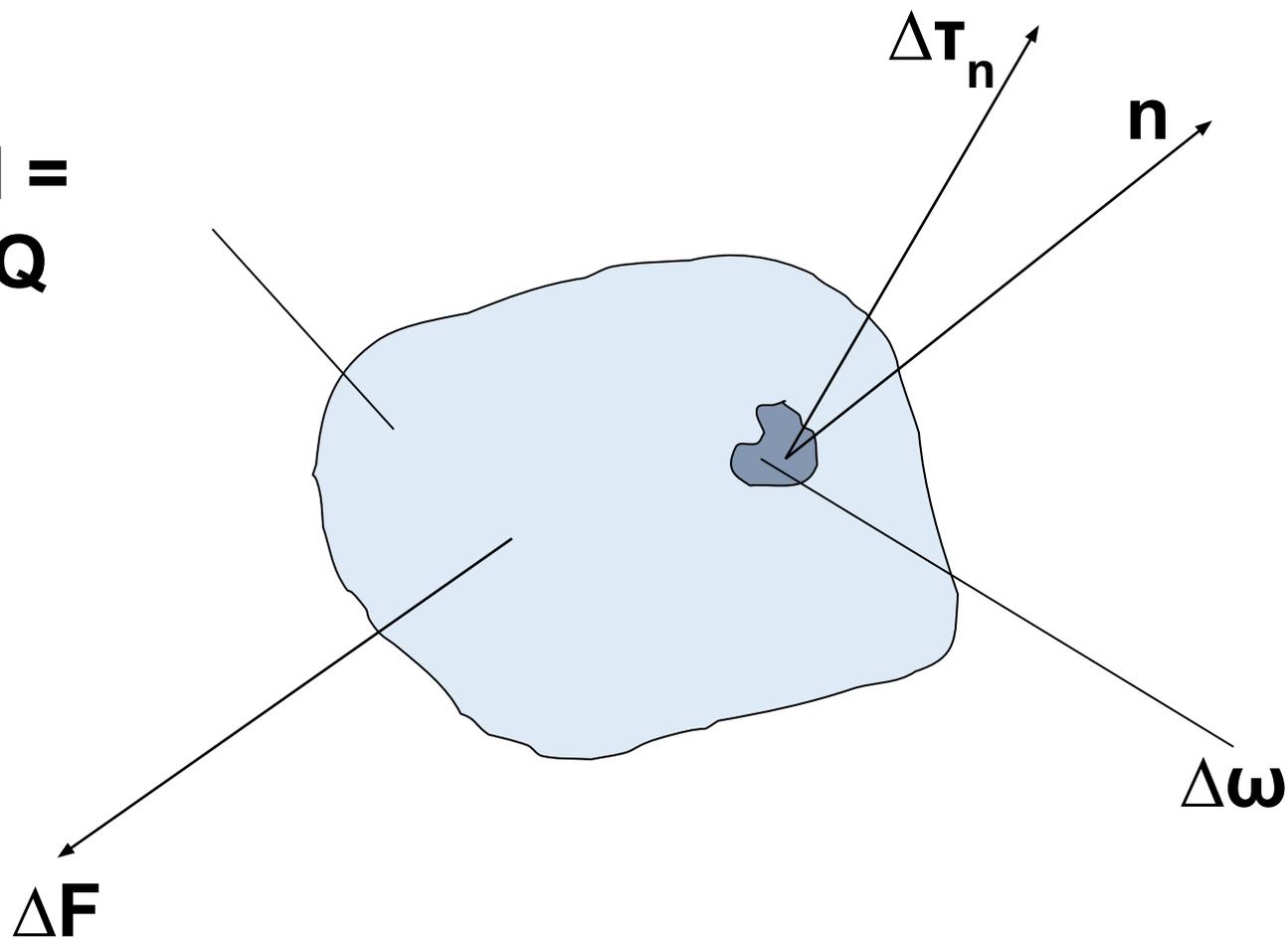
Силы, действующие в жидкости, делятся на массовые, объёмные и поверхностные.

Массовые силы (силы, пропорциональные массе жидкости) - силы, действие которых обусловлено внешним силовым полем (например, полем силы тяжести, электрическим, магнитным и т.д.). Поле массовых сил является внешним по отношению к потоку.

от того, окружён ли этот объём другими жидкими объёмами. Массовые силы действуют одинаково на каждую материальную точку жидкой частицы, следовательно, не могут вызвать её деформацию, а только ускорение (замедление) частицы. Количественно массовая сила характеризуется вектором напряжения массовой силы f и определяется как предел отношения массовой силы ΔF , действующей на частицу, к

$$f(x, y, z, \tau) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta M} \text{ при } \Delta M \rightarrow 0, \text{ м/с}^2.$$

$$\Delta M = \rho \Delta Q$$



Массовые и поверхностные силы, действующие на жидкую частицу (Вектор массовой силы ΔF приложен к центру масс частицы)

В гидродинамике чаще всего массовой силой является сила тяжести

$$f = g = \text{const}$$

где g - вектор ускорения силы тяжести (ускорения свободного падения), м/с^2 .

Силу, действующую на конечный объём Q , можно вычислить интегрированием

$$F = \int_V f \rho dQ$$

Объёмные силы (силы, пропорциональные объёму жидкости).

Массовые и объёмные силы имеют одинаковое значение, если во всех точках исследуемого объёма среды её плотность не изменяется.

Поэтому при исследовании равновесия или движения среды всегда необходимо уточнить изменение её плотности по объёму. В данном курсе, если это не указано, следует считать, что плотность среды по всему объёму постоянна $\rho = \text{const}$.

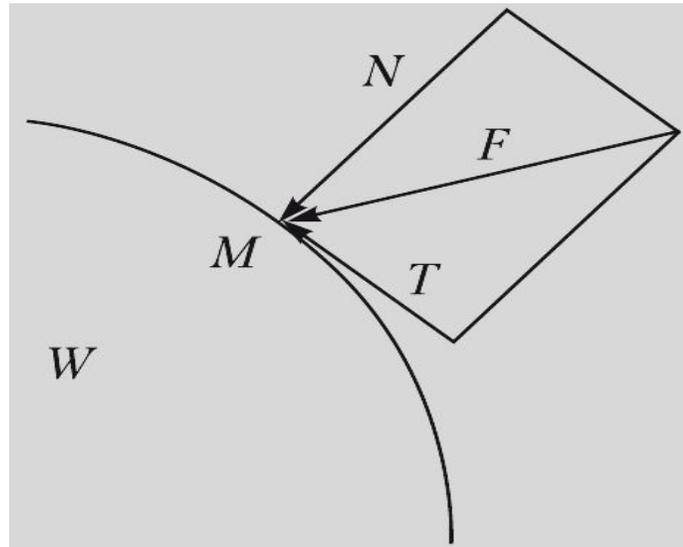
Поверхностные силы (силы, пропорциональные поверхности, на которую они действуют) - силы воздействия окружающей жидкости на рассматриваемый объём. К поверхностным силам относятся силы давления

Объёмные силы (силы, пропорциональные объёму жидкости).

Массовые и объёмные силы имеют одинаковое значение, если во всех точках исследуемого объёма среды её плотность не изменяется.

Поэтому при исследовании равновесия или движения среды всегда необходимо уточнить изменение её плотности по объёму. В данном курсе, если это не указано, следует считать, что плотность среды по всему объёму постоянна $\rho = \text{const}$.

Поверхностные силы (силы, пропорциональные поверхности, на которую они действуют) - силы воздействия окружающей жидкости на рассматриваемый объём. К поверхностным силам относятся силы давления и вязкости.



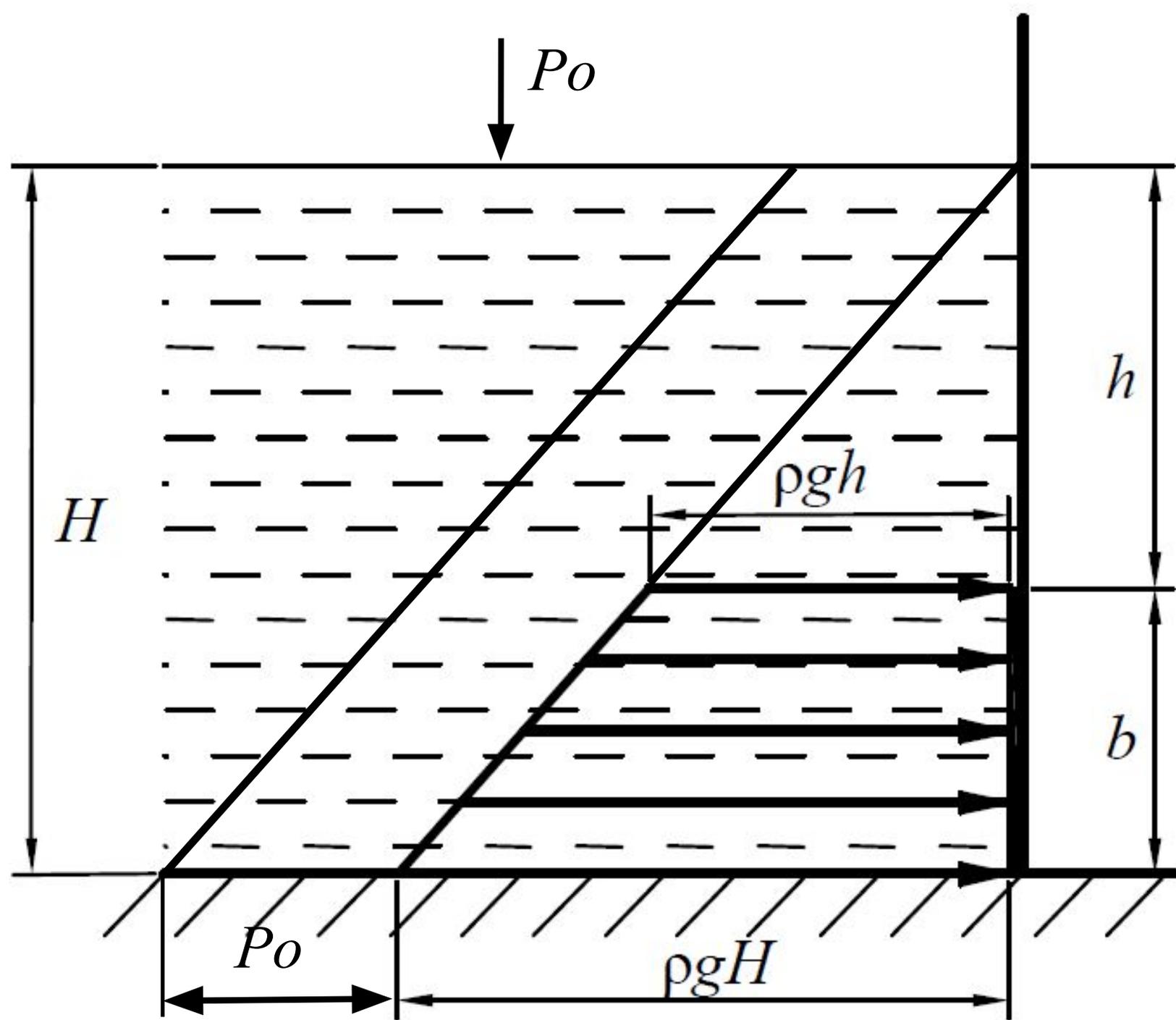
Количественно поверхностная сила характеризуется **вектором напряжения поверхностной силы** τ_n . Например, если на площадку $\Delta\omega$ нормалью \underline{n} действует поверхностная сила $\Delta\tau_n$ то вектор напряжения поверхностной силы τ_n равен

$$\tau_n = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau_n}{\Delta\omega}, \text{ Н/м}^2.$$

Для поверхностной силы давления ΔP_n имеем

$$p_n = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta p_n}{\Delta\omega}, \text{ Н/м}^2.$$

Графически сила г.с.
д. на плоскую
стенку может быть
определена как
объём эпюры г.с.д.



Эюра гидростатического давления графически выражает закон распределения г.с.д. по глубине и строится на основании свойств г.с.д.. Стрелкой указывается направление действия г.с.д. на поверхность. Линейный размер стрелки соответствует числовому значению г.с.д. в данной точке поверхности в принятом масштабе.

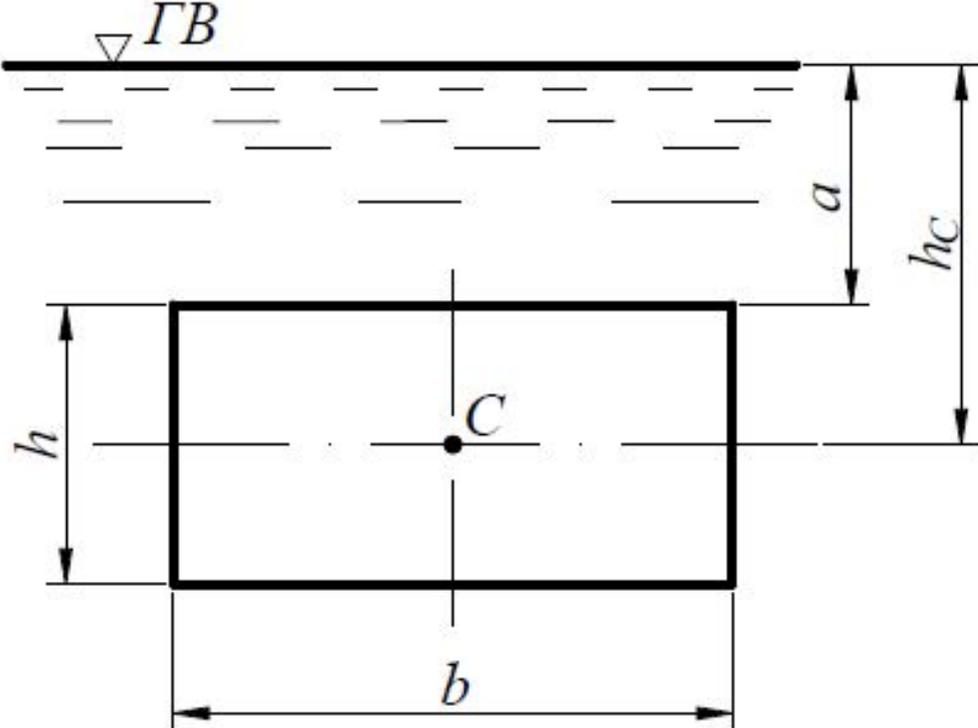
Центром давления называется точка приложения силы P (точка Д). Местоположение этой точки определяется по формуле

$$h_{Д} = h_{с} + \frac{I_{с}}{h_{с}\omega}$$

$$h_D = h_c + \frac{I_c}{h_c \omega}$$

где h_D – глубина погружения центра давления под свободную поверхность жидкости; I_c – момент инерции площади ω относительно оси, проходящей через её центр тяжести.

Моменты инерции I_c (относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C), координаты центра тяжести h_c

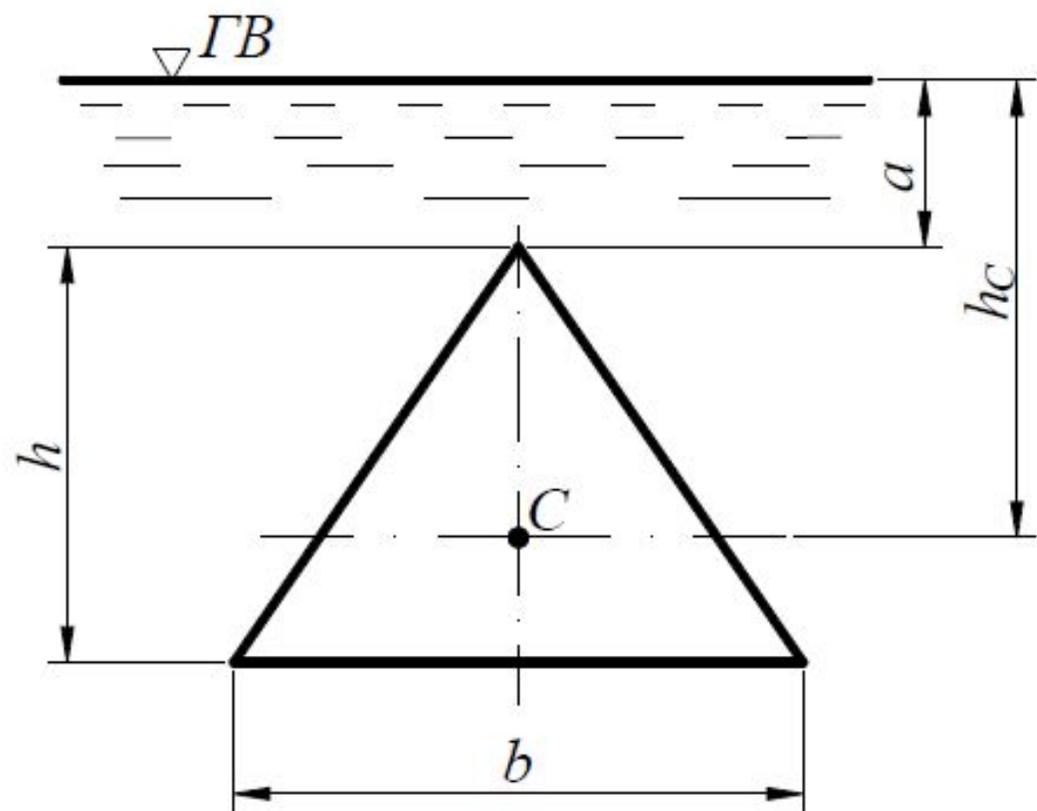
Вид фигуры, обозначения	I_c	h_c	ω
	$\frac{bh^3}{12}$	$a + \frac{h}{2}$	bh

Вид фигуры, обозначения

I_C

h_C

ω



$$\frac{bh^3}{36}$$

$$a + \frac{2}{3}h$$

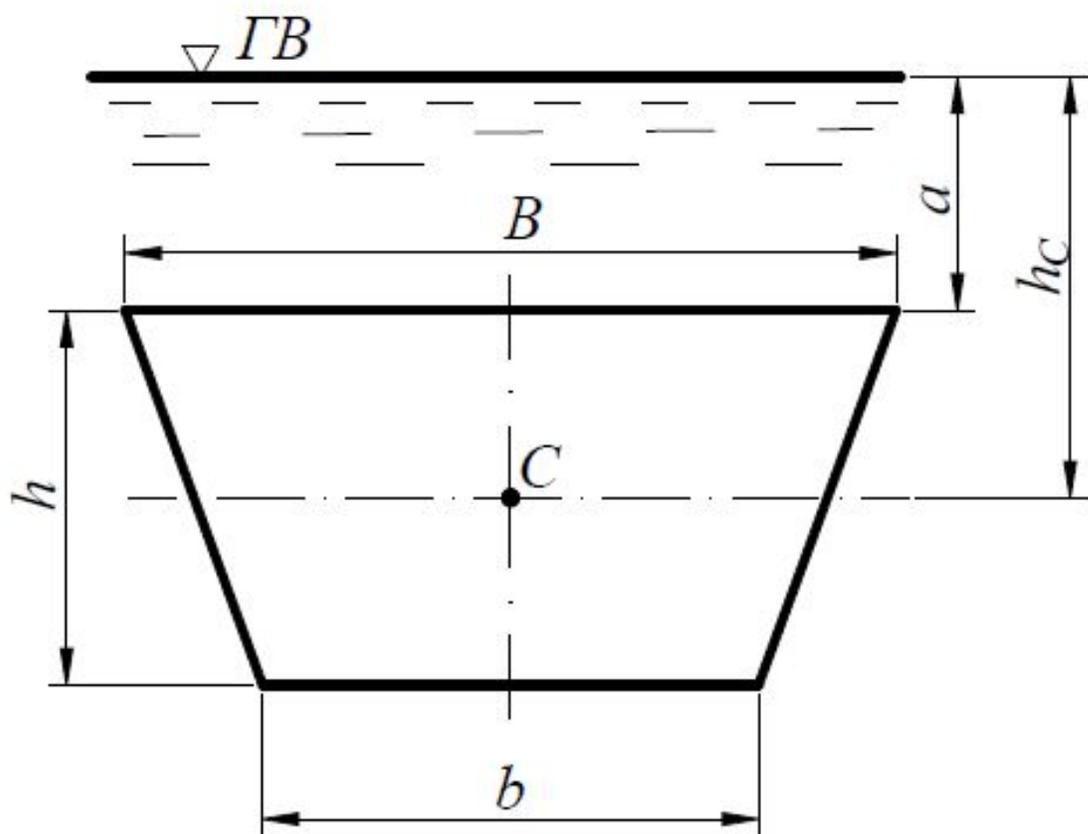
$$\frac{bh}{2}$$

Вид фигуры, обозначения

I_C

h_C

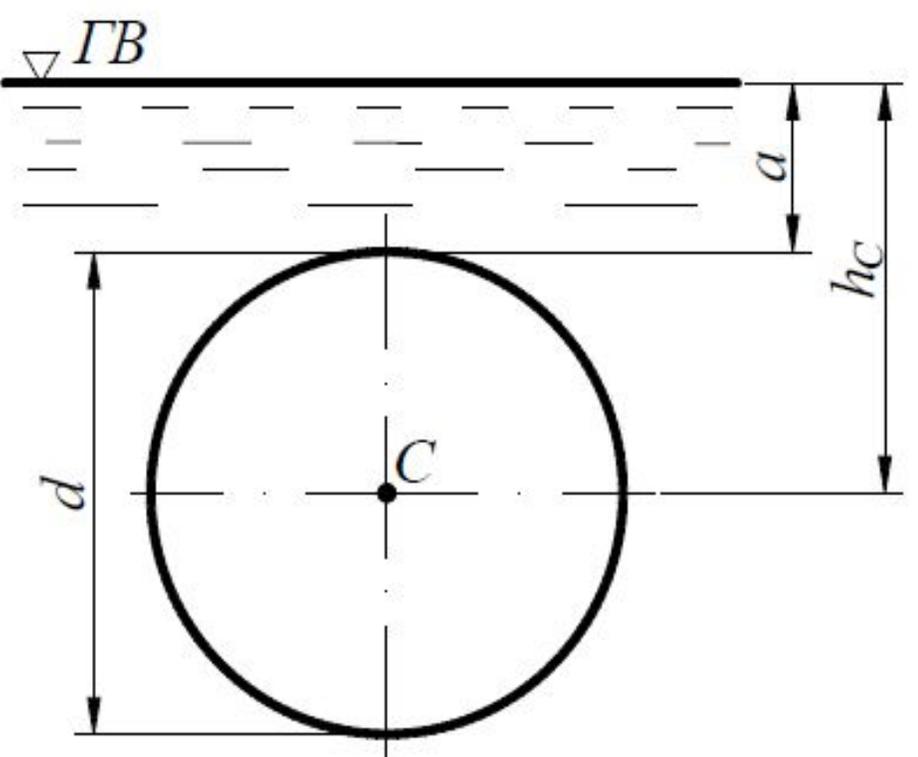
ω

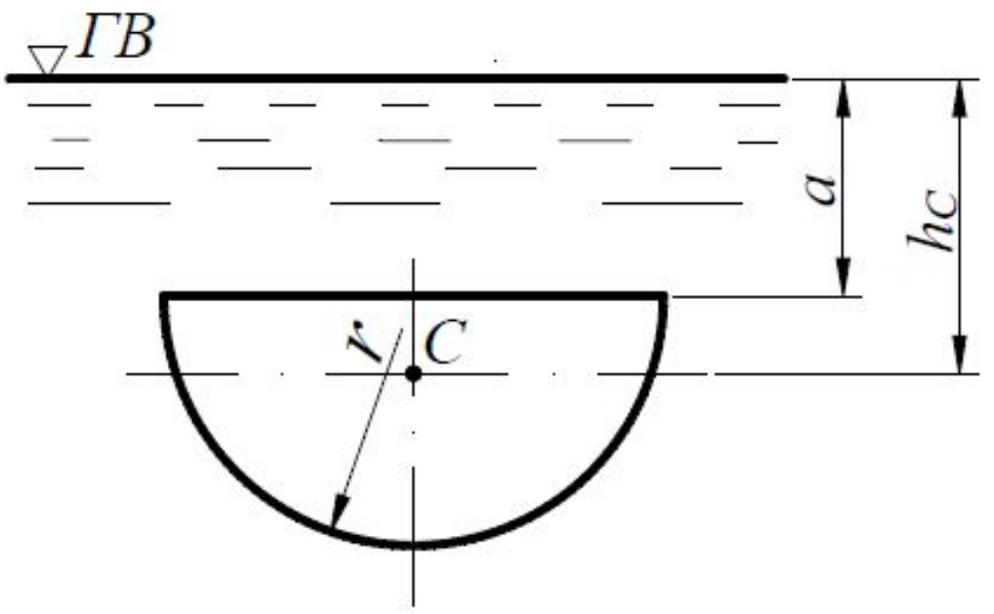


$$\frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{36(B + b)}$$

$$a + \frac{h(B + 2b)}{3(B + b)}$$

$$\frac{(B + b)h}{2}$$

Вид фигуры, обозначения	I_C	h_C	ω
 <p>The diagram shows a circle with diameter d and center C. A horizontal line is drawn above the circle, parallel to its top edge. The distance from the top of the circle to this line is a. The distance from the center C to the line is h_C. A dashed line with a triangle symbol is labeled ∇GB.</p>	$\frac{\pi d^4}{64}$	$a + \frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$

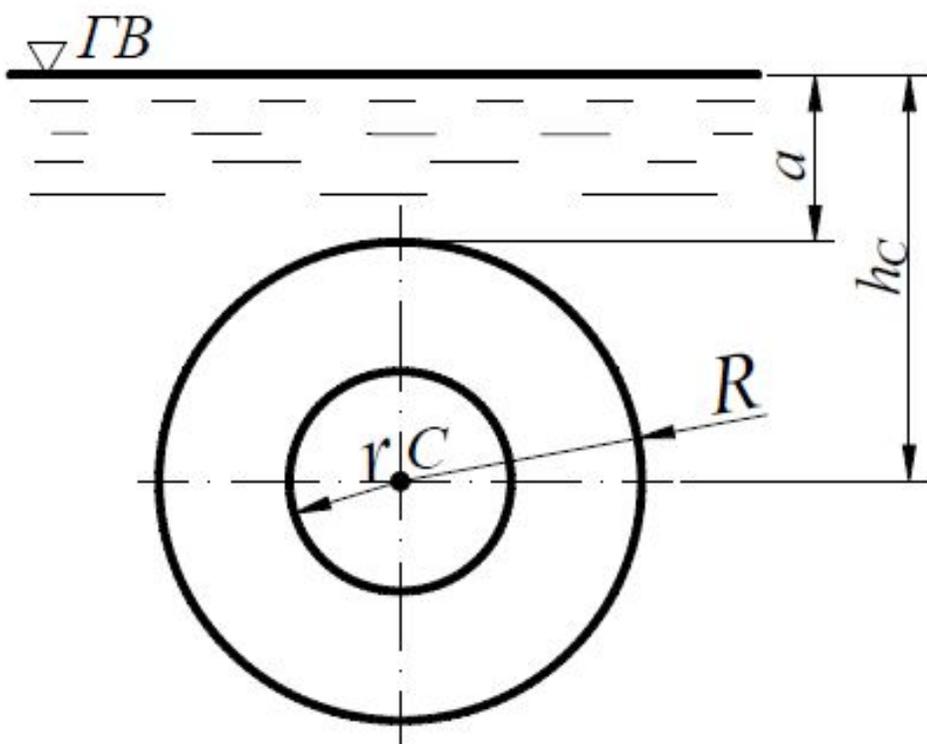
Вид фигуры, обозначения	I_C	h_C	ω
 <p>The diagram shows a semi-circular area with a horizontal line above it. The horizontal line is labeled 'ГВ' with a triangle symbol. The distance from the line to the top of the semi-circle is 'a'. The total height from the line to the bottom of the semi-circle is 'h_C'. The radius of the semi-circle is 'r', and its center of mass is 'C'.</p>	$\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4$	$a + \frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$

Вид фигуры, обозначения

I_C

h_C

ω



$$\frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$$

$$a + R$$

$$\pi(R^2 - r^2)$$

Сила гидростатического давления на криволинейную поверхность определяется как геометрическая сумма проекций силы P (P_x, P_y, P_z) на соответствующие координатные оси Ox, Oy, Oz :

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

Если ось Oz направлена по вертикали, то проекции силы P по координатным осям будут равны:

$$P_{x,y} = \rho g h_c \omega_z$$

$$P_z = \rho g W_{ТД}$$

где ω_z — площадь проекции данной криволинейной поверхности на вертикальную плоскость, нормальную соответственно осям Ox и Oy ; h_c — глубина погружения центра тяжести данной проекции под свободную поверхность жидкости; $W_{ТД}$ — объём тела давления.

В общем случае за тело давления принимается вертикальный столб, опирающийся на заданную криволинейную поверхность и ограниченный сверху плоскостью свободной поверхности жидкости.

На практике приходится иметь дело в основном с цилиндрическими поверхностями, образующая которых является прямой (цилиндрические и секторные щиты, круглые резервуары, трубы и т.п.). Поэтому одна из горизонтальных составляющих, например P_y , приравнивается к нулю.

Направление силы гидростатического давления на цилиндрическую поверхность P определяется углом φ , образуемым вектором P и горизонтальной плоскостью. Угол φ может быть определен через тригонометрическую функцию

$$\operatorname{tg}\varphi = P_z / P_x$$

Давление жидкости на стенки круглой трубы p в гидравлических расчётах принимают одинаковым по всему её поперечному сечению вследствие малости её весового давления. Сила гидростатического давления на стенку определяется по формуле

$$P = dlp$$

где d – диаметр трубы; l – длина трубы.

Для круглой трубы справедливо следующее равенство:

$$pld = 2le\sigma$$

где σ – допускаемое напряжение на растяжение стенок; e – толщина стенки трубы (или резервуара цилиндрической формы). Тогда

$$e = pd / 2\sigma$$

Учитывая несовершенство отливки чугуновых труб, ржавление стальных труб, расчётную толщину стенки трубы увеличивают на Δe , равное (3÷7) мм. Толщину стенок клёпаных труб увеличивают на 25%, с учётом ослабления стенки трубы заклёпками.

Основные закономерности гидростатики:

- 1. Во всех точках горизонтальной площади, проведенной через однородную жидкость, давление одинаково.**
- 2. В данной точке внутри жидкости давление по всем направлениям одинаково. Это означает, что давление в жидкости на определенном уровне можно определять и сверху, и снизу, и слева, и справа.**
- 3. На внешней поверхности жидкости давление направлено перпендикулярно к поверхности. В противном случае на жидкость действовали бы касательные силы, и она бы двигалась.**
- 4. При перемещении в жидкости сверху вниз давление увеличивается.**

Давление в газе

В идеальном газе отсутствуют связи между молекулами, поэтому давление газа имеет совсем другой физический смысл, чем давление в жидкости. Молекулы газа совершают хаотическое (броуновское) движение. При этом они ударяются о поверхность жидкости и теряют свой импульс. Как известно из теоретической механики, при изменении импульса появляется сила, в данном случае это сила давления газа на

Единичная (на единицу площади) сила давления и есть давление газа.

Состояние газа определяется тремя параметрами - абсолютным давлением p , плотностью ρ и абсолютной температурой T , которые связаны уравнением состояния (уравнением Клапейрона).

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T,$$

где R - газовая постоянная, $R=287$ дж/кг·°К для воздуха.

Уравнение состояния можно записать в виде:

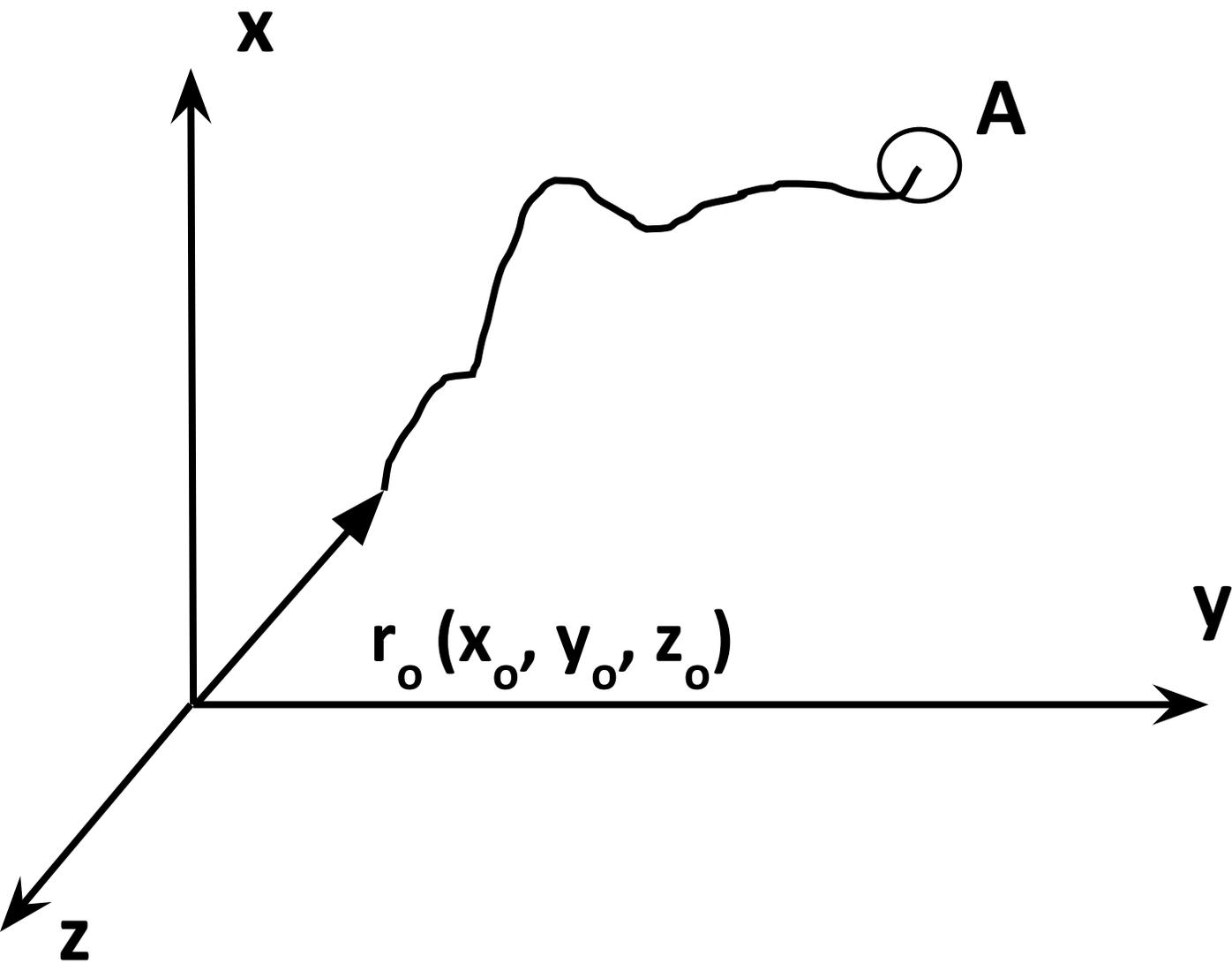
$$p/p = R \cdot T.$$

При увеличении температуры усиливается броуновское движение молекули частота их ударов о поверхность. При этом давление газа увеличивается. В малых объёмах давление газа одинаково во всех точках объёма. Вбольших объёмах давление газа уменьшается с высотой по

КИНЕМАТИКА

• *Метод Лагранжа*

- **Изучается сама жидкость, движущаяся в неподвижной системе координат. Используется в тех практических задачах, когда нужно исследовать траектории движения отдельных частиц.**



$$\left[\begin{array}{l} x=f_1(x_o, y_o, z_o, t) \\ y=f_2(x_o, y_o, z_o, t) \\ z=f_3(x_o, y_o, z_o, t) \end{array} \right.$$

• *Метод Эйлера*

- **Объект изучения:** связанное с системой координат неподвижное пространство, заполненное движущейся жидкостью. Изучение движения начинается с исследования распределения скоростей в пространстве и его изменения во времени, т.е. с изучения поля скоростей.

$$\bullet v_x = F_1(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$\bullet v_y = F_2(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$\bullet v_z = F_3(x_0, y_0, z_0, t)$$

Установившееся движение – это движение, при котором в данной точке пространства давление и скорость (параметры движения) не изменяются во времени. Установившееся движение наблюдается при истечении жидкости из резервуара, в котором поддерживается постоянный уровень свободной поверхности, т.е. постоянный напор. Установившееся движение жидкости наблюдается редко. Однако весьма часто при решении практических задач можно к неустановившемуся движению для отдельных периодов времени применять уравнения установившегося движения.

Установившееся движение характеризуется зависимостью параметров движения только от пространства, т.е., например, для давления p

$$p = p(x, y, z)$$

Равномерное движение – движение жидкости с постоянной скоростью по длине потока (например, движение жидкости в трубе постоянного диаметра). Равномерное движение в трубах может быть как установившимся, так и неуставившимся, а в открытых руслах (в реальных условиях) равномерное движение может быть только установившимся.

Сплошным (непрерывным) движением называется такое, при котором жидкость занимает всё пространство своего движения без образования внутри потока пустот (разрывов).

Неустановившееся

движение

характеризуется зависимостью параметров движения от времени и пространства, т.е., например, для давления p

$$p = p(x, y, z, t)$$

Траекторией называется перемещение частицы в пространстве и времени.

Трубка тока образуется, если по периметру бесконечно малой площадки провести линии тока.

Линией тока называется векторная линия поля вектора скорости, т.е. линия, касательная к которой в любой её точке совпадает с вектором скорости частицы, находящейся на этой линии.

Живое сечение – поперечное сечение потока, проведённое перпендикулярно к векторам скоростей элементарных струек. В гидравлических расчётах при решении большинства инженерных задач принято считать поток параллельно-струйчатым и плавно изменяющимся. В связи с этим за живое сечение в напорных трубопроводах и самотечных трубах, заполненных жидкостью по всему сечению, условно принимается плоское сечение, проведённое перпендикулярно оси потока жидкости. В открытых руслах вследствие малости уклонов живое сечение условно принимается вертикальным.

Часть жидкости, ограниченная поверхностью, образованной траекториями, проходящими через замкнутый контур (*живые сечения*), называется *элементарной струйкой*. По своим свойствам элементарная струйка считается непроницаемой для соседних частиц жидкости, форма её остаётся неизменной по длине, и вследствие её малости скорость считается постоянной по сечению.

Местная скорость – скорость элементарной струйки.

Поток жидкости – совокупность элементарных струек.

Смоченный периметр – периметр живого сечения потока, касающийся твёрдых стенок, ограничивающих поток.

Напорный поток – поток, со всех сторон ограниченный твёрдыми стенками (например, поток, движущийся в водопроводной трубе).

Безнапорный поток – поток, верхняя часть боковой поверхности которого является свободной, а остальная – смоченной (например, речной поток).

Часть **заполненного** **жидкостью** **пространства,**
ограниченного **поверхностью,** **образованной** **линиями** **тока,**
проходящими **через** **замкнутый** **контур** **(например,** **живые**
сечения), **называется** *трубкой тока*.

Живыми *сечениями* **называются** **сечения,**
перпендикулярные **линиям** **тока.**

Если **течение** **стационарное,** **элементарная** **струйка**
совпадает **с** **трубкой** **тока.**

Поток *жидкости* **складывается** **из** **множества**
элементарных **струек** **(или** **трубок** **тока).**

Различают **следующие** **виды** **движения:**
неустановившееся, **установившееся,** **неравномерное,**
равномерное, **безнапорное,** **напорное.**

Неравномерным называется движение, для которого характерно

$$v_1 \neq v_2 \neq \dots \neq v_n$$

$$\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n$$

но при этом

$$v_i \omega_i = Q = \text{const}$$

(например, движение жидкости в конической трубе), где v_i – средняя скорость потока.

Равномерным называется такой вид установившегося движения, для которого характерно

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$$

Гидравлический радиус R показывает, сколько площади трения приходится на единицу длины смоченного периметра, и определяется по формуле

$$R = \omega / \chi,$$

где ω – площадь живого сечения; χ – смоченный периметр.

Для круглых труб гидравлический радиус $R = d / 4$.

Расход – количество жидкости, проходящее через живое сечение в единицу времени. Практически всегда в гидравлических расчётах используется ***объёмный расход*** Q :

$$Q = W / t,$$

где W – объёмное количество жидкости; t – время истечения данного объёма.

В тех случаях, когда необходимо определить ***массовый расход*** Q_m , пользуются формулой

$$Q_m = m / t,$$

где m – масса проходящей через живое сечение жидкости за время t .

Средняя скорость V – условная для данного живого сечения средняя скорость течения:

$$V = Q / \omega.$$

Величина *расхода* Q для данного живого сечения выражается согласно формуле :

$$Q = \omega V.$$

Для потока конечных размеров в общем случае скорость имеет различное значение в разных точках сечения поэтому расход должен подсчитываться как сумма элементарных расходов струек

Объёмный расход жидкости для потока можно определить как выражения

$$Q = \sum_{\omega} dq$$

где dq – элементарный расход (расход трубки тока), м³/с.

Напорным называется движение без свободной поверхности, т.е. когда жидкость занимает весь внутренний объём трубопровода или движение под действием перепада давления (например, движение воды в системе водоснабжения, движение теплоносителя в системах теплоснабжения).

Безнапорным называется движение со свободной поверхностью или движение под действием силы тяжести (например, движение воды в реке).

В отличие от видов движения жидкости различают режимы течения жидкости: ламинарный и турбулентный.

Ламинарным (послойным) называется режим течения, когда силы вязкости соизмеримы с силами инерции и для которого характерно отсутствие обмена частиц между слоями (перемешивание жидкости по сечению потока), т.е. доля частиц двигающихся в поперечном направлении составляет не более 1...3% от общего числа частиц.

Турбулентным называется режим течения, когда силы инерции преобладают над силами вязкости и для которого характерен интенсивный обмен частиц между слоями (более 90% от общего числа).

Режим движения жидкости – ламинарный и турбулентный – определяется безразмерным критерием Рейнольдса Re :

$$Re = VL / \nu,$$

где Re – число Рейнольдса; L – характерный параметр потока (для круглых труб $L = d$, где d – диаметр трубы; для потоков произвольного поперечного сечения $L = R$, т.е. гидравлическому радиусу); ν – кинематическая вязкость жидкости.

Критическим числом Re_k считается такое число Рейнольдса, при котором происходит смена режима движения жидкости:

если $Re < Re_k$ – режим движения жидкости ламинарный,

если $Re > Re_k$ – режим движения жидкости турбулентный.

Так, для круглых труб $Re_k = 2300$, а для потоков произвольного поперечного сечения, в частности для открытых русел, $Re_k = 560$. Приведённые значения критических чисел Рейнольдса относятся к равномерному движению. При ускоренном движении Re_k возрастает, а при замедленном уменьшается. Кроме того, считается, что установившийся турбулентный режим возможен при числах Рейнольдса $Re > 4000$.

Уравнение неразрывности потока (уравнение баланса расхода) справедливо для установившегося движения, отражает свойства несжимаемости жидкости и сплошности её движения и записывается в следующем виде:

$$\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2 = \text{const},$$

где ω_1 и ω_2 – площади соответствующих живых сечений; V_1 и V_2 – средние скорости в соответствующих сечениях.

Из этого уравнения следует:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

т.е. средние скорости обратно пропорциональны соответствующим площадям живых сечений.

Уравнение Бернулли (УБ) для потока реальной жидкости (уравнение баланса энергии) справедливо для установившегося движения, выражает закон сохранения энергии потока движущейся жидкости и записывается в удельной форме (относительно единицы веса жидкости) для двух сечений и горизонтальной плоскости сравнения в следующем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = H_{\text{дин}} = \mathit{const}$$

$\frac{u_1^2}{2g}, \frac{u_2^2}{2g}$ – удельная кинетическая энергия соответственно в первом и втором сечениях (скоростной напор);

$\frac{p_1}{\rho g}, \frac{p_2}{\rho g}$ – удельная потенциальная энергия давления соответственно в первом и втором сечениях (пьезометрическая высота);

z_1, z_2 – удельная потенциальная энергия положения соответственно в первом и втором сечениях (геометрическая высота, т.е. расстояние по высоте от плоскости сравнения до центра тяжести сечения); h_w – потери энергии при движении потока жидкости от первого сечения до второго (потери напора); α – коэффициент Кориолиса, учитывающий неравномерность распределения скорости по живому сечению (для дорожно-мостового строительства $\alpha = 1,1$); V_1, V_2 – средние скорости в соответствующих живых сечениях; p_1, p_2 – избыточное давление в центре тяжести соответствующих сечений; ρ – плотность жидкости.

Сумма первых трёх слагаемых в левой и правой частях уравнения Бернулли в энергетическом смысле выражает *полную удельную энергию* потока E_1 и E_2 в соответствующих сечениях:

$$E = \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z .$$

В геометрическом смысле эта сумма называется *гидродинамическим напором* H_{01} и H_{02} или *полным напором* в первом и втором сечениях потока жидкости:

$$H_0 = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha u^2}{2g}$$

Тогда разность гидродинамических напоров H_{01} и H_{02} (полных удельных энергий E_{01} и E_{02}) в сечениях даст величину потери напора (потери энергии)

$$**$h_W = H_{01} - H_{02}$**$$

$$**$h_W = E_{01} - E_{02}$**$$

*Частный случай УБ для элементарной струйки
(потока) идеальной жидкости:*

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{au_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{au_2^2}{2g}$$

Правила применения уравнения Бернулли (УБ):

- **УБ справедливо для установившегося плавноизменяющегося движения.**
- **УБ составляется с учётом получения одного неизвестного; если это невозможно, то в качестве второго используют уравнение неразрывности потока.**
- **Сечения выбираются перпендикулярно направлению движения жидкости.**
- **Сечения нумеруются по ходу движения жидкости.**
- **Плоскость сравнения желательно проводить через центр тяжести нижнего сечения. В этом случае расстояние от плоскости сравнения до центра тяжести нижнего сечения $z_{нс} = 0$, а остальные z – положительны.**

Напорная линия – это линия, соединяющая гидродинамические напоры (полную удельную энергию) в каждом сечении при графическом построении.

Гидравлический уклон I – уклон напорной линии – может быть определён как отношение потери напора (потери энергии) h_w к длине:

$$I = h_w / l,$$

где l – расстояние между сечениями потока движущейся жидкости.

Гидравлический уклон – величина положительная ($I > 0$). Для идеальной жидкости гидравлический уклон $I = 0$.

Пьезометрическим напором (потенциальным, статическим) H_p называют сумму пьезометрической и геометрической высот: p

$$H_p = \frac{p}{\rho g} + z$$

Пьезометрическая линия – это линия, соединяющая пьезометрические напоры в каждом сечении при графическом построении.

Пьезометрический уклон I_p – уклон пьезометрической линии – может быть определён как отношение разности пьезометрических напоров H_{p1} и H_{p2} в сечениях к длине l :

$$I_p = \frac{H_{p1} - H_{p2}}{l}$$

По величине пьезометрический уклон принимает различные значения: отрицательные ($I_p < 0$), например, для потока реальной жидкости в расширяющейся трубе, и положительные ($I_p > 0$), например, для потока реальной жидкости в сужающейся трубе. Пьезометрический уклон равен нулю ($I_p = 0$), например, для потока идеальной жидкости в горизонтальной трубе постоянного диаметра.

Замечания к построению напорной и пьезометрической линий:

1. Напорная линия для движения идеальной жидкости всегда горизонтальна. Её нужно провести прежде, чем приступить к построению напорной линии для движения реальной жидкости.

2. Анализируя изменение скорости по длине потока, откладываем вниз от напорной линии величину скоростного напора $\alpha V^2 / 2g$ и получаем пьезометрическую линию.

3. При истечении в атмосферу пьезометрическая линия всегда приходит в центр тяжести выходного сечения, так как избыточное давление на выходе в этом случае равно нулю ($p = 0$).

Путевые потери напора (потери энергии) h_l – потери на совершение работы по преодолению сил трения. Их ещё называют ***линейными потерями напора*** и определяют как при турбулентном, так и при ламинарном режиме движения для круглых труб по формуле Вейсбаха – Дарси:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$$

Для потоков произвольной формы сечения справедлива формула

$$h_l = \lambda \frac{l}{4R} \frac{V^2}{2g}$$

где l , d , R , V – соответственно длина участка трубы или канала (расстояние между сечениями), диаметр трубы, гидравлический радиус, средняя скорость; λ – безразмерный коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси), зависящий от режима движения жидкости и от шероховатости поверхности.

Дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера)

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp + \frac{\rho}{2} du^2$$

Местные сопротивления – это участки локальных изменений геометрии потока. Таким образом, местные потери обусловлены изменением формы потока (вход в трубу), изменением диаметра трубы, изменением направления движения (поворот трубы).

Потери напора определяются по формуле: $h_f = \zeta \frac{V^2}{2g}$ сопротивления h_f

где ζ – коэффициент местного сопротивления; V – скорость потока за местным сопротивлением.

Для некоторых типов местных сопротивлений рекомендуются формулы:

при внезапном расширении трубопровода ($\omega_2 > \omega_1$)

$$\zeta = (\omega_2 / \omega_1 - 1)^2;$$

при внезапном сужении трубопровода ($\omega_2 < \omega_1$)

$$\zeta = 0,5 (1 - \omega_2 / \omega_1),$$

где ω_1 и ω_2 – площади живых сечений соответственно перед и за местным сопротивлением.

Напор насоса H_H – это работа, которую совершает единица веса жидкости на пути от поверхности жидкости в колодце (питающем резервуаре) до её поверхности в наполняемом резервуаре. Эта работа равна разности гидродинамических напоров на выходе из насоса $H_{\text{вых}}$ и входе в него $H_{\text{вх}}$:

$$H_H = H_{\text{вых}} - H_{\text{вх}}.$$

Напор на входе в насос $H_{вх}$ определяется с учётом потери энергии во всасывающей линии $h_{вс}$. Напор на выходе из насоса $H_{вых}$ определяется с учётом потери энергии в нагнетательной линии $h_{вн}$. Таким образом, напор насоса H_n расходуется :

а) на подъём жидкости на геометрическую высоту H_2 , т.е. от свободной

поверхности жидкости в колодце (в питающем резервуаре) до её поверхности в наполняемом резервуаре;

б) на преодоление гидравлических сопротивлений во всасывающем и

нагнетательном трубопроводах;

в) на преодоление разности давлений на поверхности жидкости в резервуарах.

Мощность насоса $N_{пол}$, т.е. полезная работа, затрачиваемая в единицу времени на перекачивание жидкости весом γQ , определяется по формуле

$$N_{пол} = H_n \gamma Q,$$

где γ – удельный вес жидкости; Q – расход.

В насосе имеются различные гидравлические и механические сопротивления, поэтому мощность насоса на валу $N_{нас}$ должна быть несколько большей, а именно:

$$N_{нас} = N_{пол} / \eta,$$

где η – коэффициент полезного действия насоса, учитывающий все виды сопротивления в насосе ($\eta < 1$).

коэффициента гидравлического сопротивления на трение λ . (Коэффициента Дарси)

Весь интервал изменения скорости от 0 до ∞ разделён на четыре *зоны сопротивления*.

1. Первая зона – зона *ламинарного режима течения*.

$$\frac{64}{\text{Re}}$$

2. Вторая зона – зона *гладкостенного скольжения (или зона гидравлически $0,3164$ труб)*.

$$\frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}}$$

3. Третья зона – зона доквадратичного режима течения.

$$0,1 \left(1,46 \frac{\Delta}{r} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25}$$

4. Четвёртая зона – зона квадратичного режима течения.

$$\frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{\Delta} + 1,74 \right)^2}$$

