

Основные тригонометрические тождества

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \begin{cases} \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

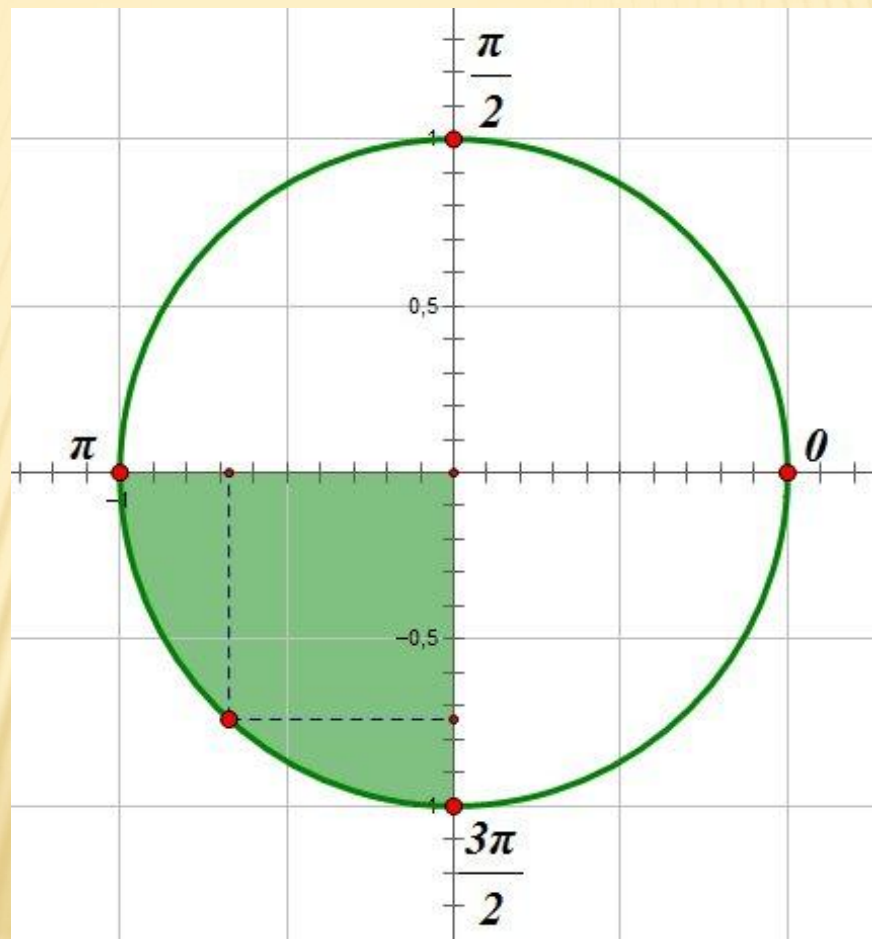
$$4. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} ; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

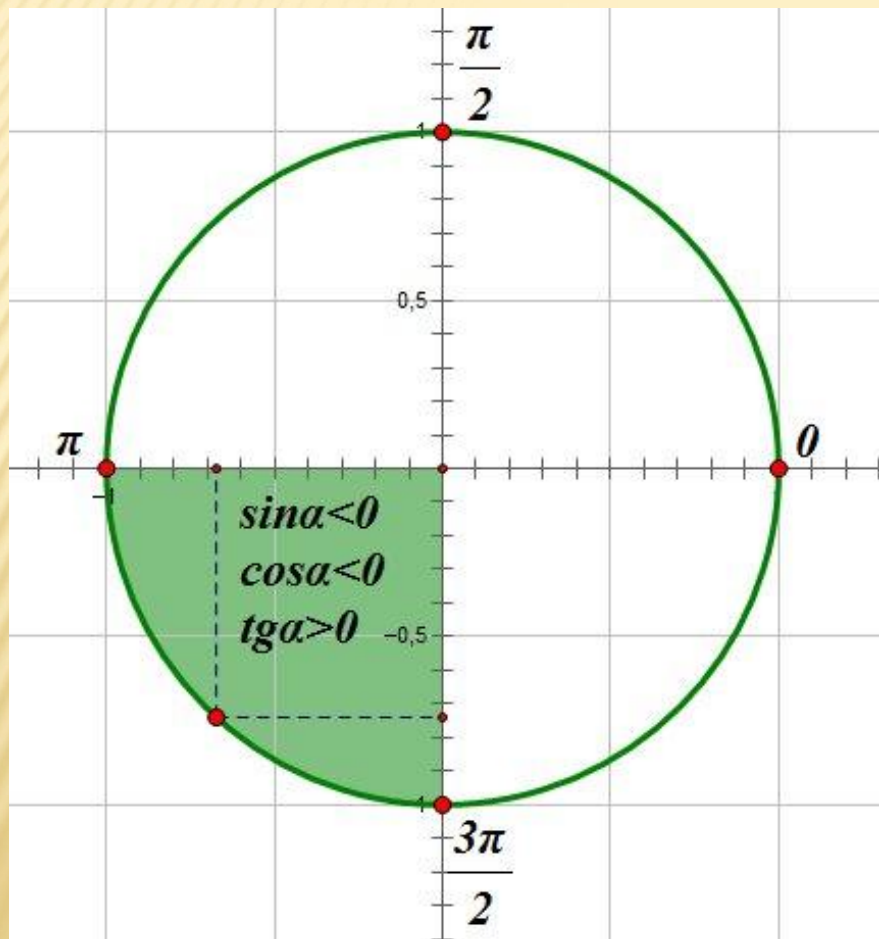
$$5. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$

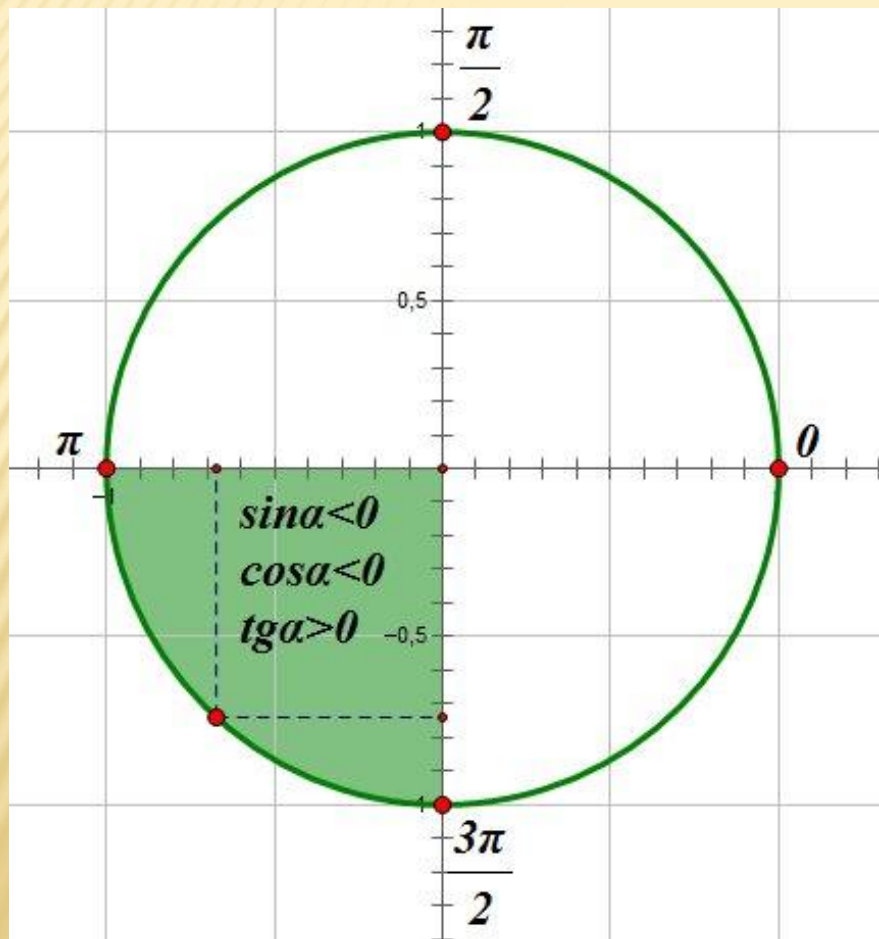


1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

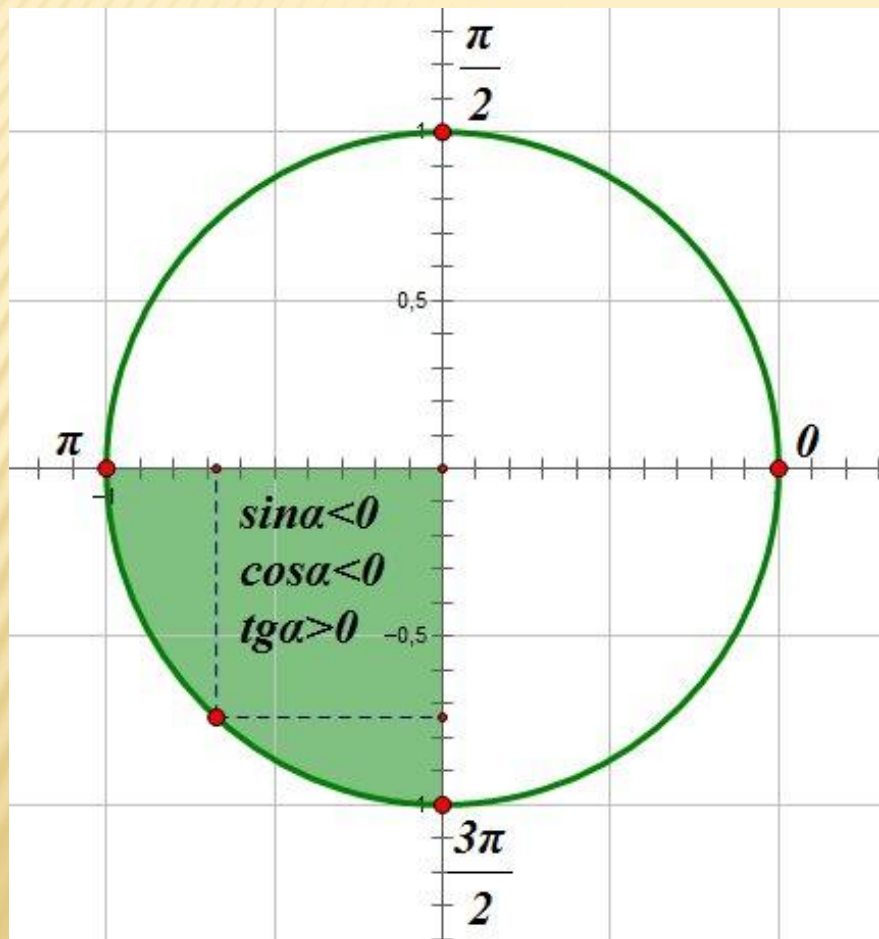
1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

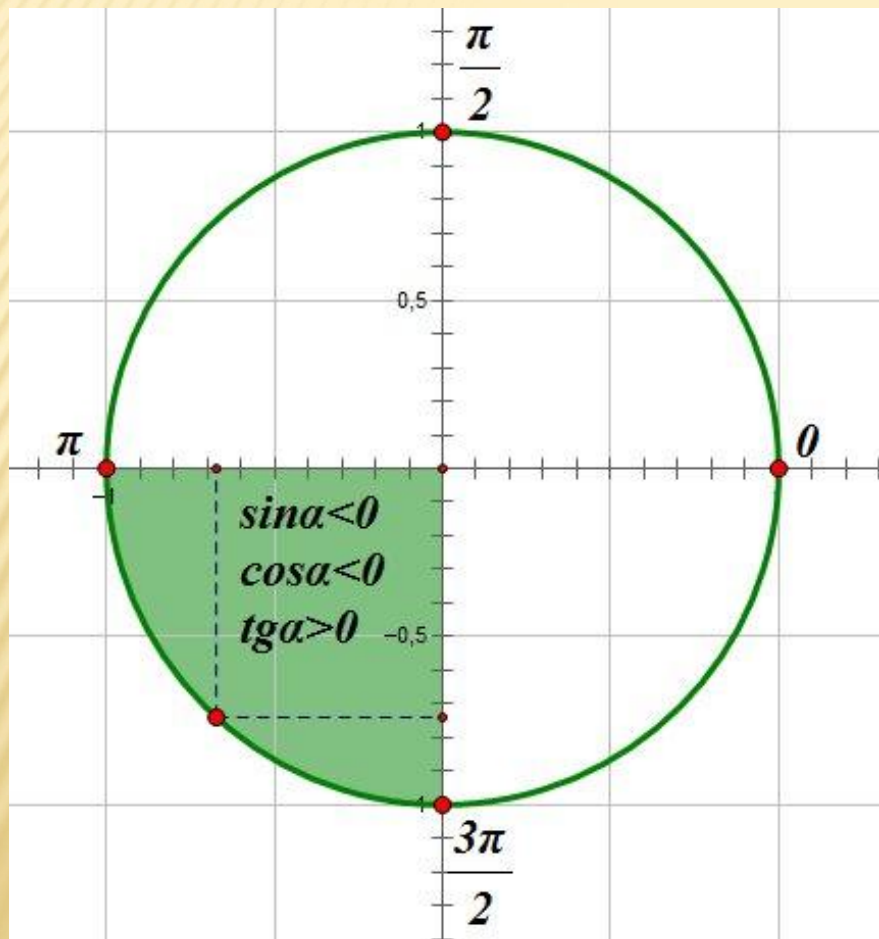
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



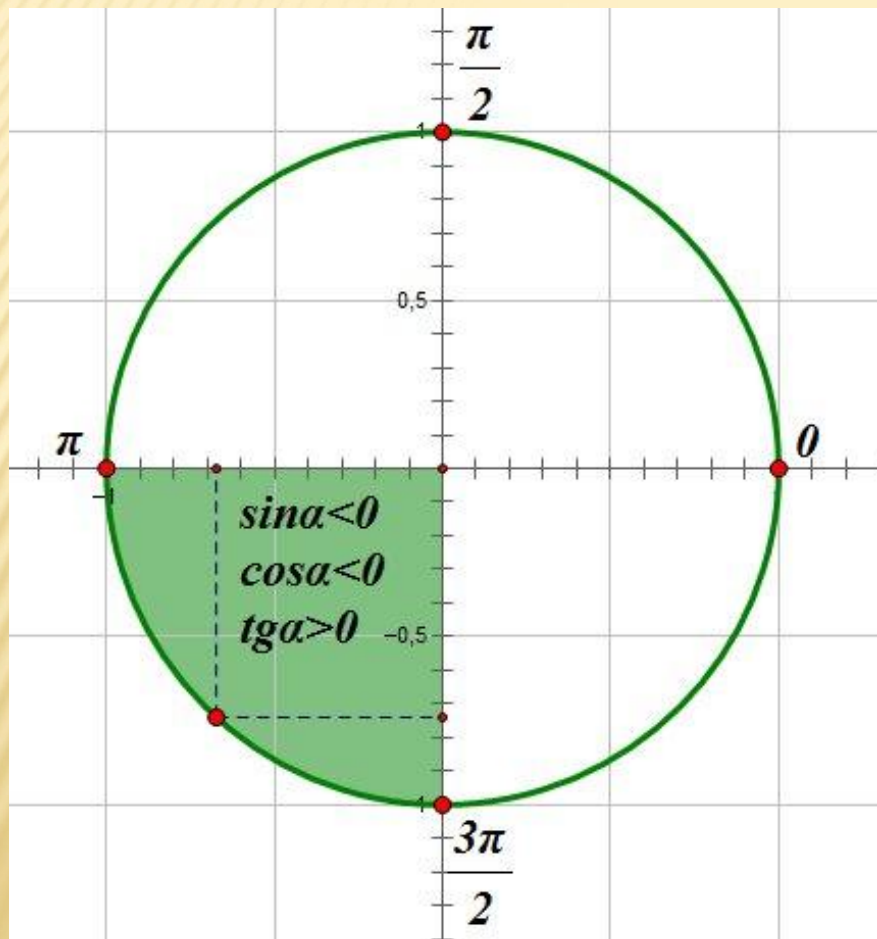
1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha =$$

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



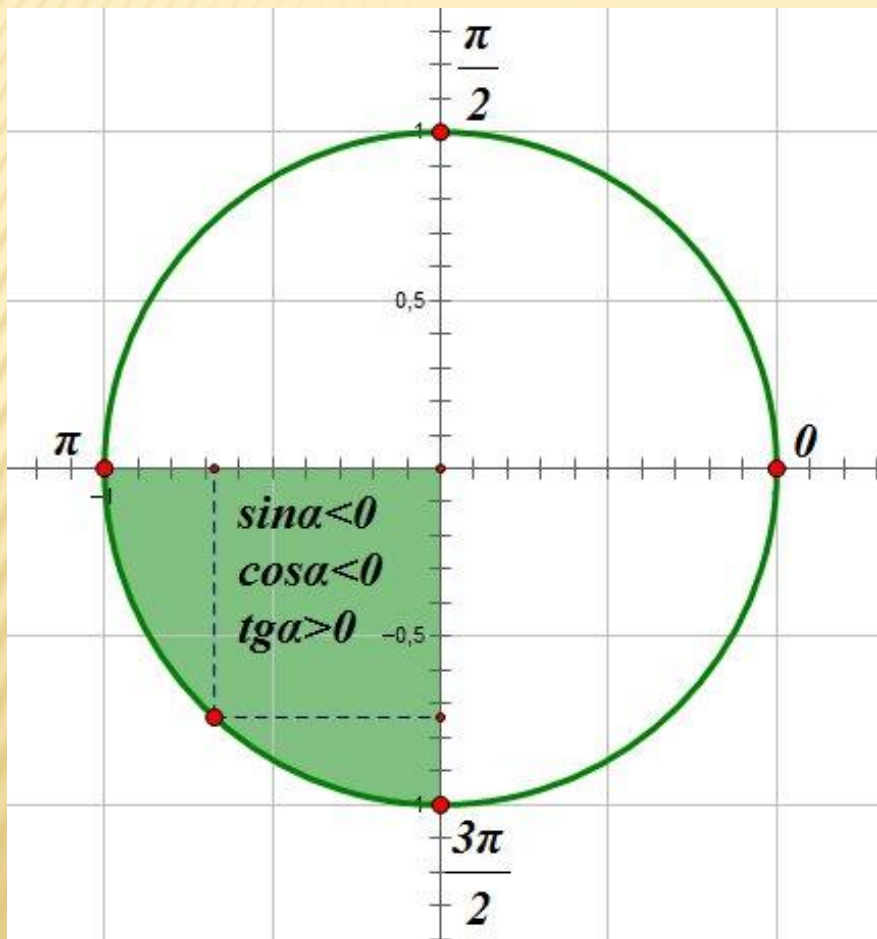
1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = \\ &= 1 - \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 = \end{aligned}$$

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



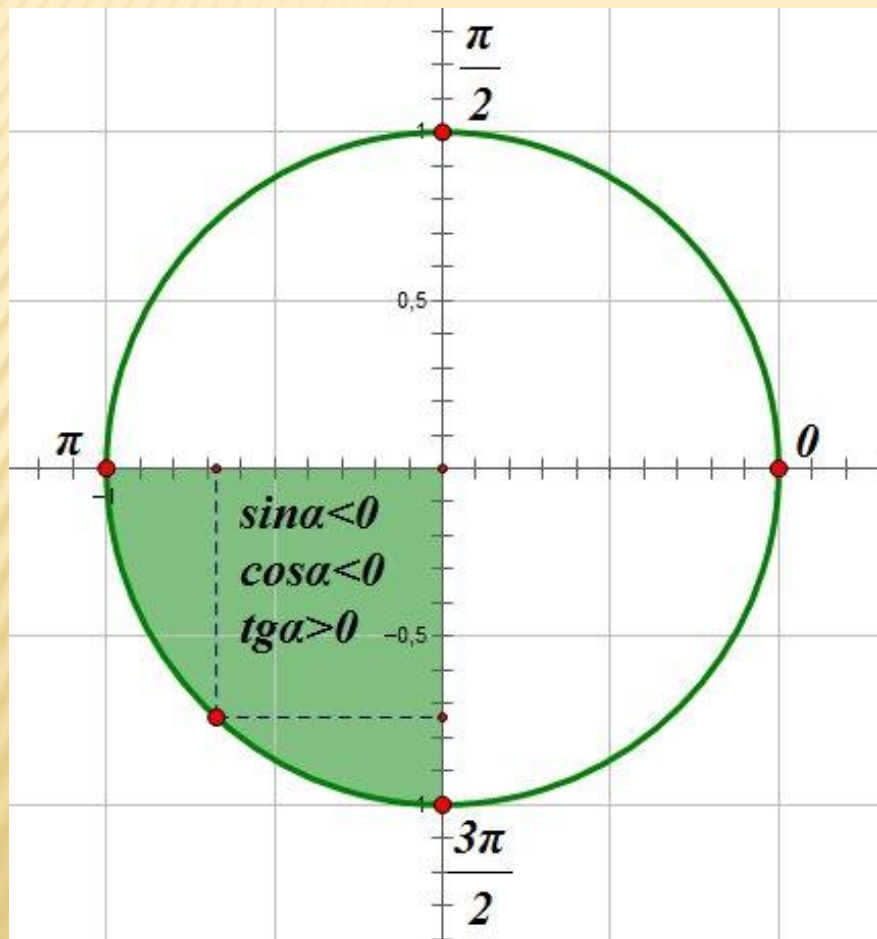
1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = \\ &= 1 - \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{26} = \frac{1}{26} \end{aligned}$$

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

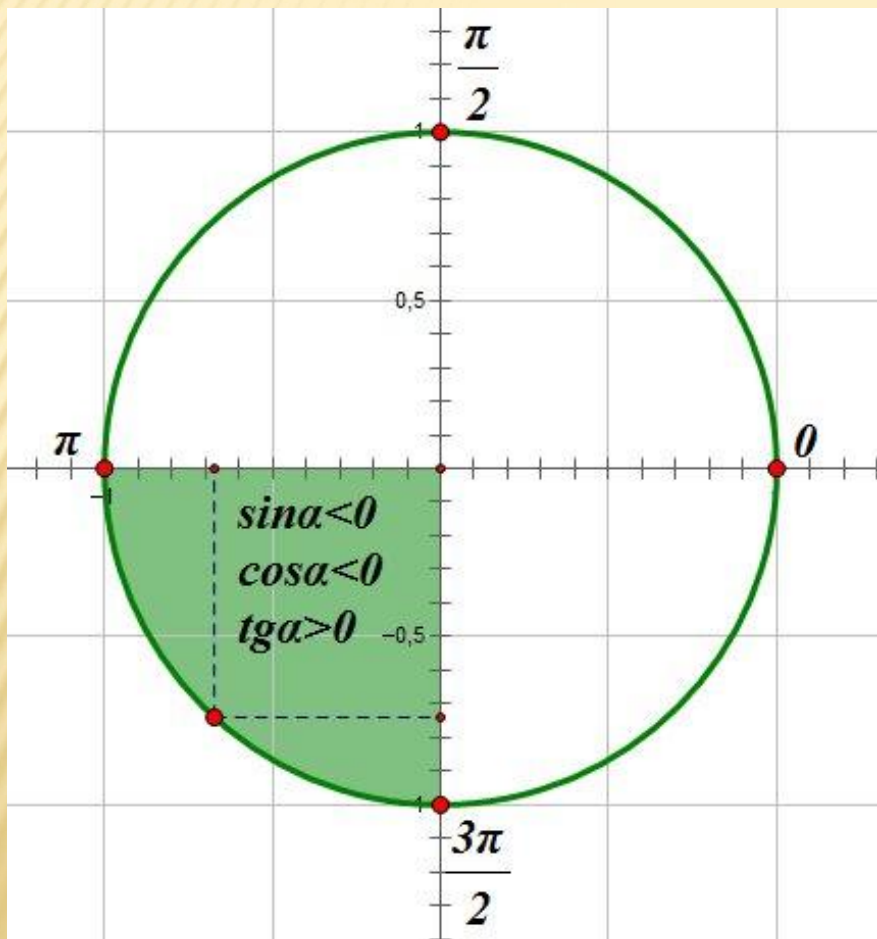
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= 1 - \sin^2\alpha = \\ &= 1 - \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{26} = \frac{1}{26}\end{aligned}$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

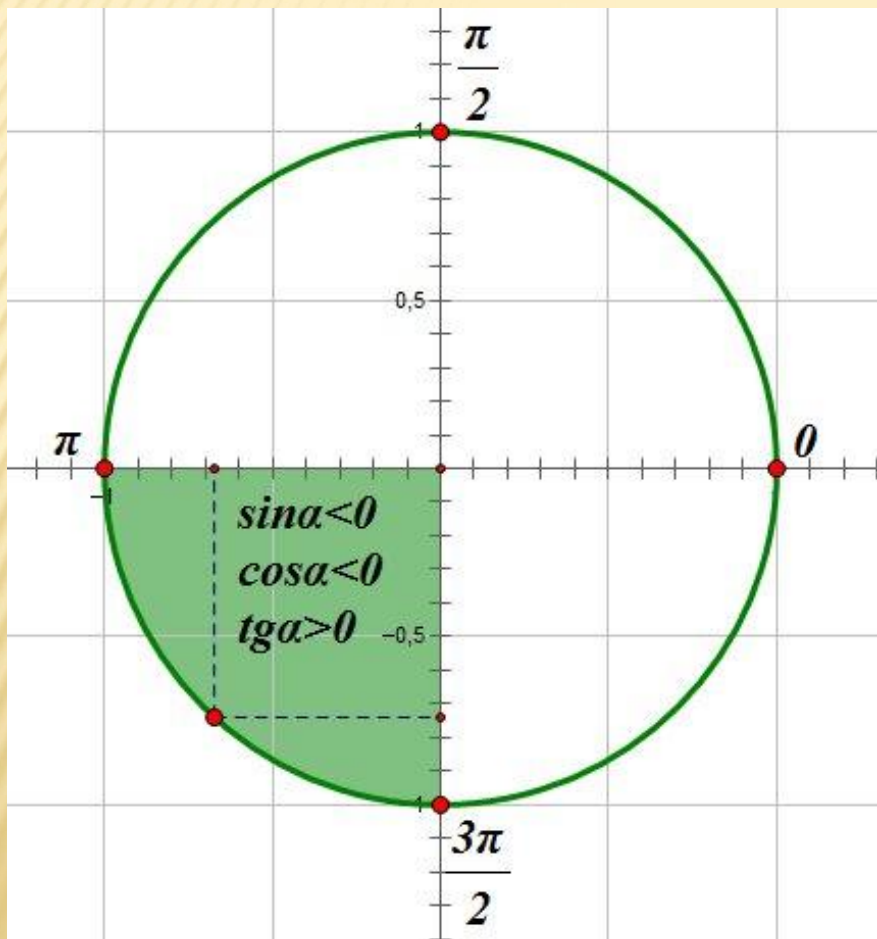
3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = \\ &= 1 - \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{26} = \frac{1}{26} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}} : \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) =$$

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$



1. Определим знаки тригонометрических функций угла α .

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

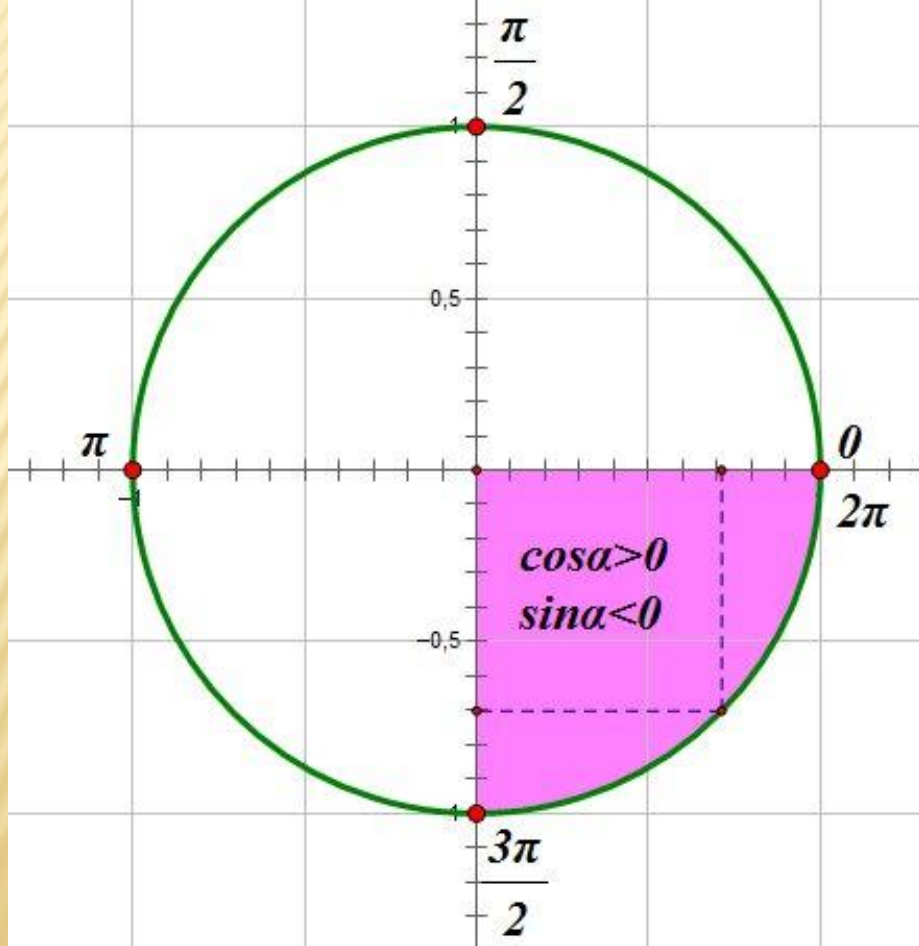
$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = \\ &= 1 - \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{26} = \frac{1}{26} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{5}{\sqrt{26}} : \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = \\ &= -\frac{5}{\sqrt{26}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{26}}{1}\right) = 5 \end{aligned}$$

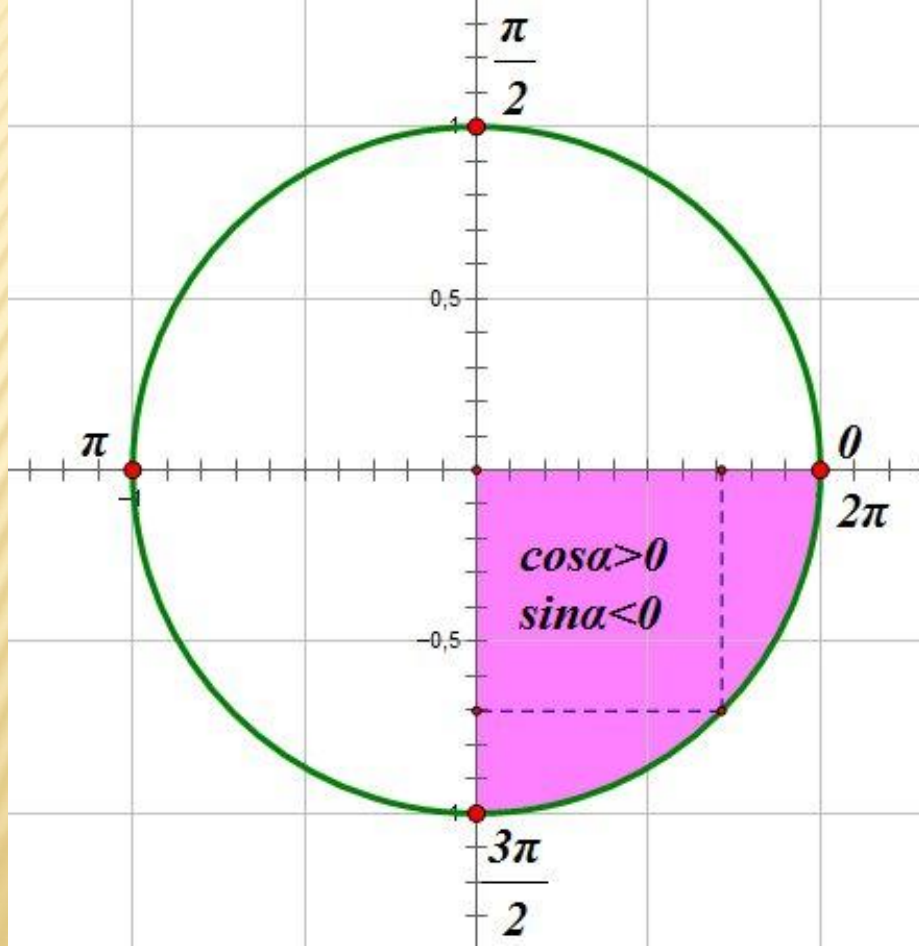
2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$



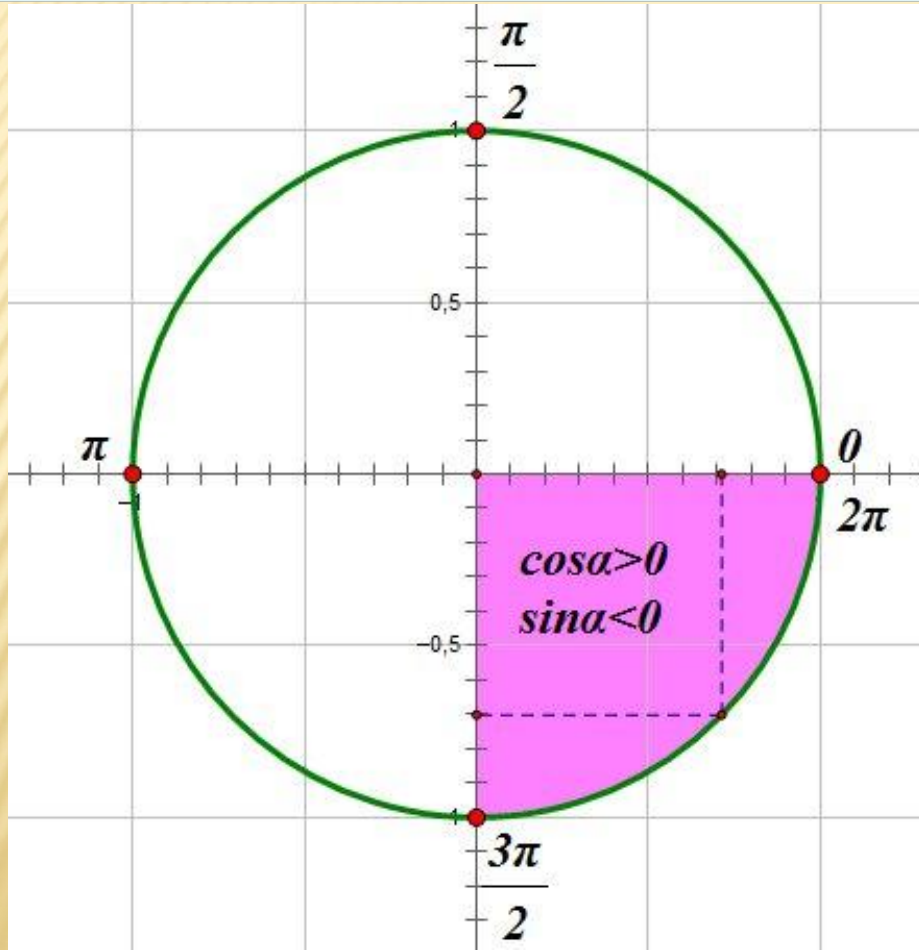
1. Определим знак $\sin\alpha$.

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$



1. Определим знак $\sin\alpha$.
2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

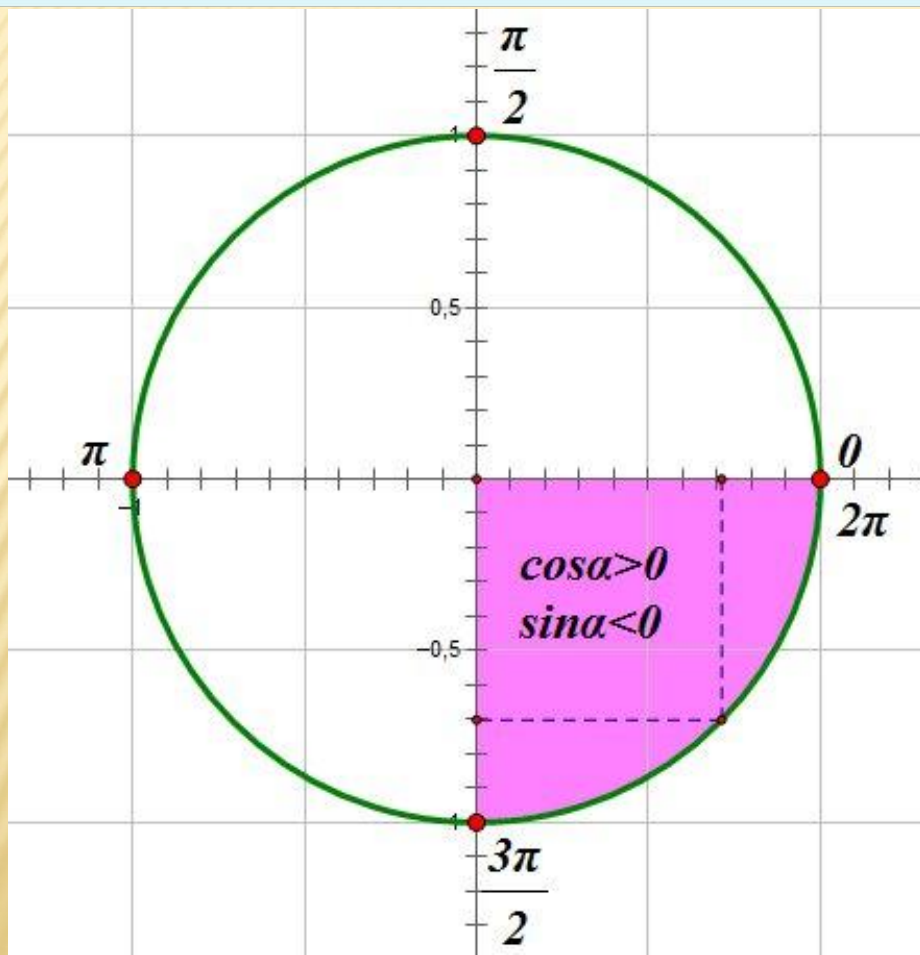


1. Определим знак $\sin\alpha$.

2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$

$$= 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 =$$

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

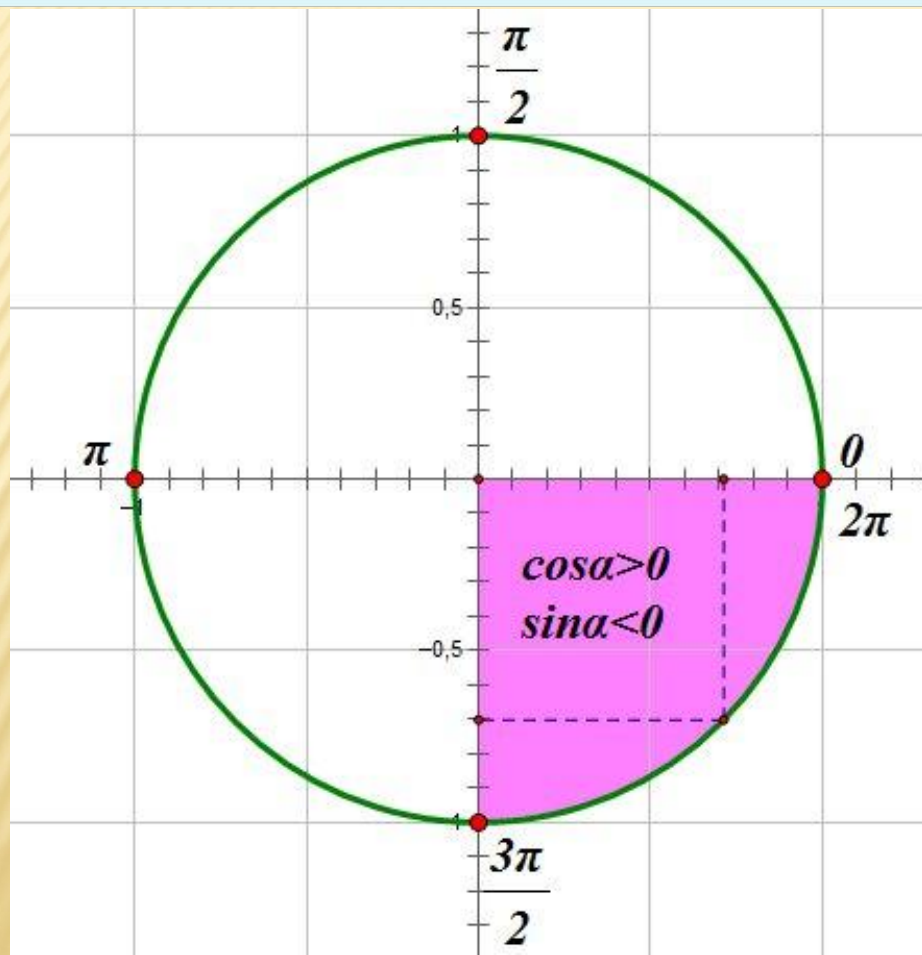


1. Определим знак $\sin\alpha$.

2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$

$$= 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$$

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$



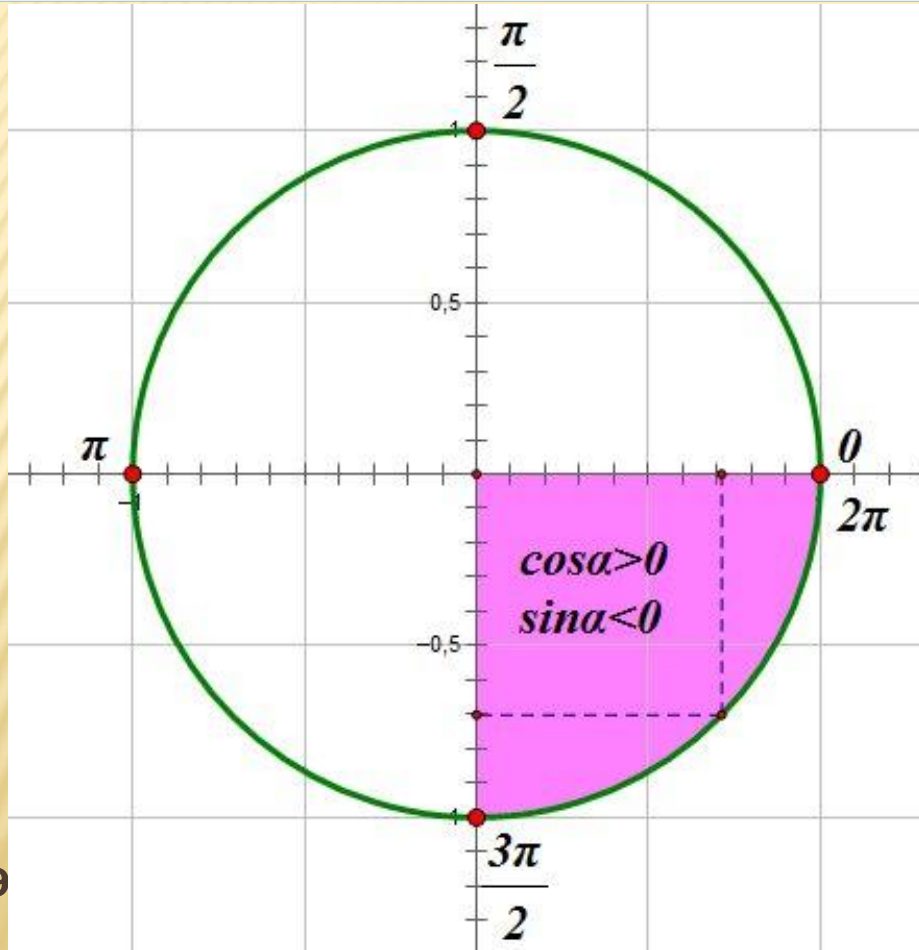
1. Определим знак $\sin\alpha$.

2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$

$$= 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$$

3. $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$



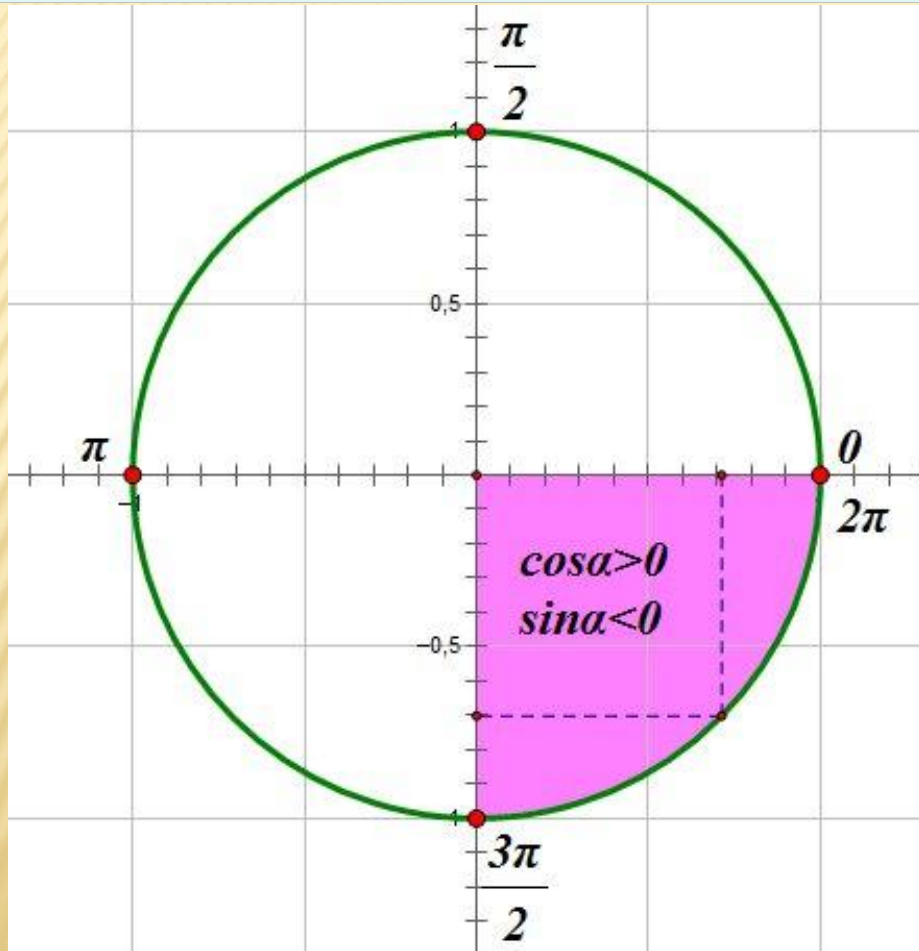
1. Определим знак $\sin\alpha$.

2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$
 $= 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$

3. $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$

4. $5\sin\alpha = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$

2. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$



1. Определим знак $\sin\alpha$.

2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$

$$= 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$$

3. $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$

4. $5\sin\alpha = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$

Ответ:

-1

Пример

3

Вычислить $\sin a$, если $\cos a = -\frac{3}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

Воспользуемся формулой $\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$

Т.к. $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ – III четверть, то $\sin a < 0$

$$\sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

1) Вычислите $\cos a$, если $\sin a = -\frac{2}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

A) $\frac{5}{\sqrt{21}}$; Б) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$; В) $-\frac{\sqrt{5}}{21}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Вычислите $\operatorname{tg} a$, если $\sin a = -\frac{2}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $-\frac{2}{\sqrt{21}}$; В) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{21}}$.

3) Вычислите $\operatorname{ctg} a$, если $\sin a = -\frac{2}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

A) $\frac{\sqrt{21}}{2}$; Б) $-\frac{2}{\sqrt{21}}$; В) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; Г) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

4) Вычислите $\operatorname{tg} a$, если $\cos a = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

A) $\frac{4}{3}$; Б) $\frac{3}{4}$; В) $-\frac{4}{3}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Применение основных тригонометрических тождеств

1. Найдите значение выражения:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 2$$

Решение:

разложить по формулам квадрата суммы
и квадрата разности

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 2 = \\ & = \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ & \quad - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - 2 = 0 \end{aligned}$$

2. Упростите выражение:

$$\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$$

Решение:

поменять второе и третье слагаемое местами
и применить формулу разности квадратов

$$\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

3. Упростите выражение:
 $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$

Решение:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x &= \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \end{aligned}$$

4. Найдите значение выражения:

$$\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}, \quad \text{если } \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{15}$$

Решение:

разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha} &= \frac{5\operatorname{tg}\alpha + 7}{6 - 3\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5 \cdot \frac{4}{15} + 7}{6 - 3 \cdot \frac{4}{15}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{26}{5}} = \\ &= \frac{125}{78} \end{aligned}$$

5. Найдите значение выражения:

$$\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x$$

Решение:

разложить по формуле квадрата суммы и упростить

$$\begin{aligned} & \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \\ & = \sin^2 x + 2\sin x \cdot \frac{1}{\sin x} + \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 + \cos^2 x + 2\cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 x \\ & - \operatorname{ctg}^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 + \frac{1}{\sin^2 x} + 2 + \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \\ & = 1 + 2 + 1 + \operatorname{ctg}^2 x + 2 + 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 7 \end{aligned}$$

6. Упростите выражение:

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha$$

Решение:

заменить $\operatorname{ctg}\alpha$ и привести к общему знаменателю

$$\begin{aligned}\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha &= \cos\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha = \\ &= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\end{aligned}$$

7. Упростите выражение:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Решение:

заменить $\operatorname{tg}\alpha$ и привести к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \\ &= \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

8. Упростите выражение:

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \\ &= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha \end{aligned}$$

$$9. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.$$

Найдите значение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$

Решение:

возвести обе части равенства в квадрат

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = 2^2$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4 - 2$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$$

10. Упростите выражение:

$$\frac{1 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \cos\alpha$$

Решение:

$$\frac{1 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \cos\alpha =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \cos\alpha =$$

$$= \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \cos\alpha = \sin\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha$$

11. Упростите выражение:

$$(1 - \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 - \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

Решение:

$$\begin{aligned} & (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 - \frac{2}{\cos^2\alpha} = \\ & = 1 - 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 2 \cdot \\ & \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - 2 - 2\operatorname{tg}^2\alpha = 0 \end{aligned}$$

12. Упростите выражение:
 $tg^2\alpha - \sin^2\alpha - tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$

Решение:

вынести общий множитель, заменить $tg^2\alpha$

$$\begin{aligned} & tg^2\alpha - \sin^2\alpha - tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \\ & = tg^2\alpha - tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \\ & = tg^2\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = \\ & = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \end{aligned}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Упростить выражения:

1. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$

2. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

3. $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

4. $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

5. $(1 + \sin \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \sin \alpha)$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (ОТВЕТЫ)

1. 1
2. 0
3. $\cos a - \sin a$
4. 0
5. $\operatorname{ctg} a$