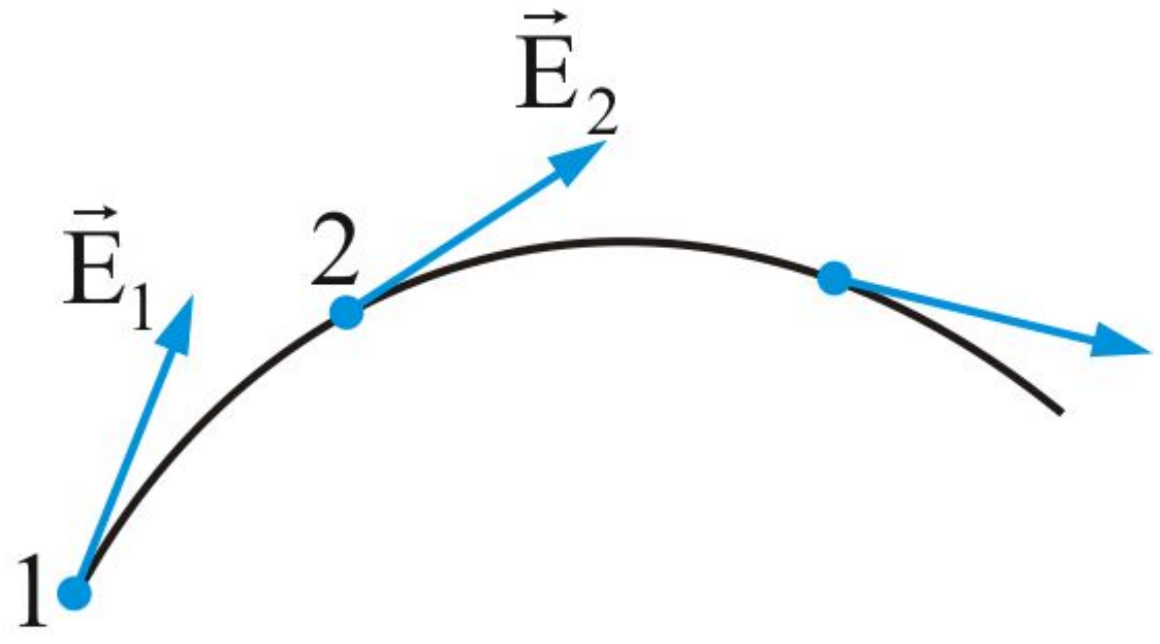
Теорема Остроградского-Гаусса. Работа поля. Потенциал

2.1. Силовые линии электростатического поля

Теорема Остроградского-Гаусса устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем.

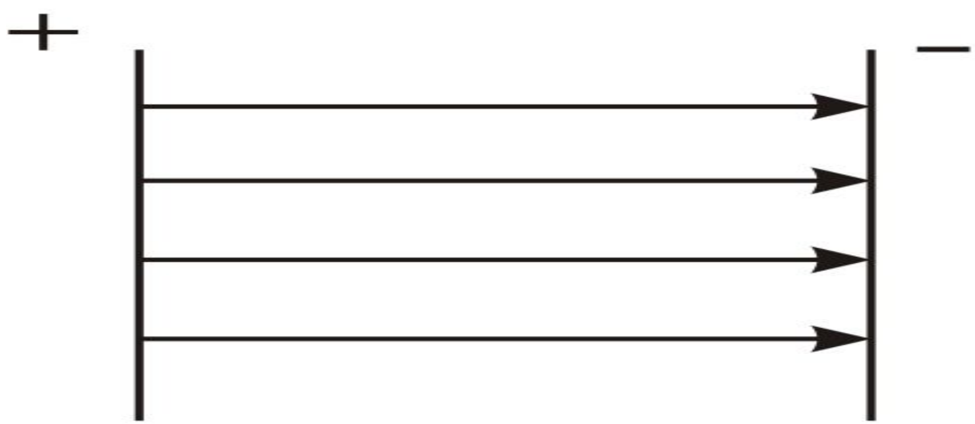
Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона

- **силовые линии** – это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности



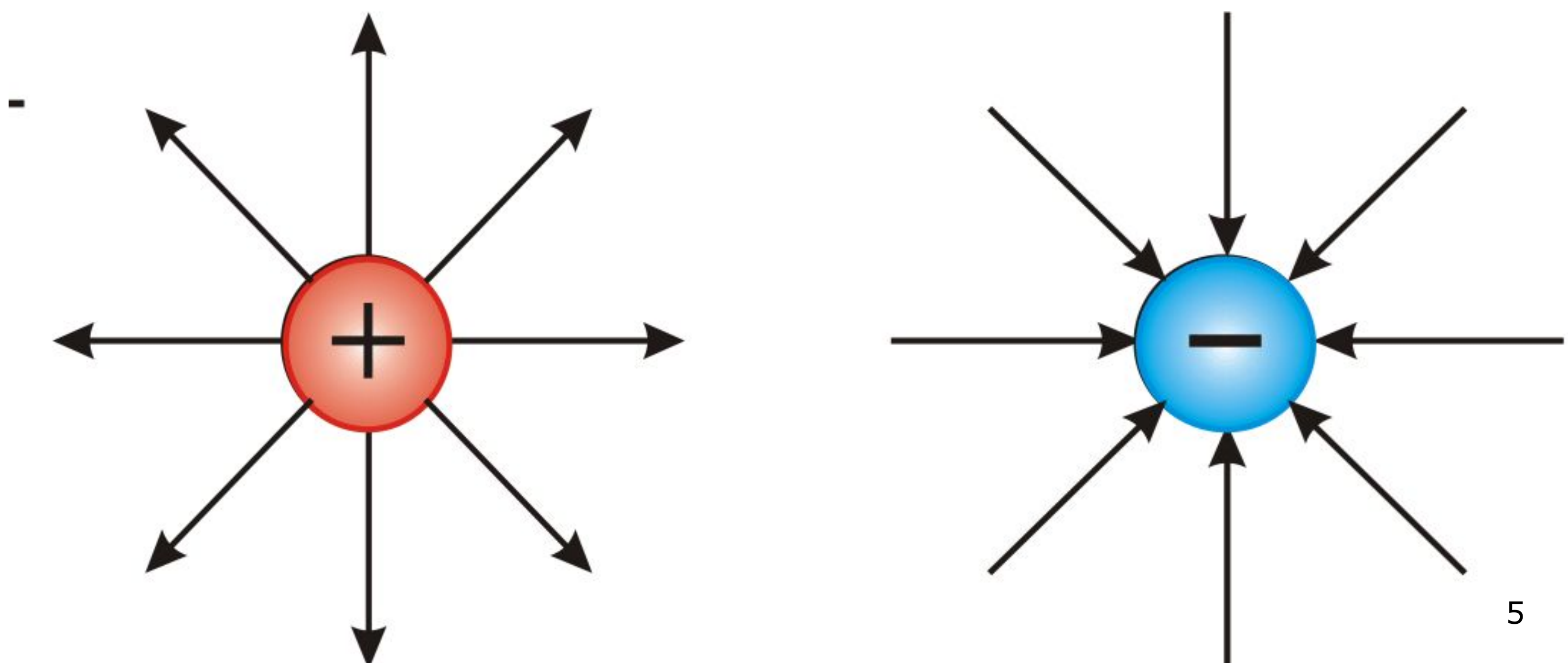
Однородным называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению

Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга

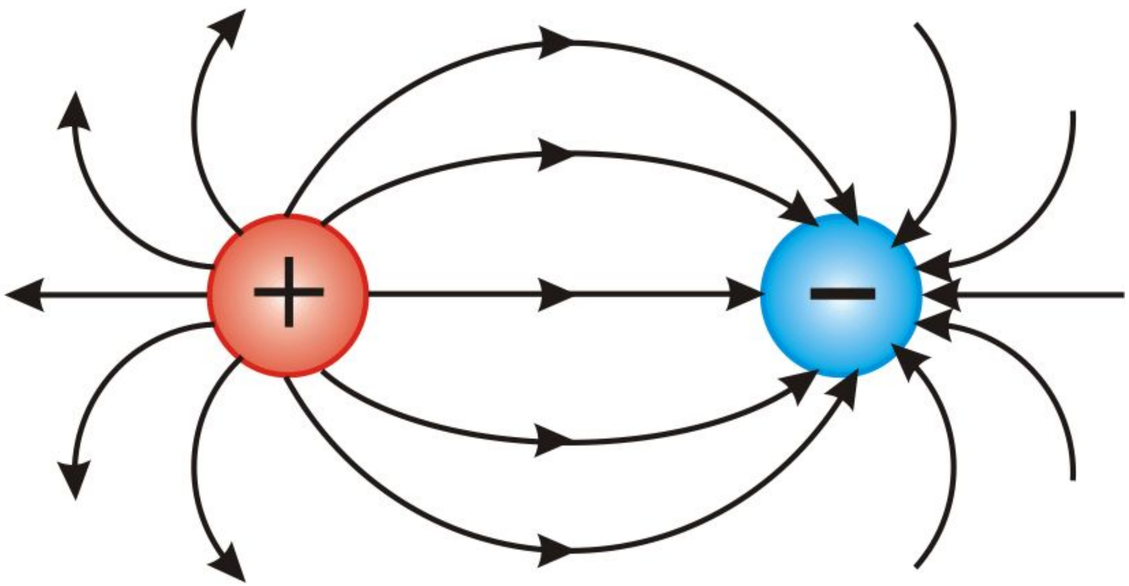


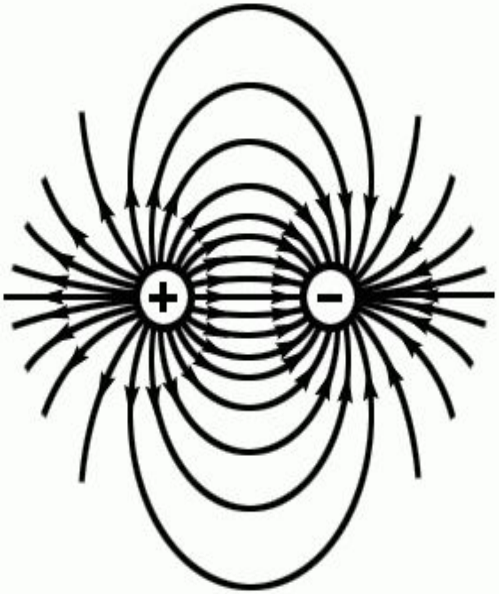
В случае точечного заряда, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд.

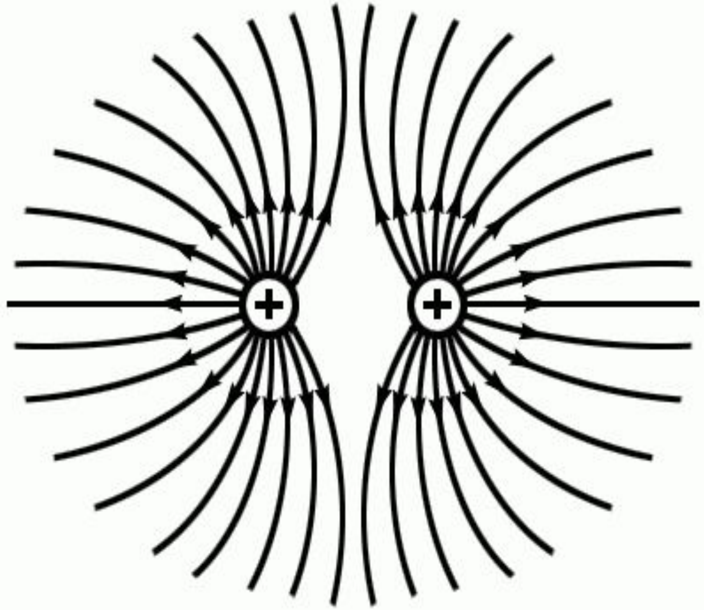
Т.к. $E \sim 1/r^2,$ то густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда

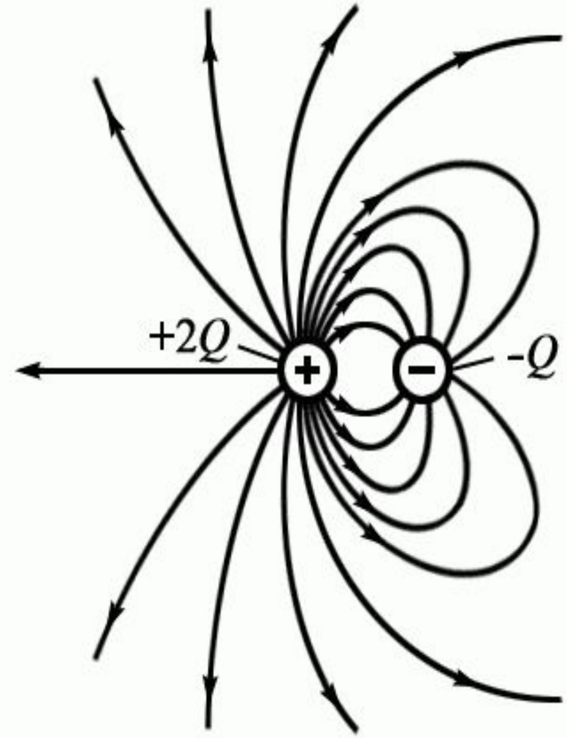


Для системы зарядов силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному







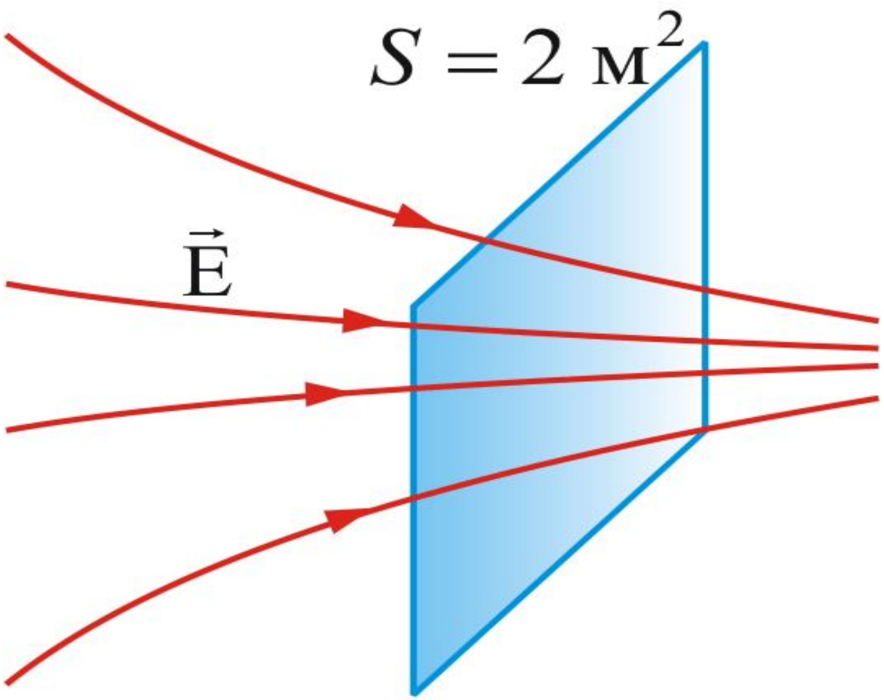

+2Q
-Q

Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности $|\vec{E}|$, т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число} \quad \text{линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

Если на рисунке выделить площадку $S = 2\ \text{м}^2$, то напряженность изображенного поля будет равна

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$



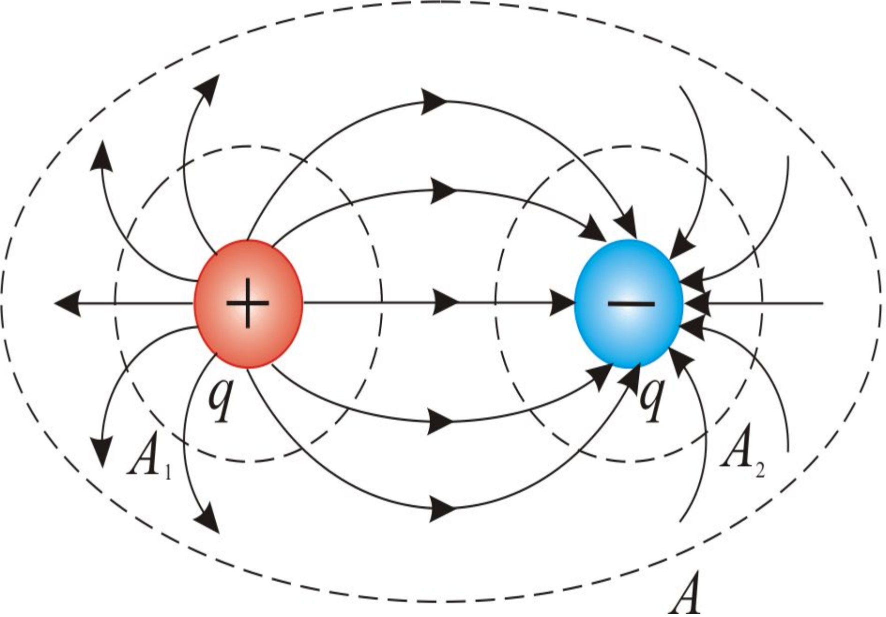
2.2. Поток вектора напряженности

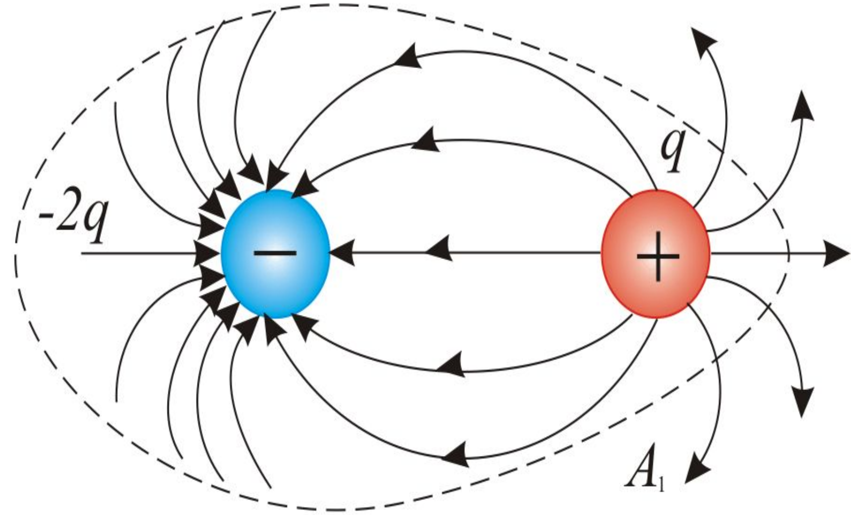
- Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S называется **потоком вектора напряженности** Ф через эту поверхность
- В векторной форме можно записать

$$\Phi_E = \left(\vec{E}, \vec{S}\right)$$

– скалярное произведение двух векторов, где вектор.

$$\vec{S} = \vec{n}S$$



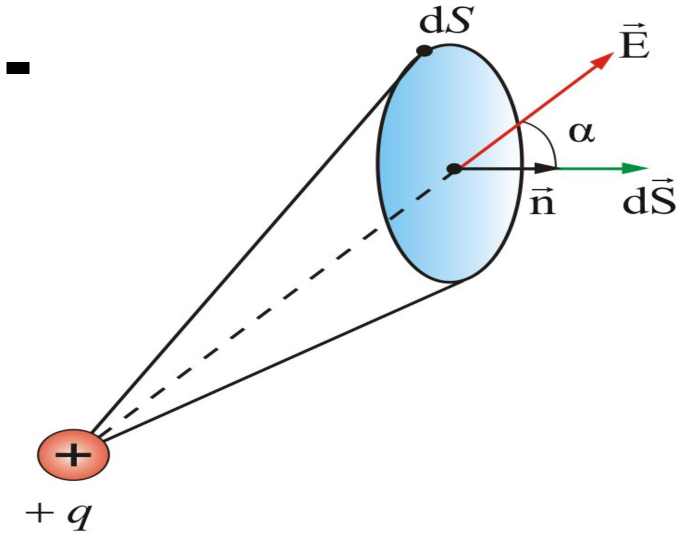


Поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0.$

Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, поток здесь направлен внутрь. $\Phi_E < 0$

Общий поток через поверхность *A* равен нулю.

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса



- Поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку dS будет равен:

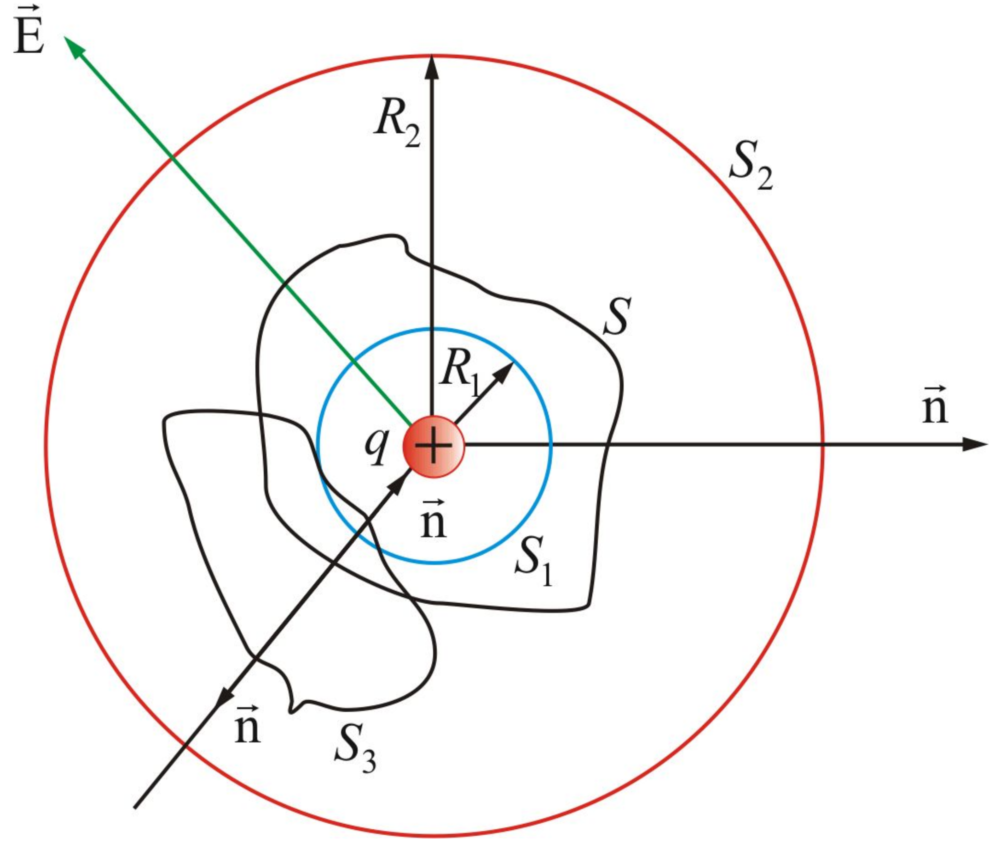
$$d\Phi_E = E dS \cos\alpha = E_n dS.$$

- В однородном поле

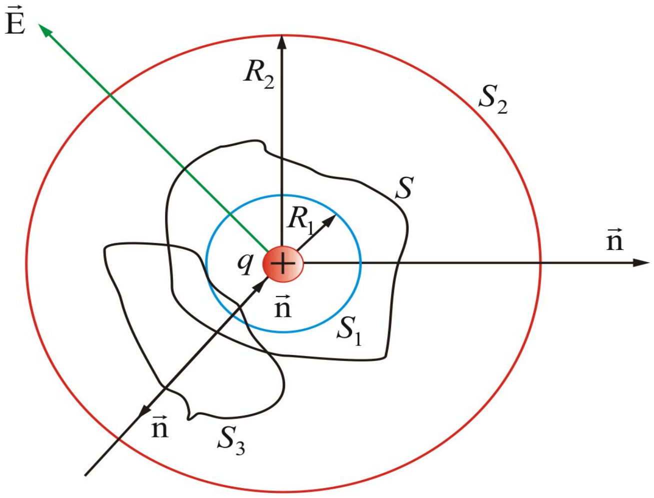
$$\Phi_E = ES.$$

- В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}.$$



- Поток вектора через произвольную замкнутую поверхность S, окружающую точечный заряд q .
- Окружим заряд q сферой S_1.

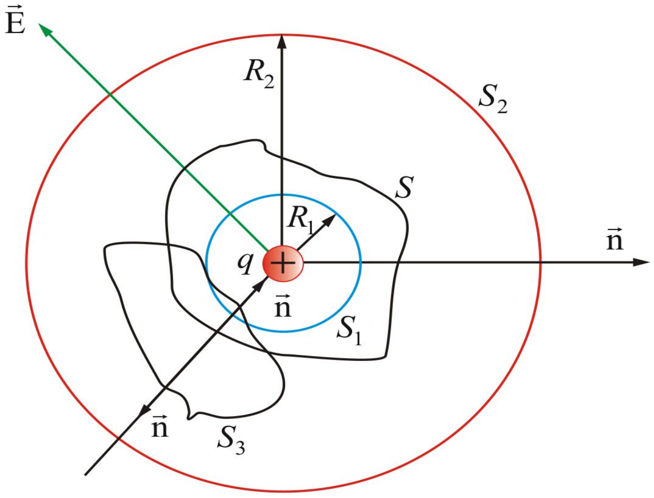


- Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1.
- В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$

Тогда поток через S_1

$$\Phi_E = \oint\limits_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$



Поток через сферу S_2, имеющую радиус R_2:

$$\Phi_E = \oint\limits_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

- Из непрерывности линии следует, что поток и через любую произвольную поверхность S будет равен этой же величине:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

– **теорема Гаусса для одного заряда**.

Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

– **теорема Гаусса для нескольких зарядов:**

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ε_0.

Полный поток проходящий через S_3, не охватывающую заряд q, равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

- Таким образом, для точечного заряда q, полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен:

- $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ – если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;
- $\Phi_E = 0$ – если заряд расположен вне замкнутой поверхности

Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой **объемной плотностью** различной в разных местах пространства:

$$\rho = \mathrm{d}q / \mathrm{d}V$$

- Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V.$$

- Тогда из теоремы Гаусса можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{\mathrm{E}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \qquad \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $<\rho>$. Тогда

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{<\rho>\Delta V}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\Delta V}\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}$$

- При $\Delta V \to 0$ $<\rho> \to \rho$ или $\frac{<\rho>}{\varepsilon_0} \to \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

- Величину, являющуюся пределом отношения $\oint \vec{E} d\vec{S}$ к ΔV, при $\Delta V \to 0$ называют дивергенцией поля E

$$\operatorname{div} \vec{E}$$

Дивергенция поля E

- $$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S}$$
- Дивергенция - скалярная функция координат.
- В декартовой системе координат

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Таким образом

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.

Введем векторный дифференциальный оператор (Набла) $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

где ***i***, ***j***, ***k*** – орты осей (единичные векторы).

- Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- **дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.**

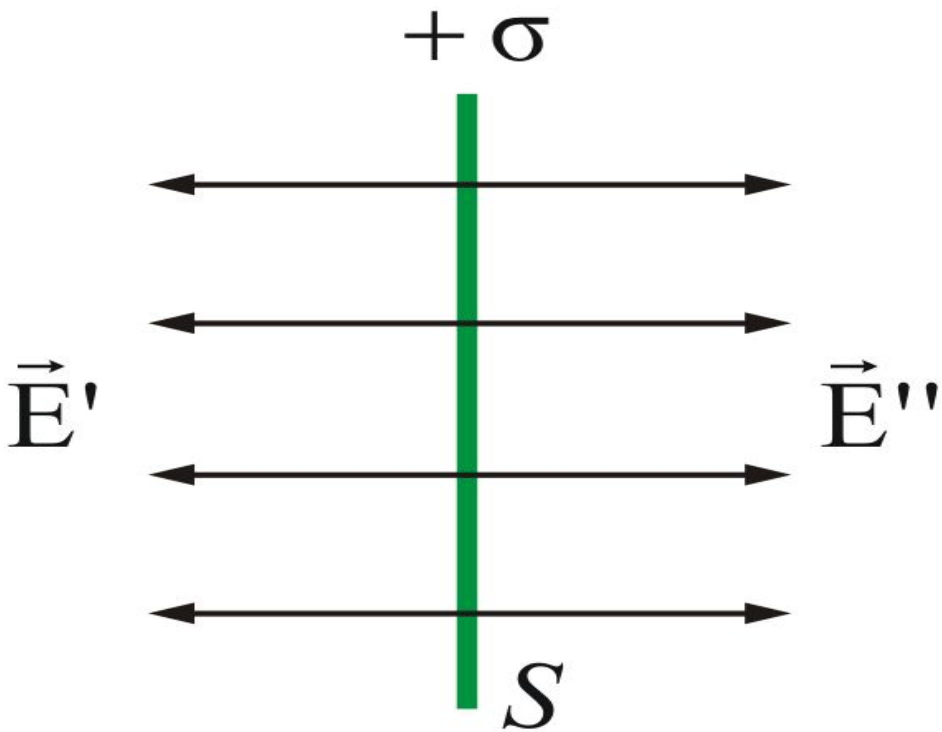
$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- В тех точках поля, где $\operatorname{div} E > 0$ – источники поля (положительные заряды),
- В тех точках поля, где $\operatorname{div} E < 0$ – стоки (отрицательные заряды).

- **Линии напряженности выходят из источников и заканчиваются в стоках.**

2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости

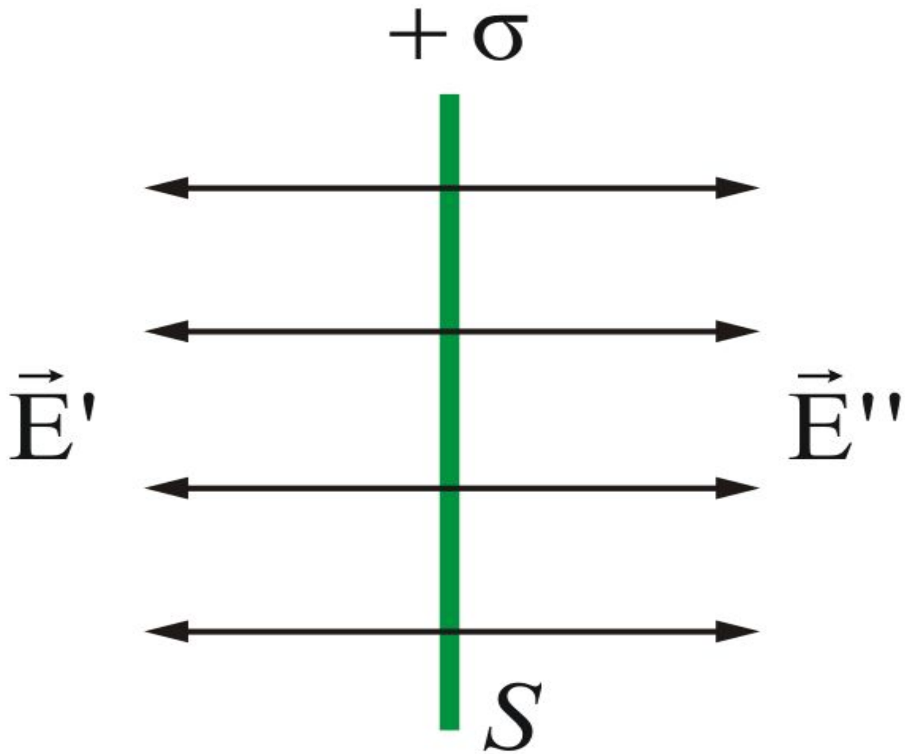


$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

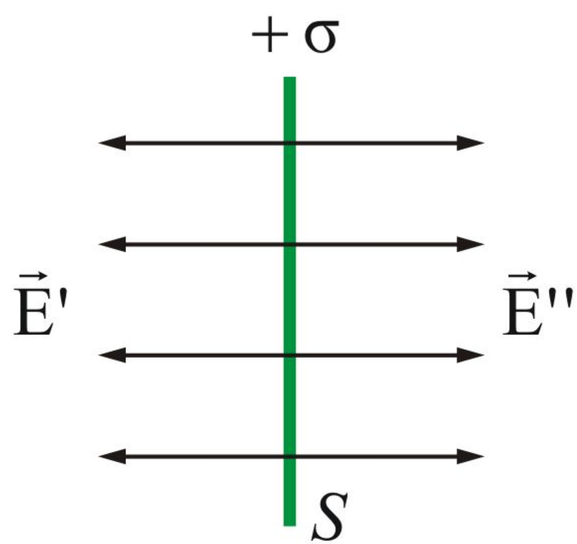
Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

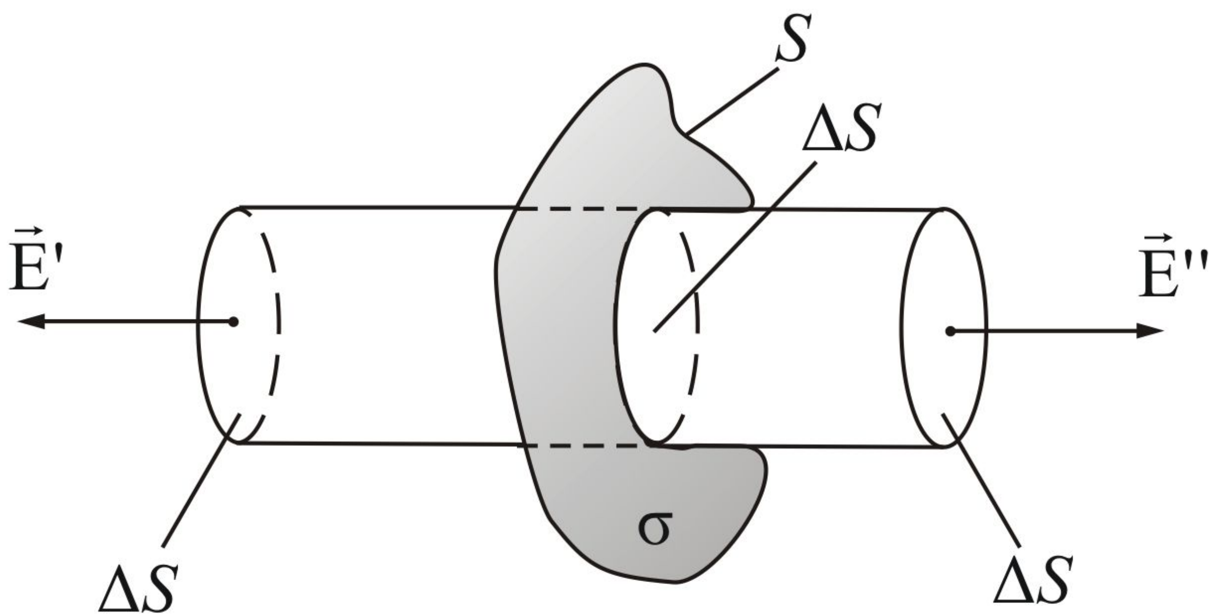
$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S},$$

dq – заряд, сосредоточенный на площади dS;
dS – физически бесконечно малый участок поверхности.



Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS, расположенными симметрично относительно плоскости





- Тогда

$$E' = E'' = E.$$

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

- Внутри поверхности заключен заряд. Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

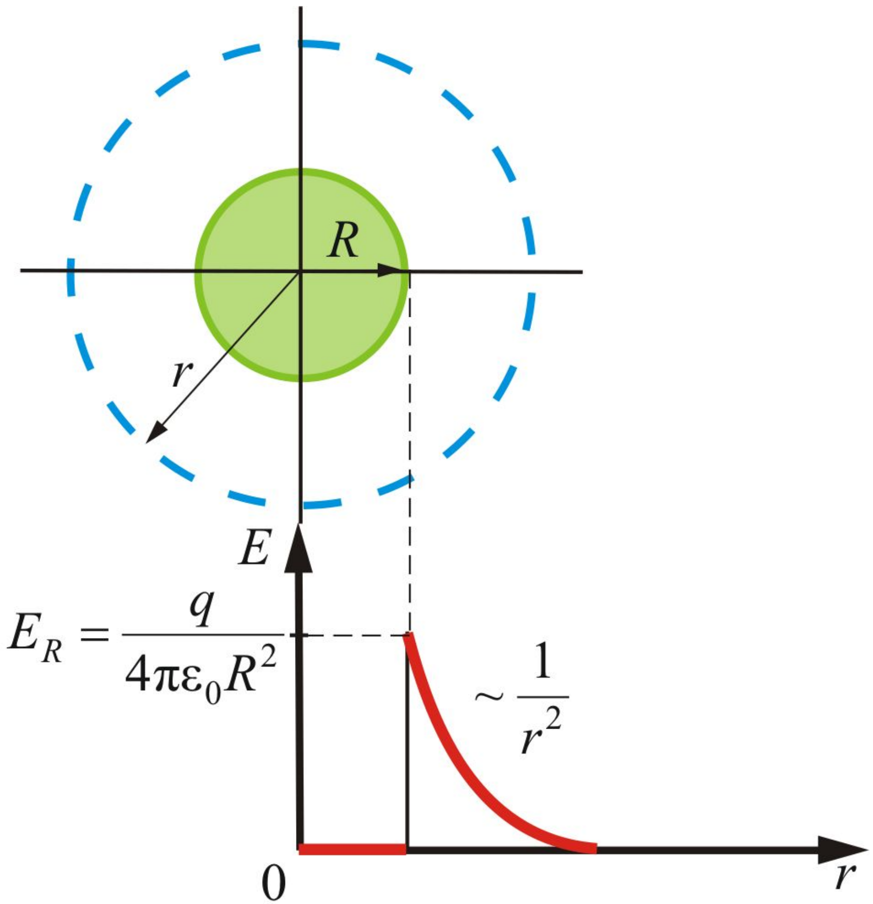
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S\frac{1}{\varepsilon_0}$$

- откуда видно, что **напряженность поля плоскости S** :
-

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

2.5.5. Поле заряженного пустотелого шара

- Вообразим вокруг шара – сферу радиуса r (рис).



- Если $r \geq R,$ то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд q, распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- откуда **поле вне сферы**:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

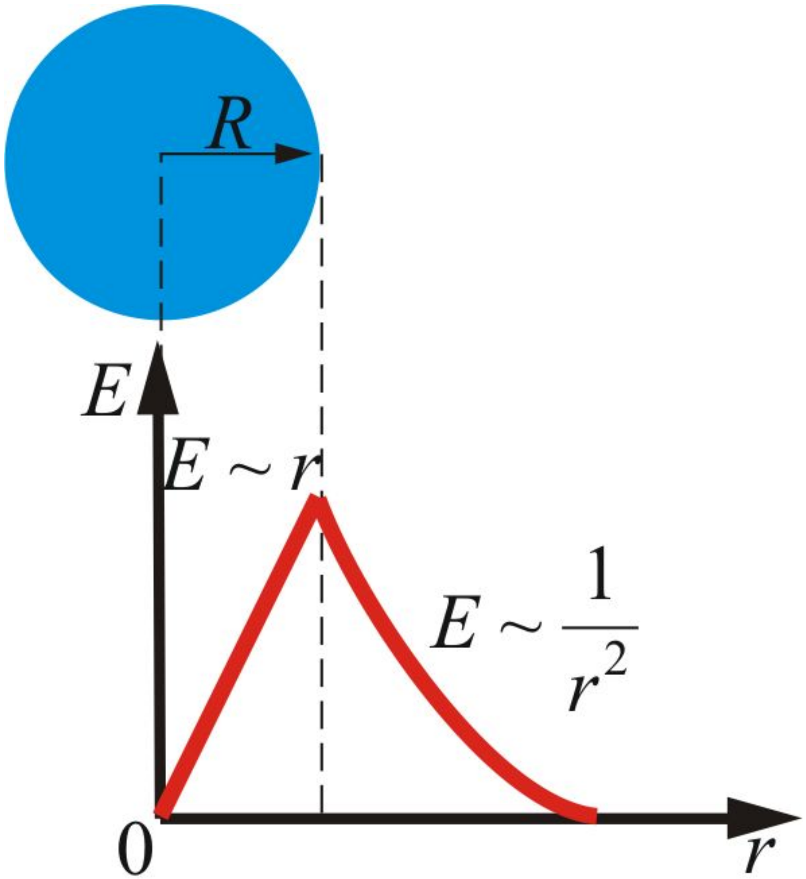
- **Внутри сферы**, при $r < R,$ поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

$$E(r) = 0.$$

Вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.

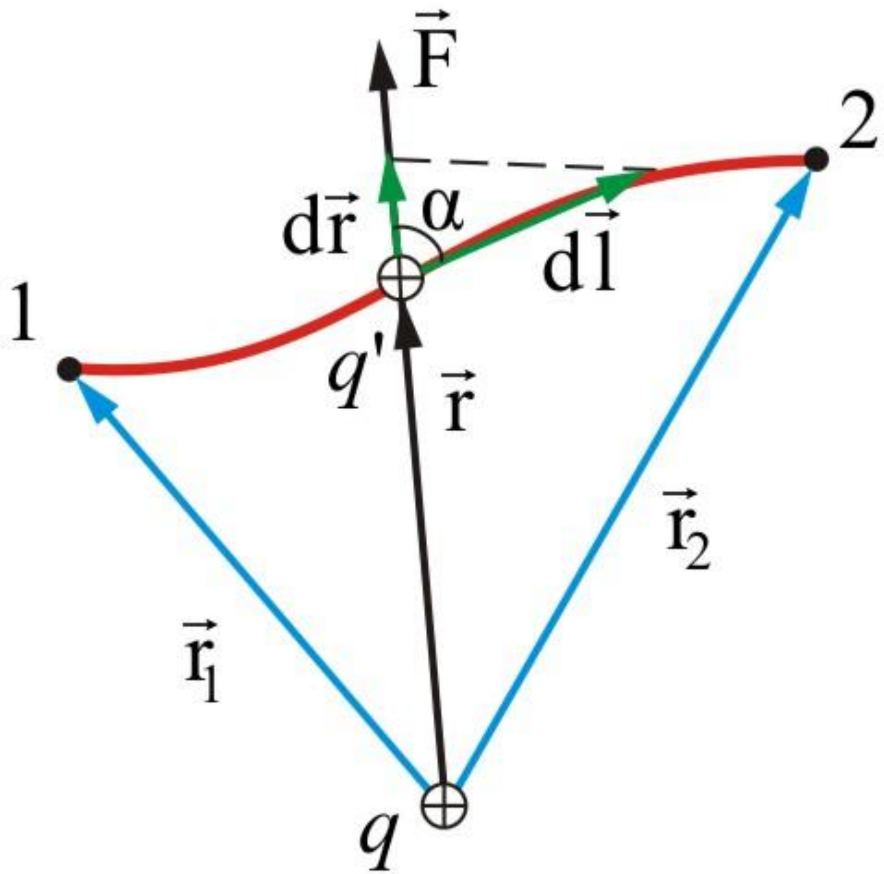
2.5.6. Поле объемного заряженного шара

- Для поля **вне шара** радиусом R получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

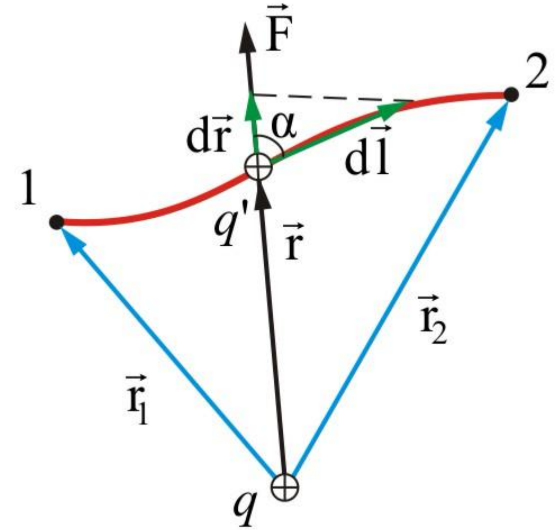
3.1. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$



- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q.
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила F

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

- Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом *q* по перемещению заряда *q'* из точки 1 в точку 2.
- Работа на пути d*l* равна:



- $$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha,$$

- где d*r* – приращение радиус-вектора при перемещении на d*l*; $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha,$

$$\mathrm{d}A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r.$$

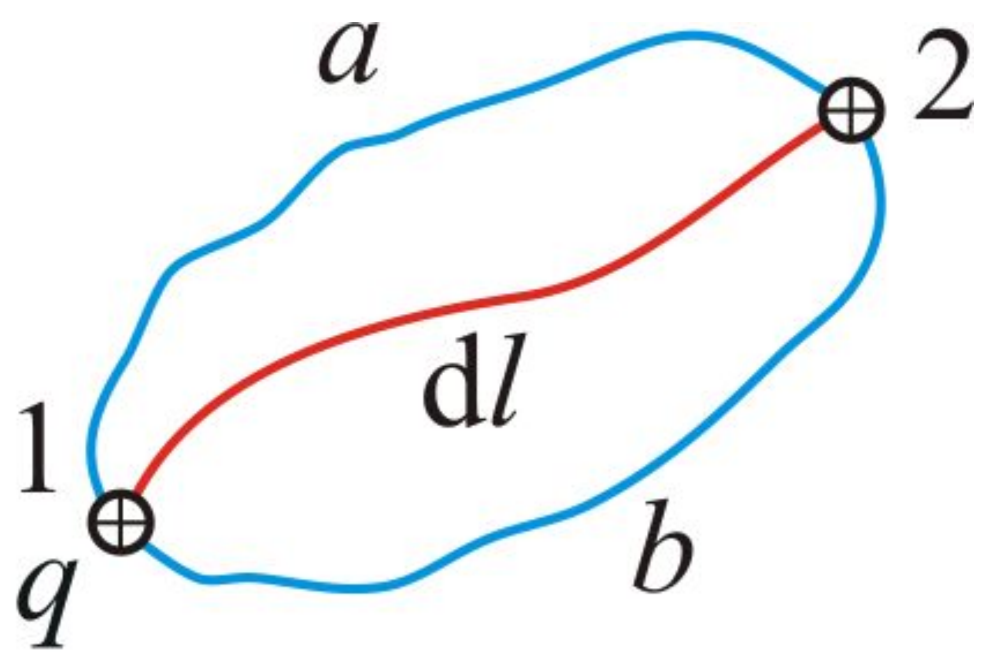
- Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

- Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля **консервативны**, а само поле – **потенциально**.

- Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд *q*, то элементарная работа сил поля будет равна:

$$\mathrm{d}A = q\vec{\mathrm{E}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}.$$



- Тогда вся работа равна: $$A = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$
- Такой интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией вектора** $\vec{E}$
- Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по *произвольному замкнутому пути*: $$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$
- Это утверждение и называют **теоремой о циркуляции**.
- Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми

3.2. Работа сил электростатического поля. Потенциальная энергия

- **Электростатическое поле потенциально, т.е. обладает потенциальной энергией**.
- Работу сил электростатического поля:

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Это выражение для работы можно переписать в виде:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

- Потенциальная энергия заряда q' в поле заряда q:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + \text{const.}$$

3.3. Потенциал. Разность потенциалов

- Разные пробные заряды $q', q'', \ldots$ будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями *W'*, *W''* и так далее.
- Однако отношение $W / q'_{\text{пр.}}$ будет для всех зарядов одним и тем же.
- Поэтому можно вести скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой собственно поля – **потенциал:**

$$\phi = \frac{W}{q'}.$$

- **потенциал** численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.

$$\phi = \frac{W}{q'}.$$

- потенциал точечного заряда

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

- физический смысл имеет разность потенциалов, поэтому договорились считать, что **потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю**.

- Другое определение потенциала:

$$\phi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\phi$$

- потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность

- Если поле создается системой зарядов, то:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k q'}{r_k}.$$

- Для потенциала $\phi = \sum_k \phi_k$ или $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{r_k}$

- т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен **алгебраической** сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

- Работа сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \phi_1 q - \phi_2 q = q(\phi_1 - \phi_2).$$

- Работа над зарядом q равна произведению заряда на убыль потенциала:

$$A = q(\phi_1 - \phi_2) = qU,$$

где U – напряжение.

$$A = qU$$

- за единицу φ принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.

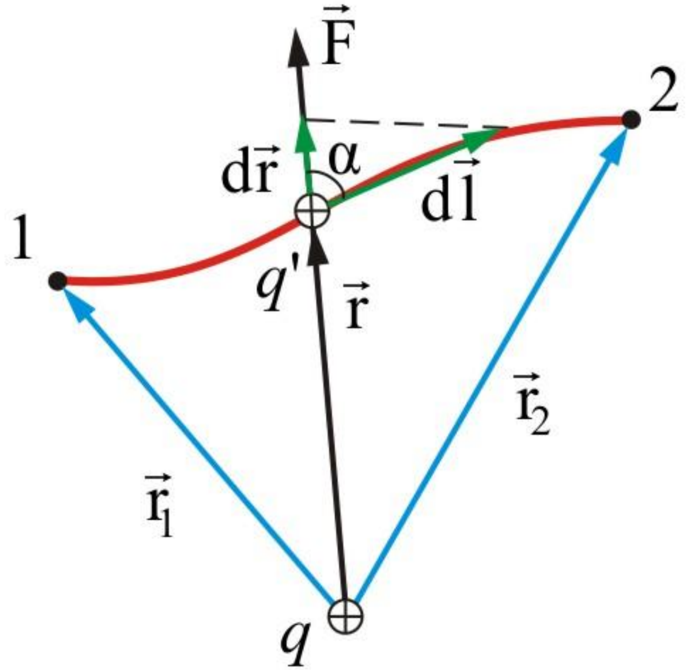
- В СИ единица потенциала $1\,\text{В} = 1\,\text{Дж}/1\,\text{Кл}$

- Электрон - вольт (эВ) – это работа, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона при прохождении им разности потенциалов 1 В, то есть:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл} \cdot \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

3.4. Связь между напряженностью и потенциалом

- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке можно найти так:



$$\mathrm{d}A = F_l \mathrm{d}l = E_l q \mathrm{d}l,$$

$$\mathrm{d}A = -q\mathrm{d}\phi; \qquad E_l q \mathrm{d}l = -q\mathrm{d}\phi$$

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dl}}.$$

- Тогда $$\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

- По определению градиента сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции

$\operatorname{grad}\phi$ – вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

- Где (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона ∇

Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

- Из условия $\vec{E} = -\nabla\phi$ следует одно важное соотношение, а именно, **величина, векторного произведения** $[\nabla, \vec{E}]$ **для стационарных электрических полей всегда равна нулю**.

- Величина $[\nabla, \vec{E}]$ называется **ротором** или **вихрем**

- **Уравнение электростатики**: $$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

- Таким образом кулоновское **электростатическое поле – безвихревое.**

3.5. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

- Напряженность равна разности потенциалов U на единицу длины силовой линии.

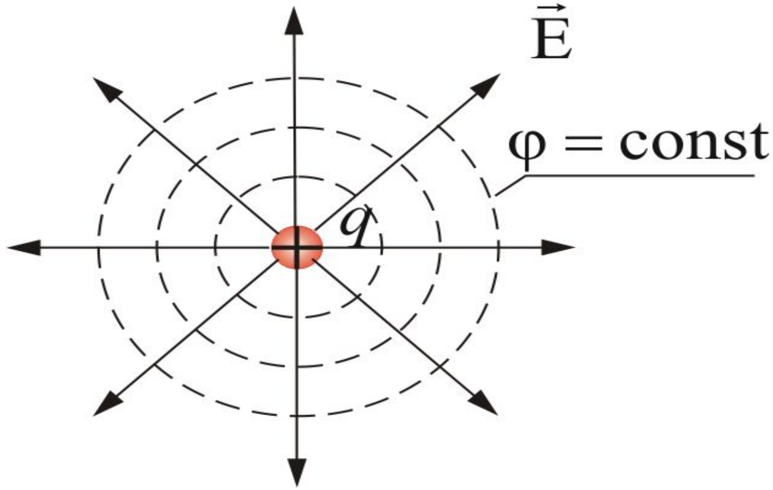
- В однородном электрическом поле силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить $\vec{E}$ наиболее просто:

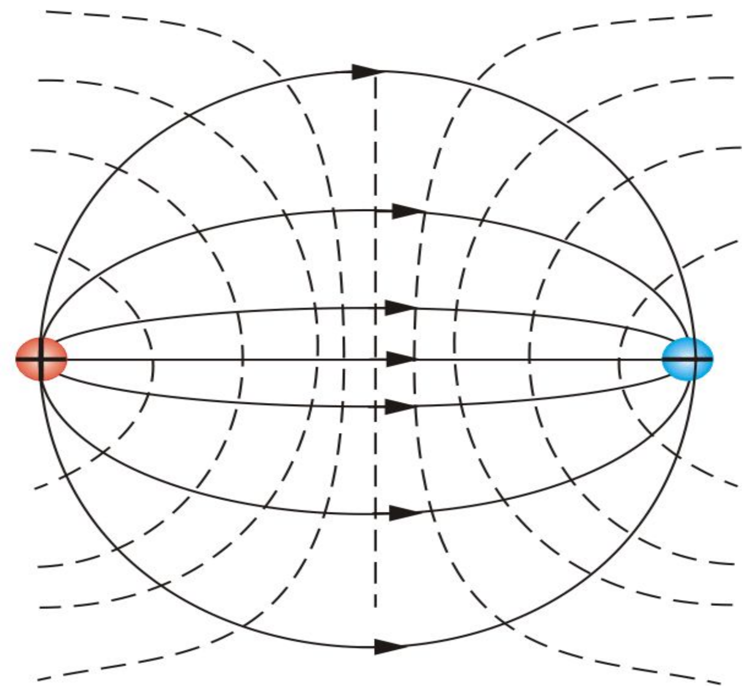
$$E = \frac{U}{l}$$

•Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной поверхностью.**

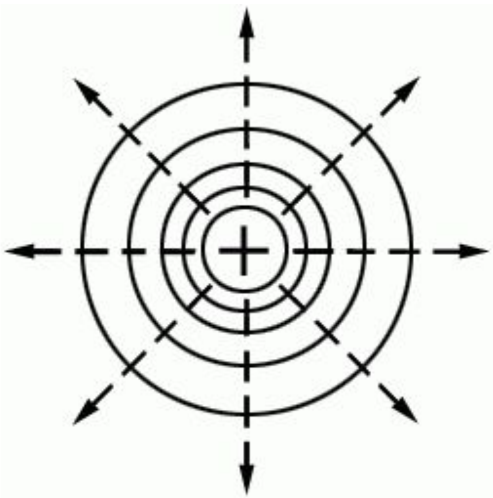
•Уравнение этой поверхности

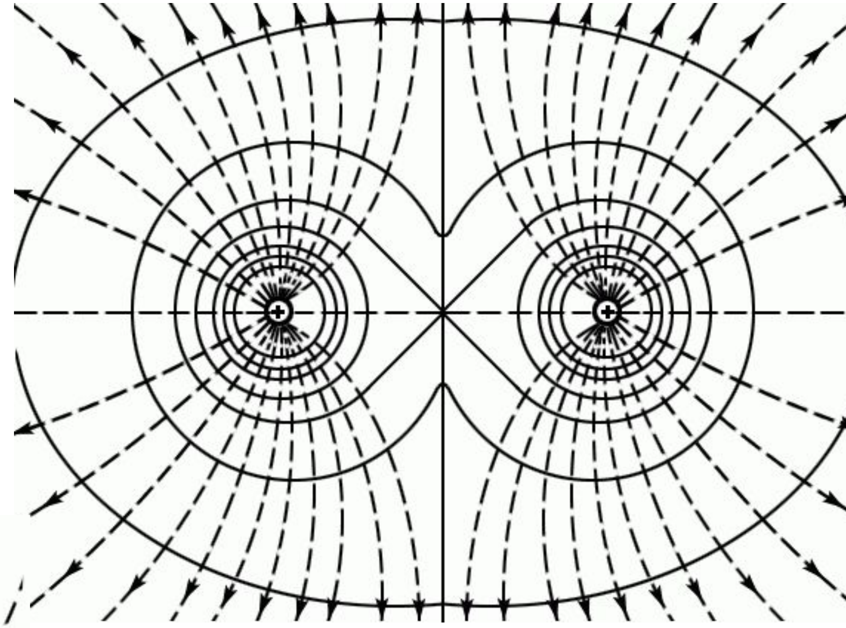
$$\phi = \phi(x, y, z) = \text{const}.$$

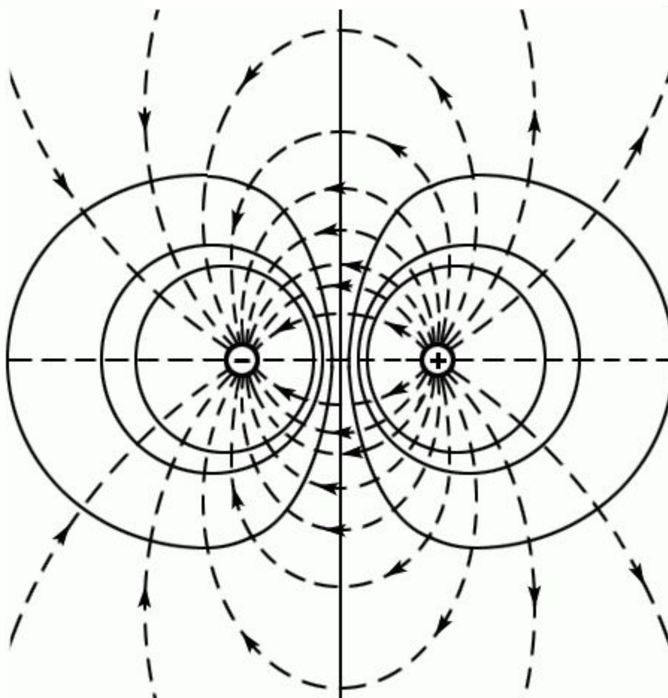




Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны







- Можно по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

- или по известным значениям $\vec{E}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

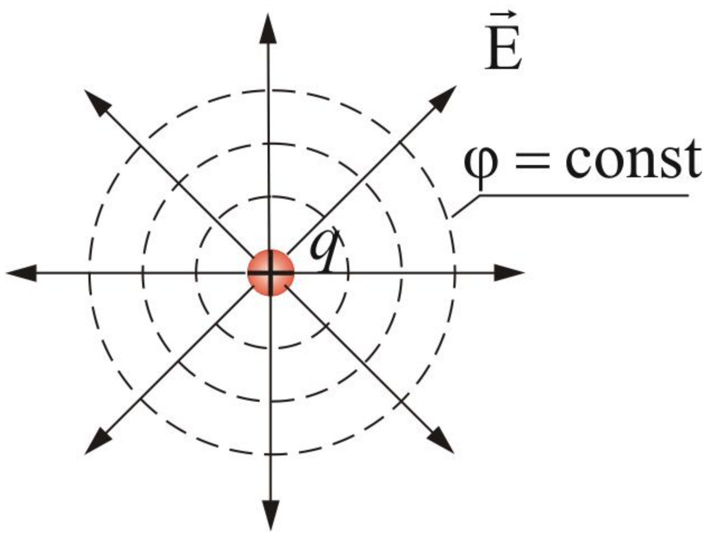
$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

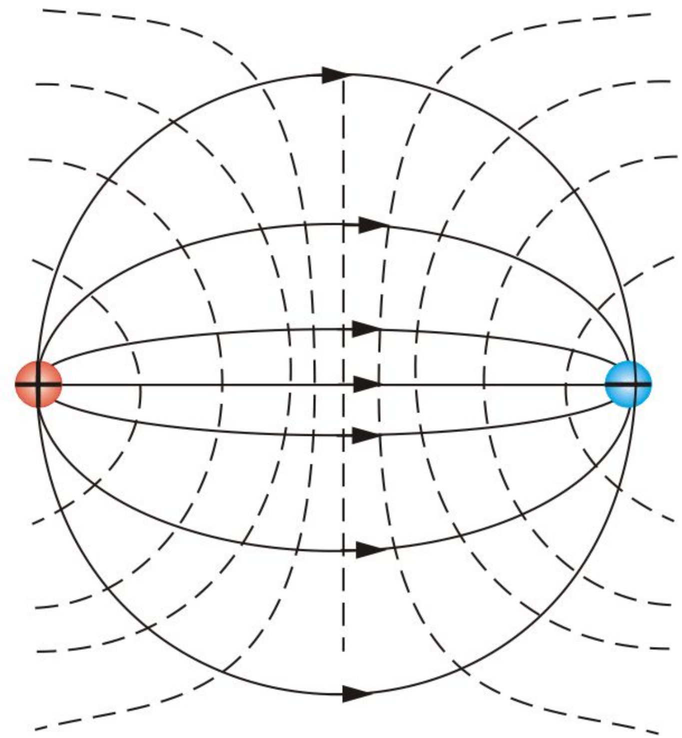
- Для обхода по замкнутому контуру получим: $\phi_1 = \phi_2$

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

- циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

•Линии электростатического поля **не могут быть замкнутыми**: они начинаются на положительных зарядах (**истоки**) и на отрицательных зарядах заканчиваются (**стоки**) или уходят в бесконечность

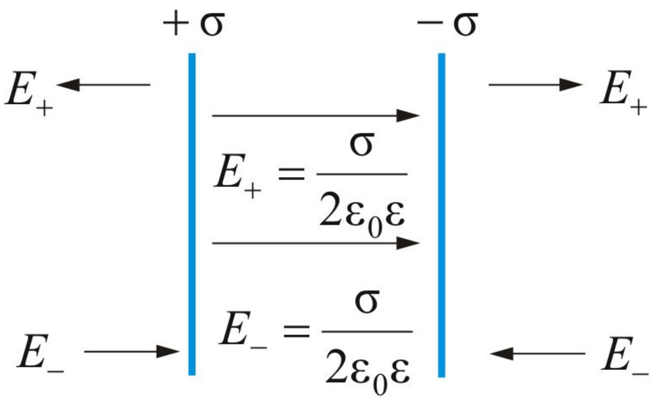




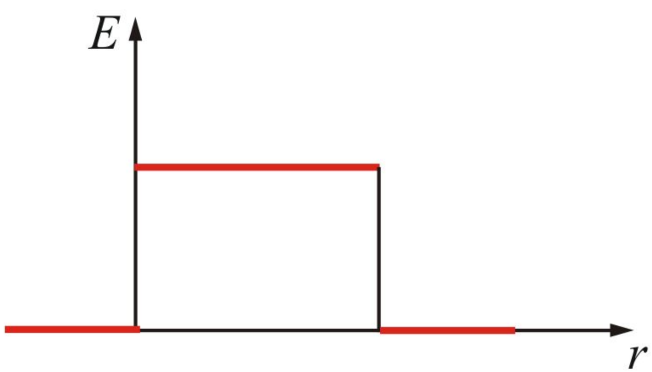
3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

3.7.1. Разность потенциалов между двумя бесконечными заряженными плоскостями

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}, \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{d}\phi = -E\mathrm{d}l$$



$$\int_1^2 \mathrm{d}\phi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x;$$

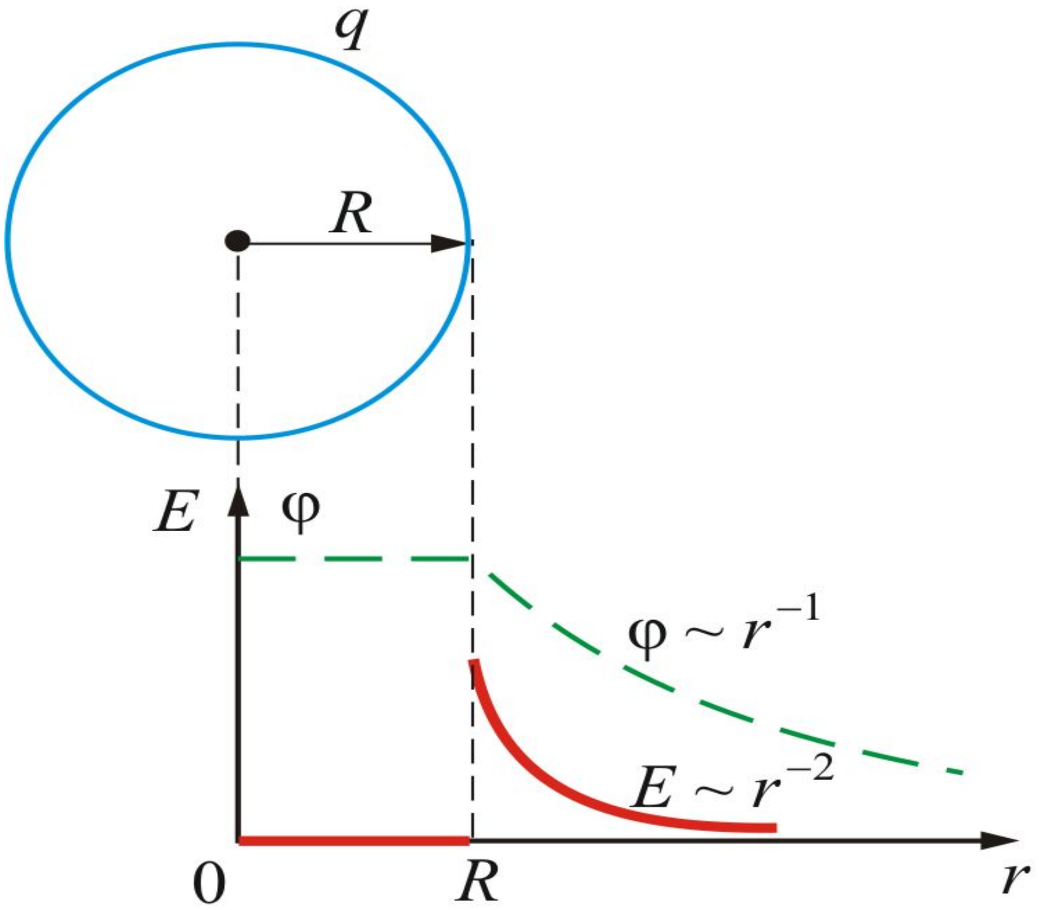


$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$

3.7.4. Разность потенциалов заряженной сферы (пустотелой)

- Напряженность поля сферы определяется формулой

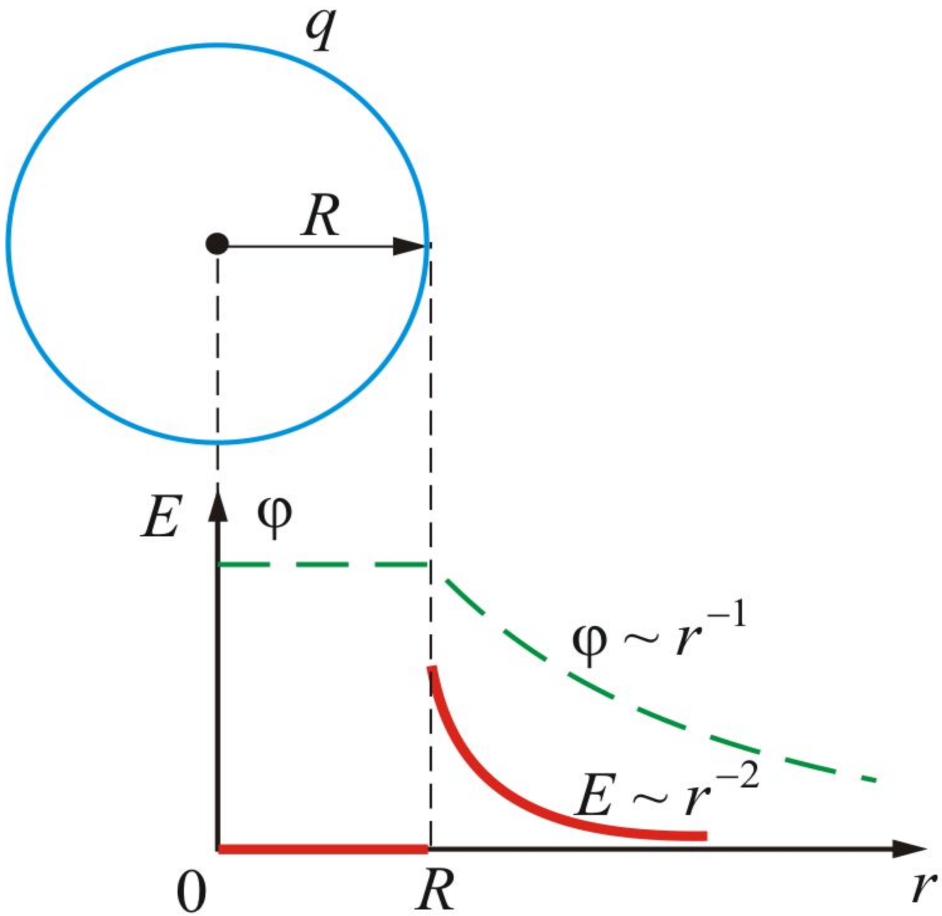
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



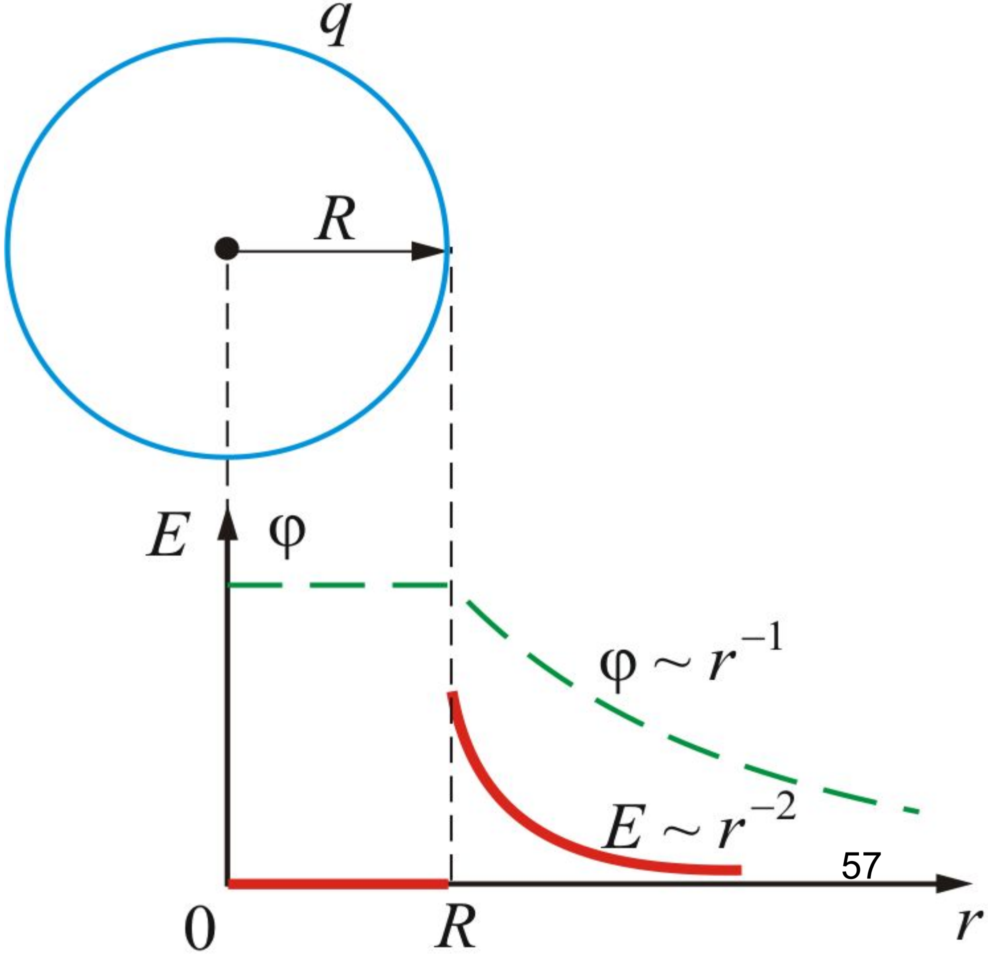
• А т.к. $d\phi = -E dr$, то

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

т.е. $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.



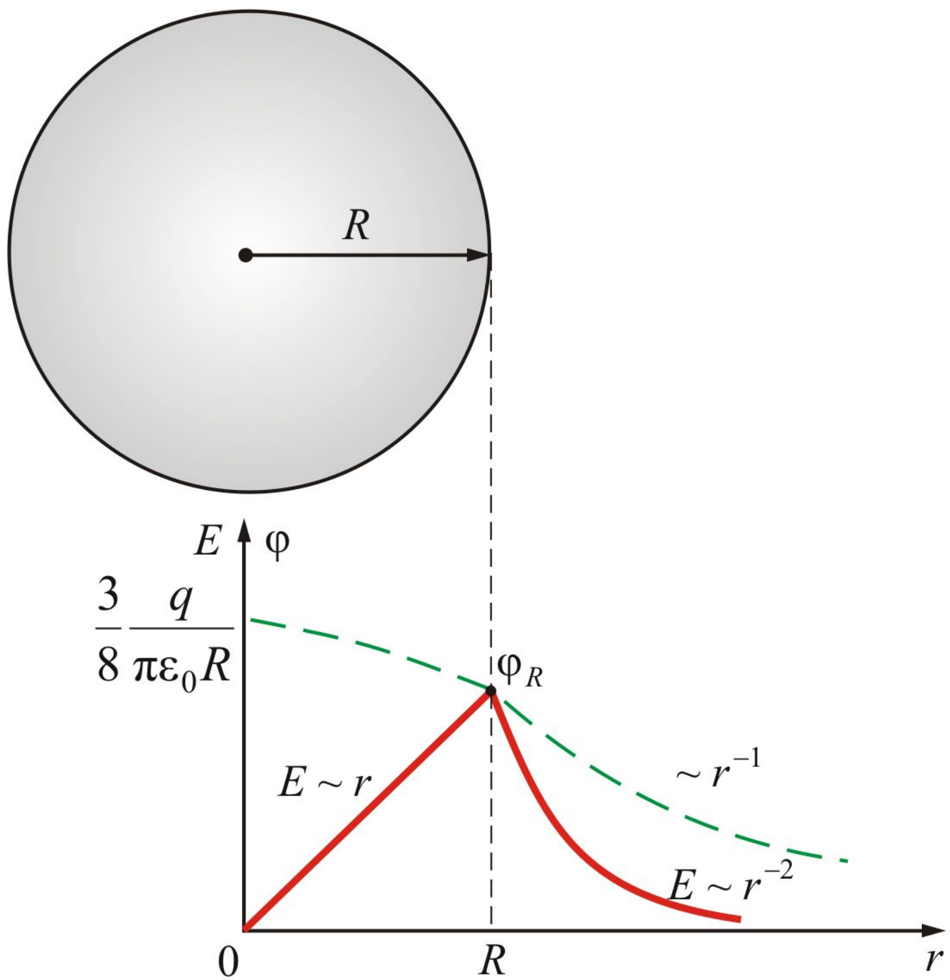
$$\phi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхн.} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$



3.7.5. Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

- Имеем диэлектрический шар заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$



- Напряженность поля шара, вычисленная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:
-
- $$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара } (r > R). \end{cases}$$

- Отсюда найдем разность потенциалов шара:

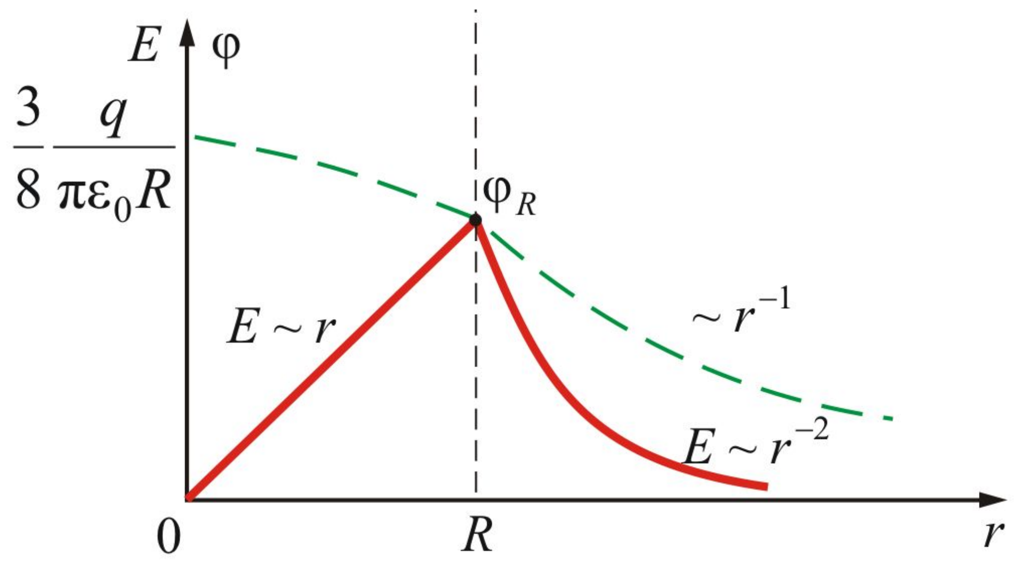
$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 E\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_1^2 r\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

или

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}.$$

- Потенциал шара:

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r = 0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара } (r \ge R). \end{cases}$$



- Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы:**

- С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать Е и φ от различных заряженных поверхностей.

- Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.

- Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.