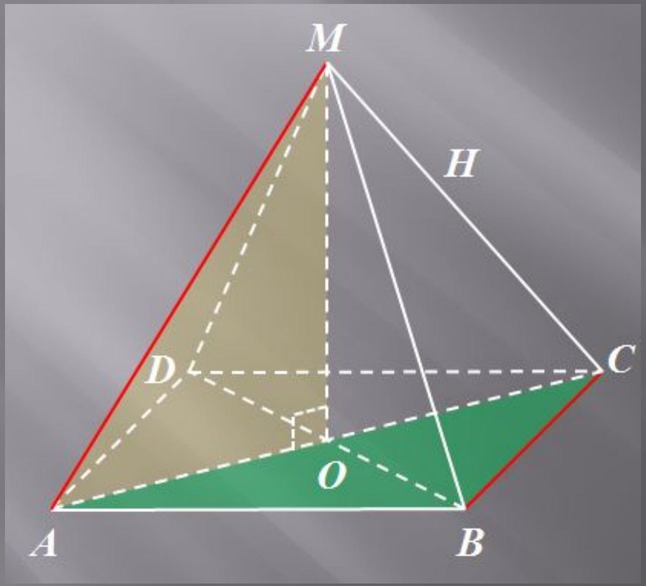
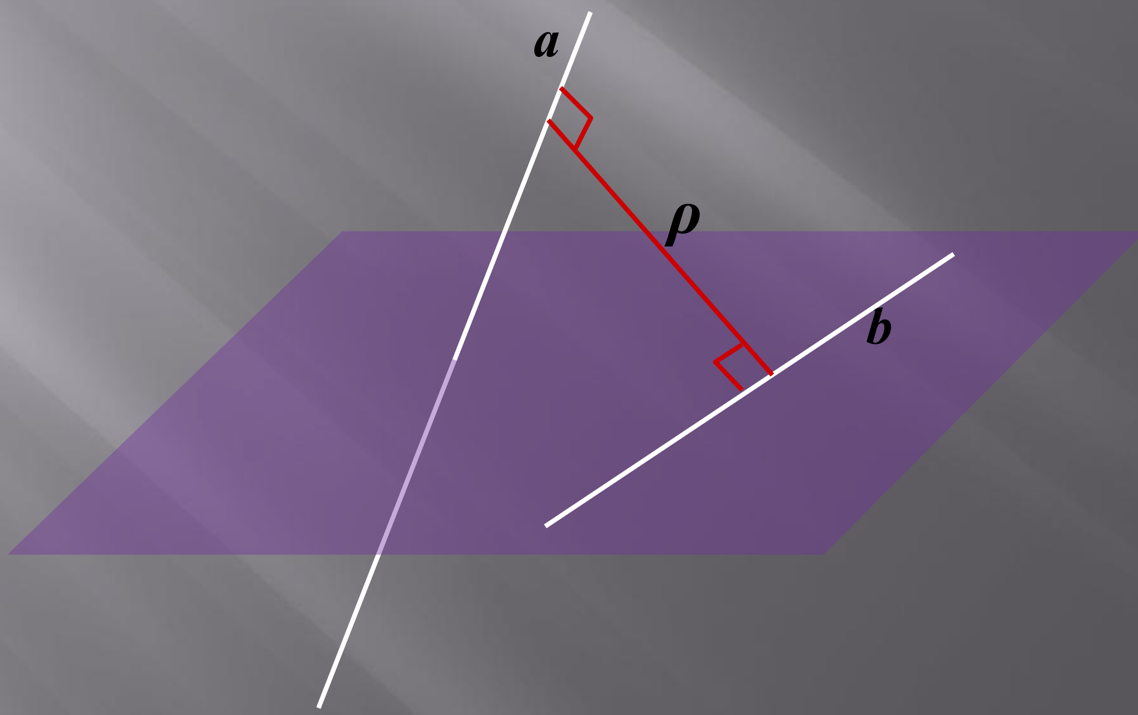
Задание 13.
Расстояние между скрещивающимися прямыми.



Поэтапно вычислительный метод (построение общего перпендикуляра).

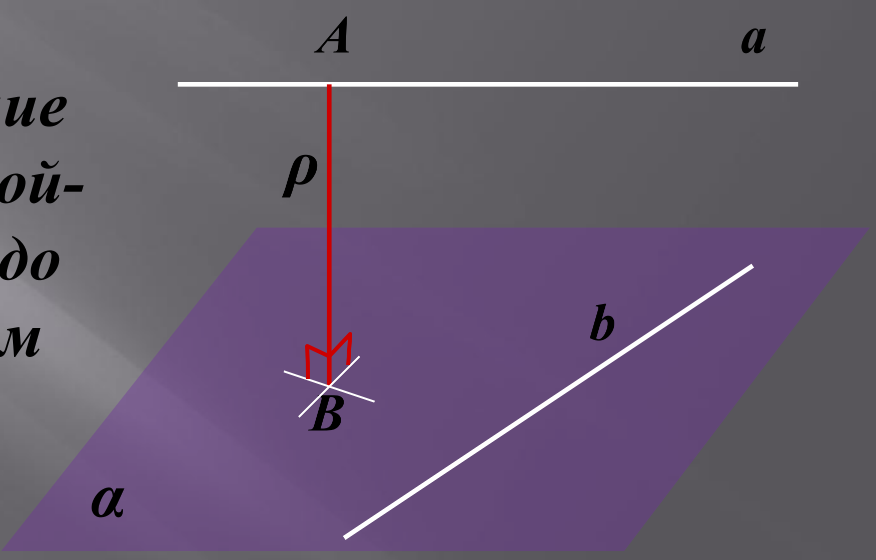
Расстояние между скрещивающимися прямыми есть длина их общего перпендикуляра (отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного каждой из них).



*

Метод параллельных прямой и плоскости.

Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости (на этом этапе можно использовать координатный метод)

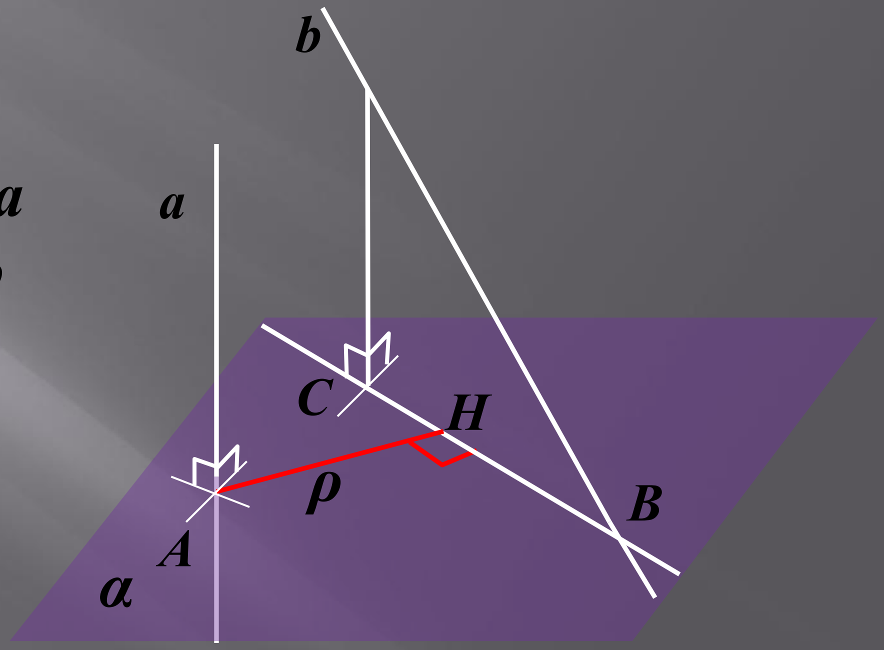


http://ta-shah.ucoz.ru/load/egeh/egeh_s2/koordinatnyj_metod_kljuchevye_zadachi/14-1-0-73

$$\left.\begin{array}{c} a \parallel \alpha \\ b \in \alpha \\ AB \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \rho(a;b) = AB$$

Метод ортогонального пректирования.

Построить плоскость, перпендикулярную одной из данных прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию другой прямой.



$a \perp \alpha$

$a \cap \alpha = A$

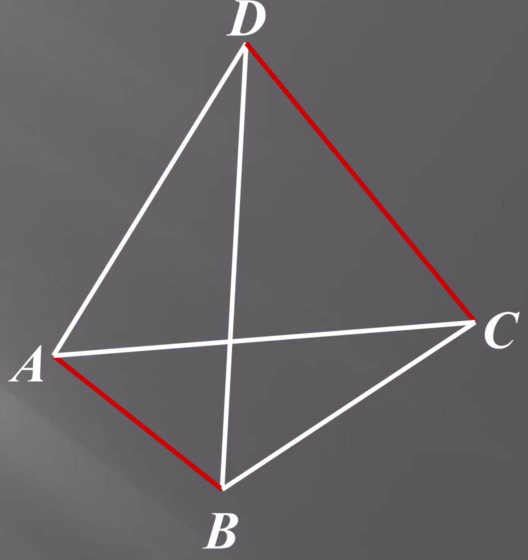
CB – проекция b

$AH \perp CB$

$\Rightarrow \rho(a;b) = AH$

Опорная задача.

Если AB и CD – скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды ABCD, d – расстояние между ними, α – угол между AB и CD, V – объем пирамиды ABCD, то



$$d = \frac{6V}{AB \cdot CD \cdot \sin\alpha}$$

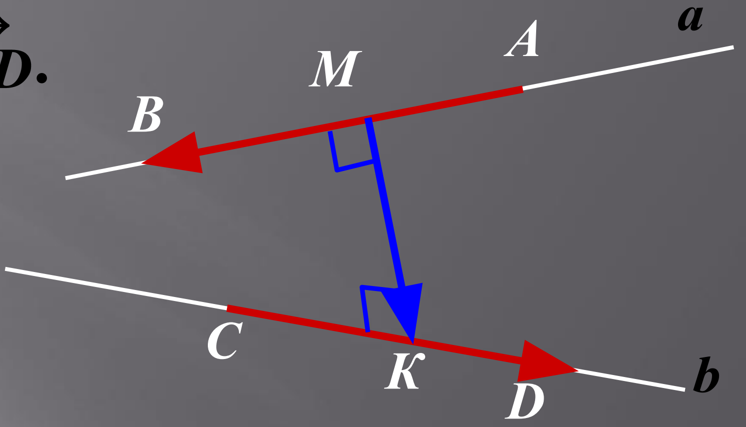
Методы нахождения угла между прямыми смотри по адресу:

http://ta-shah.ucoz.ru/load/egeh/egeh_s2/s2_4_ugol_mezhdu_prjamymi/14-1-0-78

Пример

Векторно - координатный метод.

Определить координаты направляющих векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.



Пусть $MK \perp AB, CD$, тогда выполнено условие:

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{MK} = 0 \\ \vec{CD} \cdot \vec{MK} = 0 \end{cases}$$

Из системы определить координаты $\vec{MK}$, затем найти $\left|\vec{MK}\right| = \rho(a;b)$

Замечание: для записи координат точек M и K воспользоваться формулой:

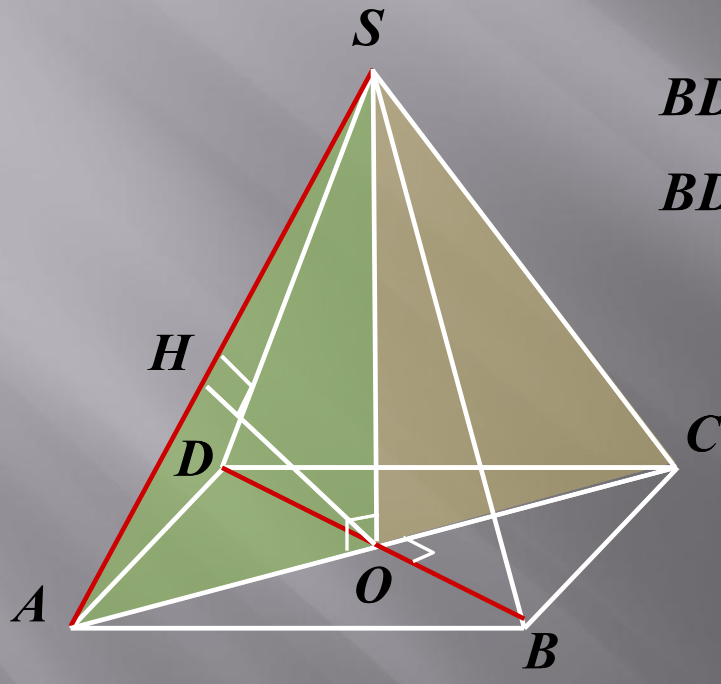
Если AM:MB=k, то

$$M\left(\frac{x_A + kx_B}{k+1}; \frac{y_A + ky_B}{k+1}; \frac{z_A + kz_B}{k+1}\right)$$

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми BD и SA .

Решение:

Д. п.: $OH \perp AS$



$BD \perp AC, \in (ASC)$

$BD \perp OS, \in (ASC)$

$\Rightarrow BD \perp (ASC)$

$OH \in (ASC)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow OH \perp BD$

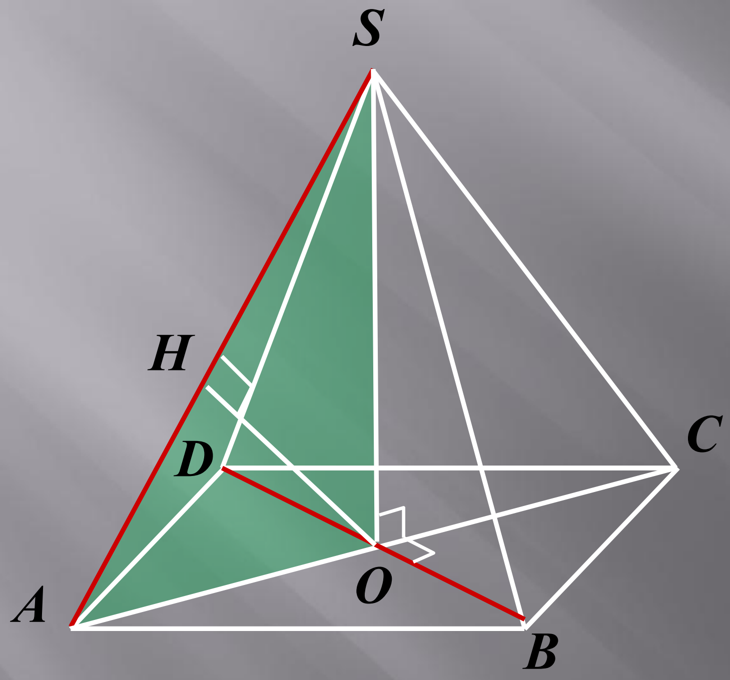
OH – общий перпендикуляр к прямым BD и AS

$\Rightarrow \rho(BD; AS) = OH$

OH можно найти из треугольника AOS методом площадей.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми BD и SA.

Решение:



$$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ***(половина диагонали единичного квадрата)***

$$SO=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

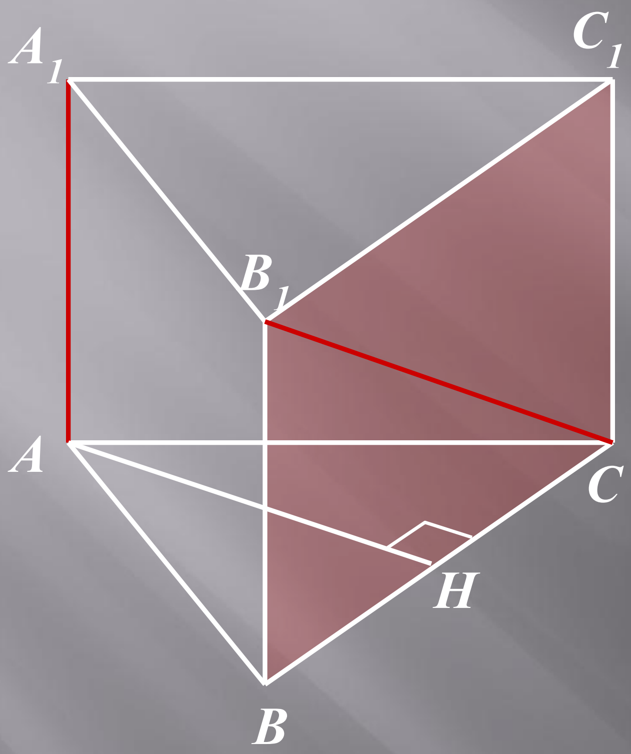
$$S_{ASO}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OS=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

$$S_{ASO}=\frac{1}{2}\cdot AS\cdot OH$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot OH\quad\Rightarrow OH=\frac{1}{2}$$

Ответ $:\frac{1}{2}.$

В правильной треугольной призме $ABCA_1C_1B_1$, все рёбра которой равны 1, найти расстояние между прямыми AA_1 и B_1C.



Решение:

$AA_1 \parallel BB_1, \in (BB_1C_1)$

$\Rightarrow AA_1 \parallel (BB_1C_1)$

$B_1C \in (BB_1C_1)$

$\Rightarrow \rho(AA_1; BB_1) =$
$= AH$

Д. п.: $AH \perp BC \Rightarrow \perp (BB_1C_1)$

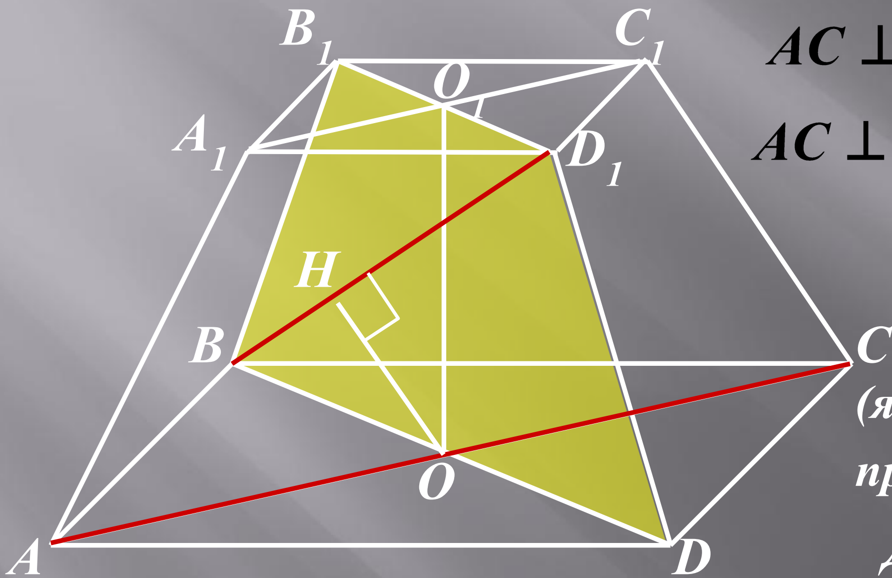
(перпендикуляр, проведенный к пересечению перпендикулярных плоскостей)

Из треугольника ACH $\quad AH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ : $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В правильной усечённой четырехугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами оснований равными 4 и 8 и высотой равной 6 найти расстояние между диагональю BD_1 диагональю большего основания AC.

Решение:



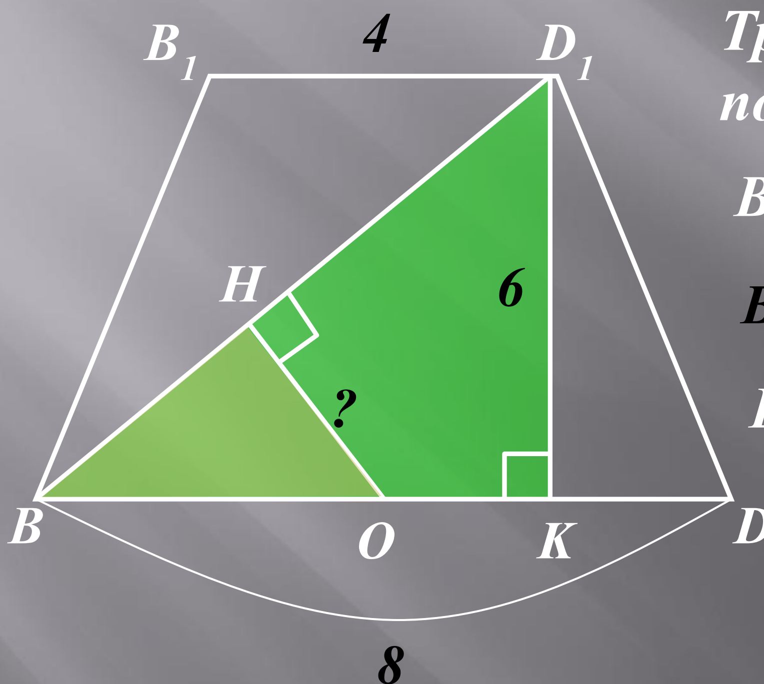
$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BD, \in (BB_1D_1) \\ AC \perp OO_1, \in (BB_1D_1) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AC \perp (BB_1D_1) \\ BD_1 \in (BB_1D_1) \\ \text{(является своей проекцией на } (BB_1D_1)\text{)} \\ \text{Д. п.: } OH \perp BD_1 \end{array}\right| \Rightarrow \rho(AC; BD_1) = OH$$

Рассмотрим равнобедренную трапецию BB_1D_1D

В правильной усечённой четырехугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами оснований равными 4 и 8 и высотой равной 6 найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC.

Решение:



Треугольники BD_1K и BOH подобны по двум углам

В треугольнике BD_1K

$$BK = 6 \qquad BD_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

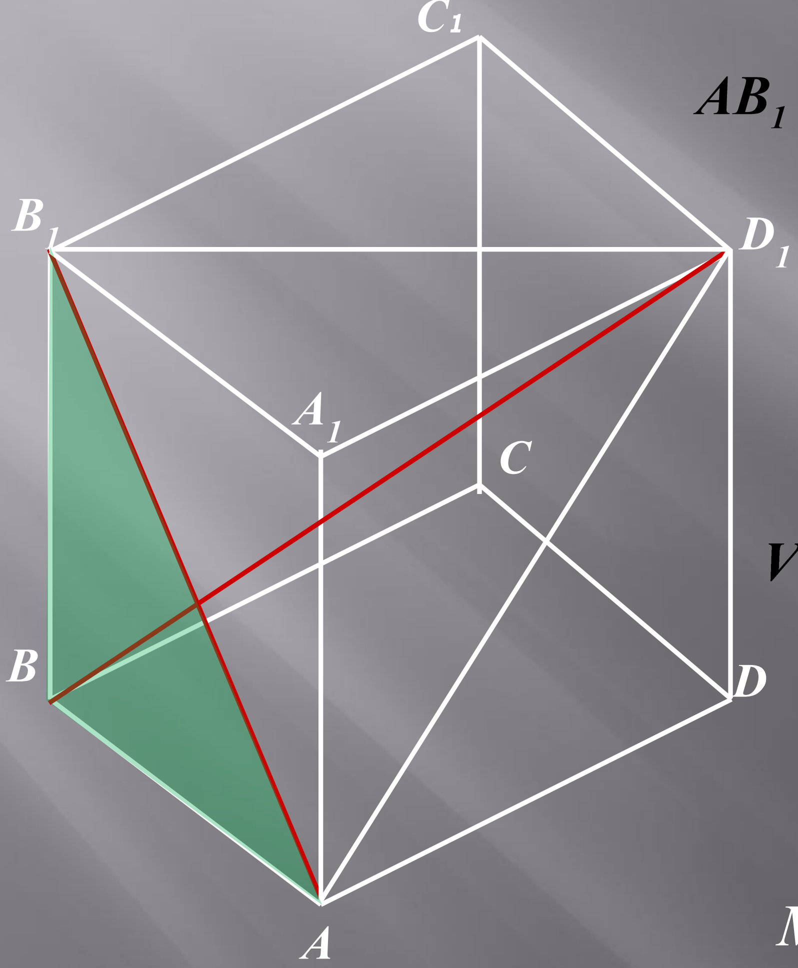
В треугольнике BHO $\qquad BO = 4$

$$\frac{BD_1}{BO} = \frac{D_1K}{OH} \qquad \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{6}{OH}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{24}{6\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Ответ : $2\sqrt{2}$.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.



Решение:

$AB_1 = \sqrt{2}$ **(диагональ единичного квадрата)**

$BD_1 = \sqrt{3}$ **(диагональ единичного куба)**

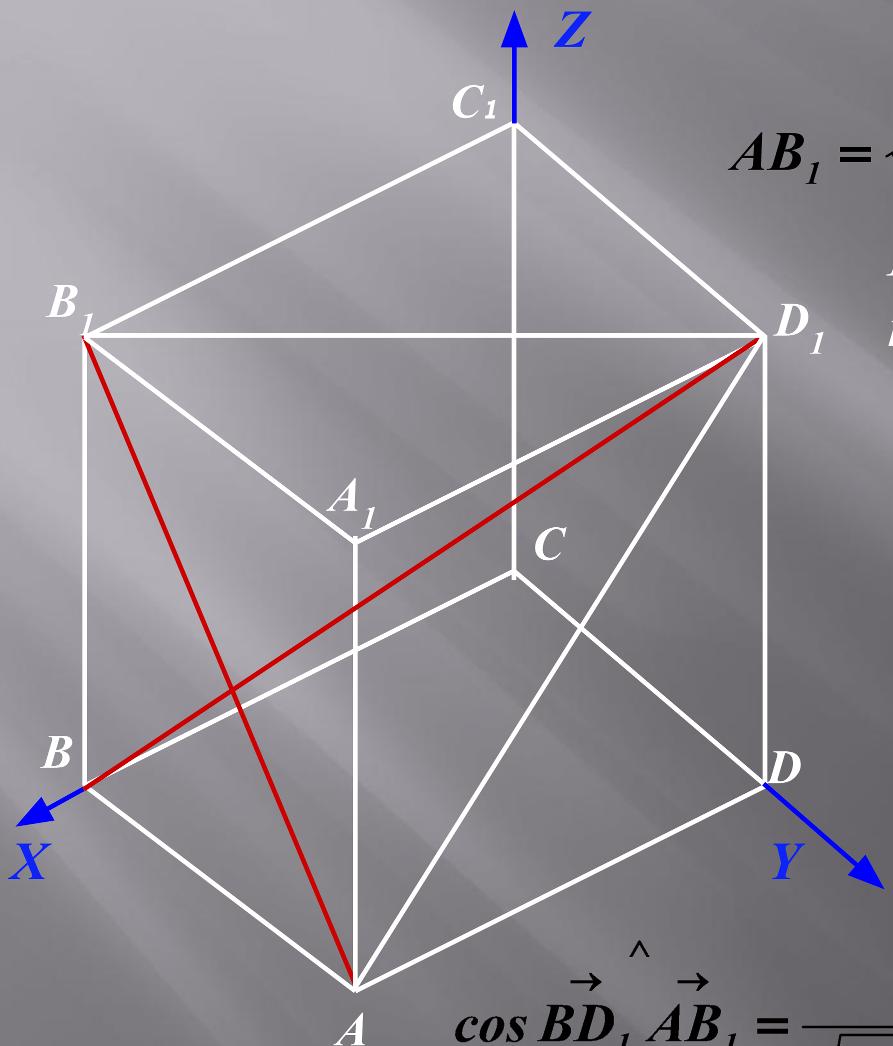
Рассмотрим пирамиду D_1AB_1B.
За основание примем AB_1B,
тогда высота – BC.

$$V_{D_1AB_1B} = \frac{1}{3}S_{AB_1B}\cdot BC = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Найдем угол между прямыми AB_1 и B_1D_1.

Можно использовать векторно - координатный метод.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.



Решение:

$$AB_1 = \sqrt{2} \quad BD_1 = \sqrt{3} \quad V_{D_1AB_1B} = \frac{1}{6}$$

Введем прямоугольную систему координат

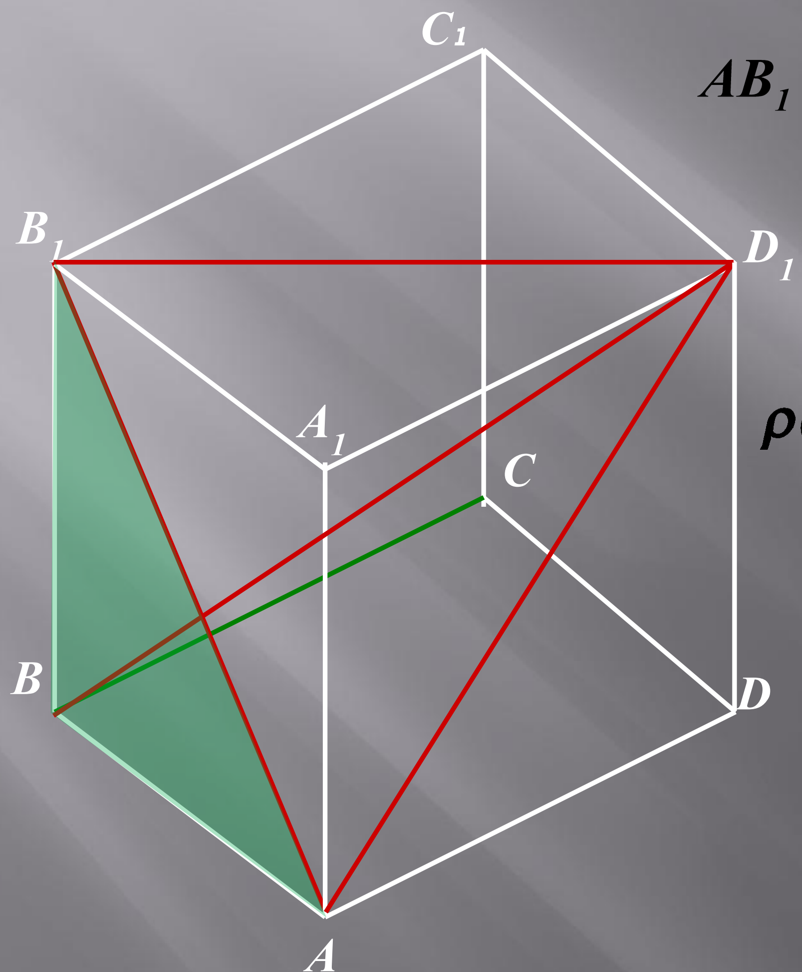
Тогда: $B(1;0;0)$ $B_1(1;0;1)$ $D_1(0;1;1)$ $A(1;1;0)$

$$\vec{BD_1}\{-1;1;1\} \quad \vec{AB_1}\{0;-1;1\}$$

$$\cos \vec{BD_1}\hat{\ }\vec{AB_1} = \frac{\left|\vec{BD_1}\cdot\vec{AB_1}\right|}{\left|\vec{BD_1}\right|\cdot\left|\vec{AB_1}\right|} =$$

$$\cos \vec{BD_1}\hat{\ }\vec{AB_1} = \frac{\left|-1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = 0$$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.



Решение:

$$AB_1 = \sqrt{2} \quad BD_1 = \sqrt{3} \quad V_{D_1AB_1B} = \frac{1}{6}$$

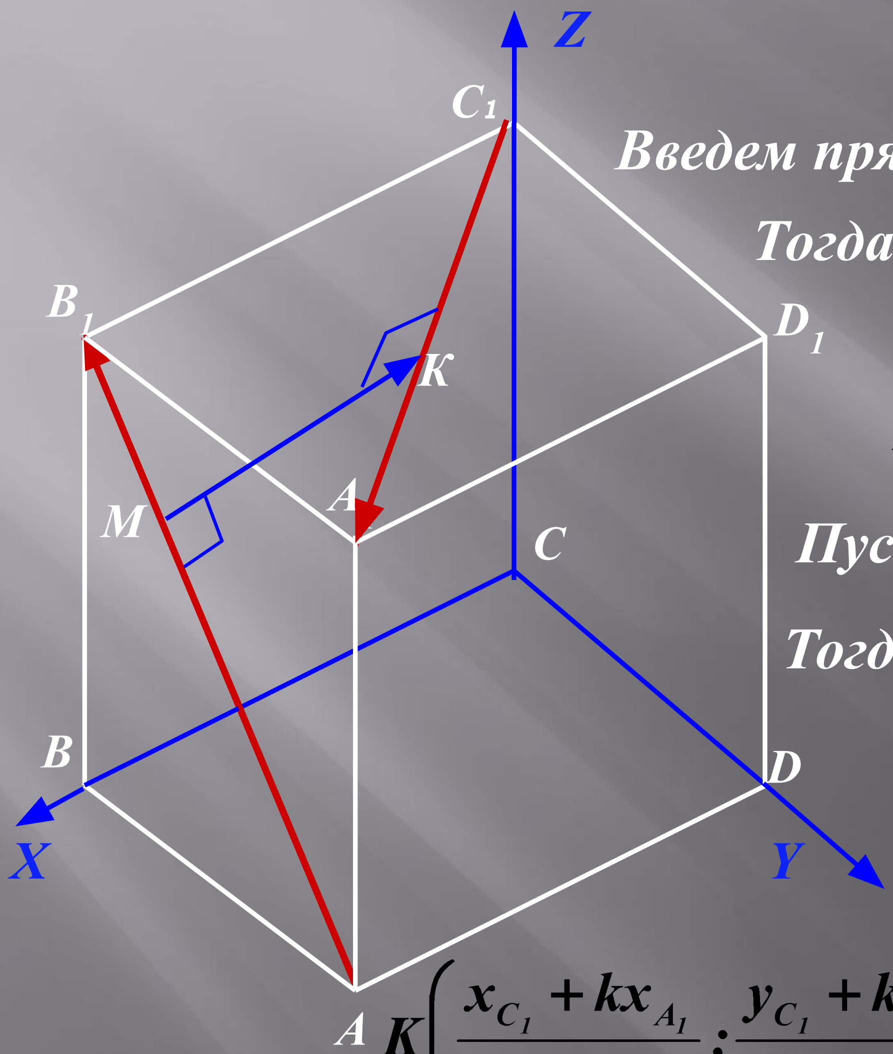
$$\cos \widehat{\vec{BD_1}, \vec{AB_1}} = 0 \Rightarrow \sin \widehat{\vec{BD_1}, \vec{AB_1}} = 1$$

$$\rho(BD_1; AB_1) = \frac{6V_{D_1AB_1B}}{BD_1 \cdot AB_1 \cdot \sin \widehat{\vec{BD_1}, \vec{AB_1}}} =$$

$$= \frac{6 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ответ $: \frac{\sqrt{6}}{6}.$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба AB_1 и диагональю грани A_1C_1.



Решение:

Введем прямоугольную систему координат

Тогда: $B_1(1;0;1)$ $A(1;1;0)$

$A_1(1;1;1)$ $C_1(0;0;1)$

$\vec{AB_1}\{0;-1;1\}$ $\vec{C_1A_1}\{1;1;0\}$

Пусть $MK \perp AB_1; C_1A_1$ и $\left| \begin{array}{l} AM : MB = m \\ C_1K : KA_1 = k \end{array} \right.$

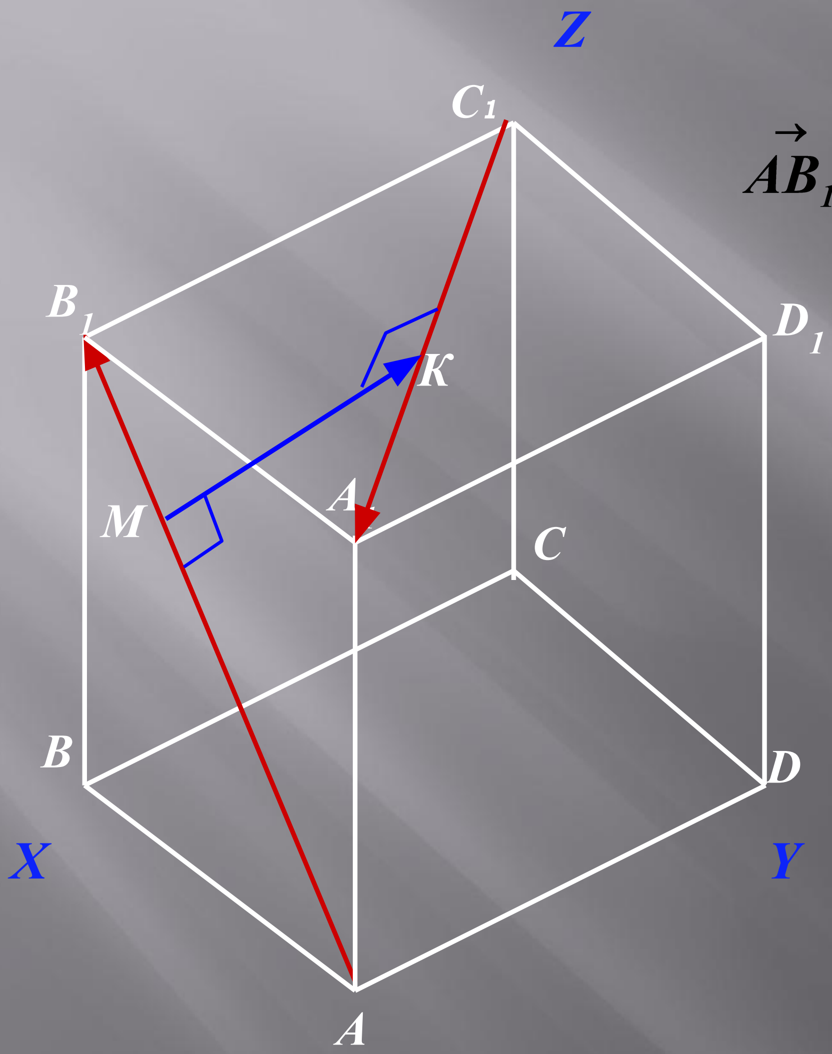
Тогда:

$$M\left(\frac{x_A + mx_{B_1}}{m+1}; \frac{y_A + my_{B_1}}{m+1}; \frac{z_A + mz_{B_1}}{m+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1+m}{m+1}; \frac{1}{m+1}; \frac{m}{m+1}\right)$$

$$K\left(\frac{x_{C_1} + kx_{A_1}}{k+1}; \frac{y_{C_1} + ky_{A_1}}{k+1}; \frac{z_{C_1} + kz_{A_1}}{k+1}\right) = \left(\frac{k}{k+1}; \frac{k}{k+1}; \frac{1+k}{k+1}\right)$$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба AB_1 и диагональю грани A_1C_1.



Решение:

$\vec{AB_1}\{0;-1;1\}$ $\qquad \vec{C_1A_1}\{1;1;0\}$

$$M\left(\frac{1+m}{m+1};\frac{1}{m+1};\frac{m}{m+1}\right) \qquad \frac{m}{m+1}=p$$

$$K\left(\frac{k}{k+1};\frac{k}{k+1};\frac{1+k}{k+1}\right) \qquad \frac{k}{k+1}=q$$

$$M(1;1-p;p) \quad K(q;q;1)$$

$$\vec{MK}\{q-1;q-1+p;1-p\}$$

$$MK\perp AB_1;C_1A_1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{MK}\cdot\vec{AB_1}=0 \\ \vec{MK}\cdot\vec{C_1A_1}=0 \end{cases}$$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба AB_1 и диагональю грани A_1C_1.

Решение:

$\vec{AB_1}\{0;-1;1\}\quad \vec{C_1A_1}\{1;1;0\}\quad \vec{MK}\{q-1;q-1+p;1-p\}\quad \begin{cases}\vec{MK}\cdot\vec{AB_1}=0\\ \vec{MK}\cdot\vec{C_1A_1}=0\end{cases}$

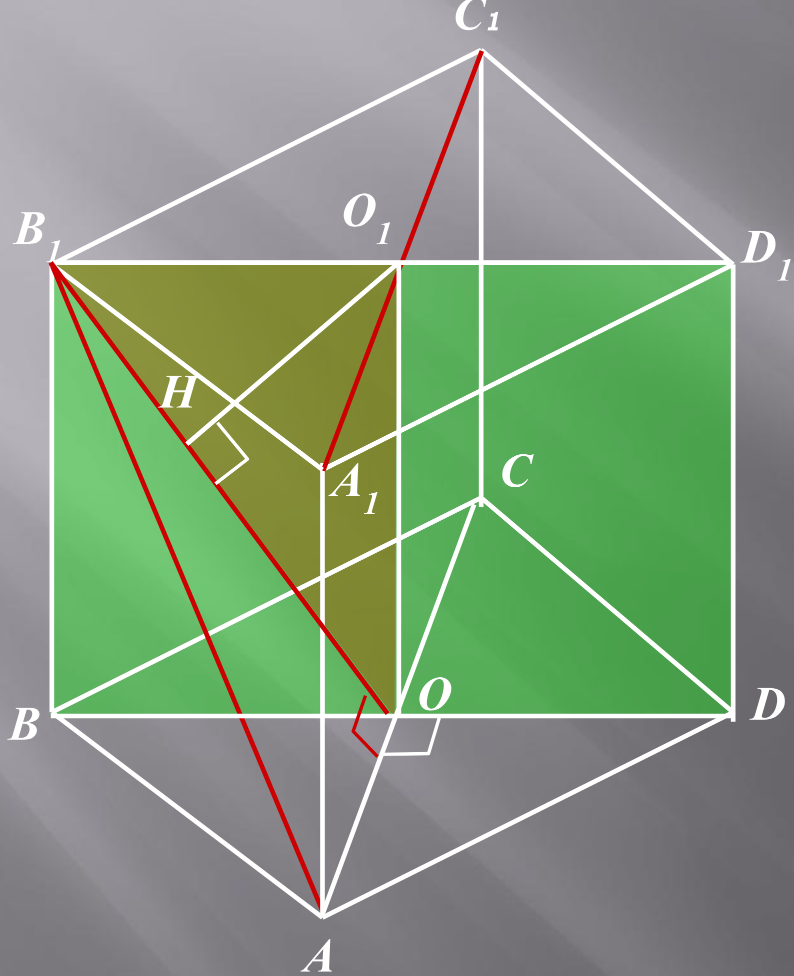
$$\begin{cases}(q-1)\cdot 0+(q-1+p)\cdot(-1)+(1-p)\cdot 1=0\\ (q-1)\cdot 1+(q-1+p)\cdot 1+(1-p)\cdot 0=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-q+1-p+1-p=0\\ q-1+q-1+p=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\dfrac{2}{3}\\ q=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow \vec{MK}\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\rho=\left|\vec{MK}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1) Найти расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна 1.



Решение:

Найдем $\rho(B_1A; A_1C_1)$

$A_1C_1 \perp (BB_1D_1)$

Построим ортогональную проекцию прямой AB_1 на плоскость (BB_1D_1)

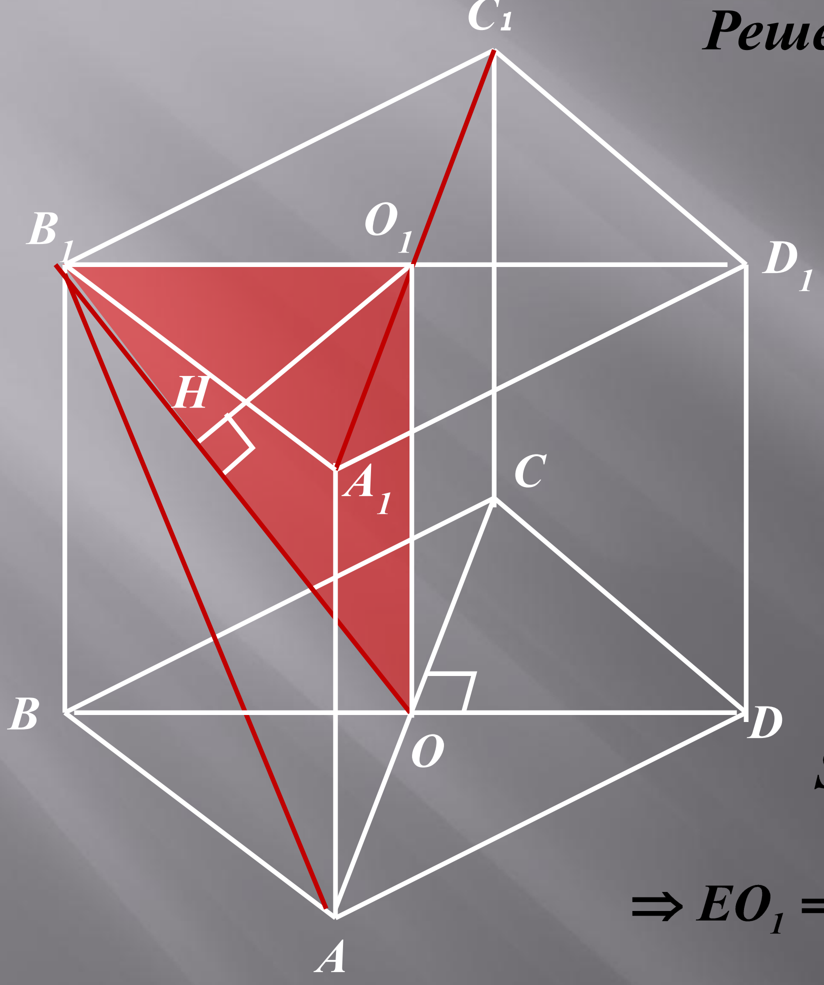
$AO \perp (BB_1D_1) \Rightarrow B_1O -$ проекция

Д. п.: $O_1H \perp B_1O$

Тогда $- \rho(B_1A; A_1C_1) = O_1H$

O_1H найдем из треугольника B_1OO_1

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.



Решение: $B_1O_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (половина диагонали единичного квадрата)

$OO_1 = 1$ (= ребру куба)

$$B_1O = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$S_{B_1OO_1} = \frac{1}{2} B_1O_1 \cdot OO_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

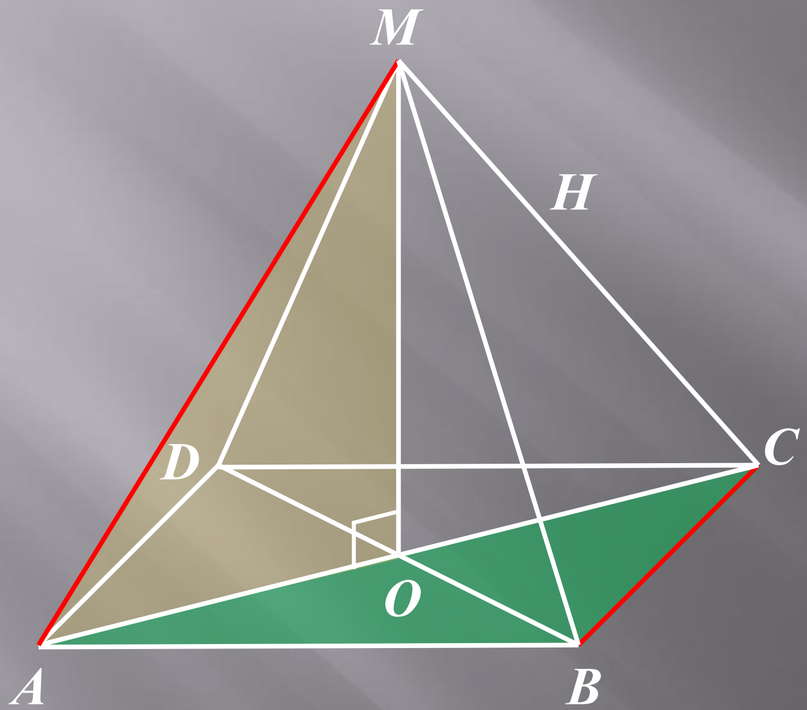
$$S_{B_1OO_1} = \frac{1}{2} B_1O \cdot EO_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot EO_1$$

$$\Rightarrow EO_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2) В правильной четырехугольной пирамиде MABCD, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BC .

Решение:



Рассмотрим пирамиду MABC.
За основание примем ACB, тогда высота – MO.

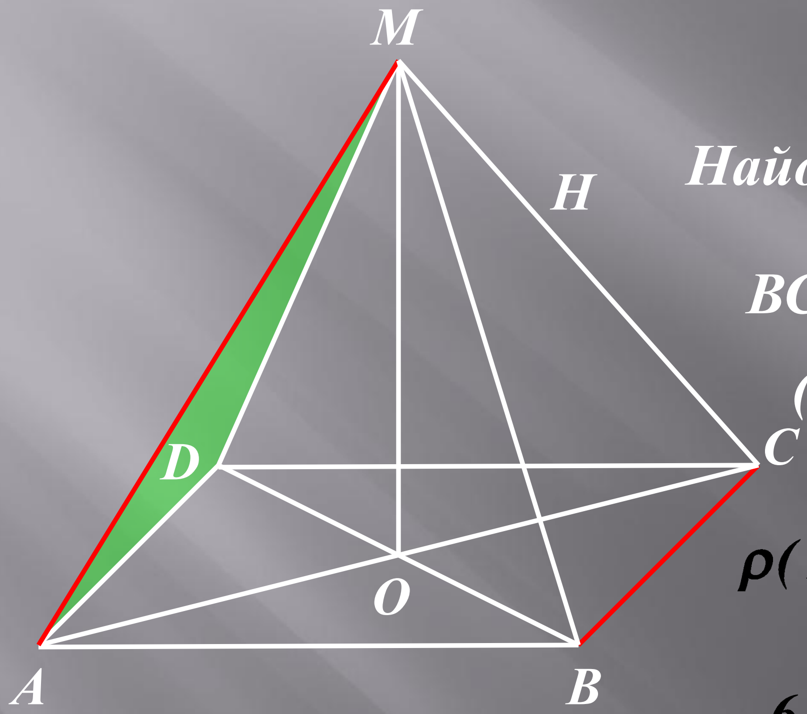
В треугольнике AOM $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$OM = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{MACB} = \frac{1}{3} S_{ACB} \cdot OM = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

2) В правильной четырехугольной пирамиде MABCD, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BC .

Решение:



$$AM = 1 \qquad BC = 1 \qquad V_{MACB} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Найдем угол между прямыми AD и BC .

$$BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{\overrightarrow{AM}\;\overrightarrow{BC}} = \widehat{\overrightarrow{AM}\;\overrightarrow{AD}} = 60^0$$

(треугольник AMD –равносторонний)

$$\rho(AM;BC) = \frac{6V_{MABC}}{AM \cdot BC \cdot \sin \widehat{AM;BC}} =$$

$$= \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}}{1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad \textit{Ответ} : \frac{\sqrt{6}}{3}.$$