

Решение логарифмических уравнений

- 1. Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество.**
- 2. Основные свойства логарифмов.**
- 3. Частные свойства.**

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Основные свойства логарифмов

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Частные свойства:

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Решение логарифмических уравнений

Что значит «решить уравнение»?

Решить уравнение – это значит найти все его корни (решения) или установить, что их нет.

Что такое корень уравнения?

Корнем (решением) уравнения называется число, которое при подстановке в уравнение превращает его в верное равенство.

**Какие уравнения называют
логарифмическим?**

**Логарифмическим уравнением –
уравнение, содержащие неизвестное
под знаком логарифма.**

Определение простейшего логарифмического уравнения:

Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, называется простейшим логарифмическим уравнением, оно равносильно уравнению $x = a^b$, причём ни проверка, ни ОДЗ не требуется.

Простейшие логарифмические уравнения:

1. $\log_{x-1} 8 = 1$
2. $\log_7(50x-1) = 2$
3. $\log_3 x = \log_3 9$
4. $\log_7(2x-3) = \log_7 x$

При решении логарифмических уравнений часто используются следующие методы:

- метод решения с помощью определения логарифма;
- применение основного логарифмического тождества;
- метод потенцирования;
- метод введения новых переменных;
- метод логарифмирования;
- метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию;
- графический метод.

1. Метод решения с помощью определения логарифма

Например, уравнение $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$)
имеет решение $x = a^b$

ПРИМЕРЫ:

- 1) $\log_4 x = 2$ $x = 16$
- 2) $\log_{0,5} x = 2$ $x = 0,25$
- 3) $\log_x 5 = 1$ $x = 5$
- 4) $\log_5 x = -2$ $x = 0,04$

1. Метод решения с помощью определения логарифма

ПРИМЕР:

$$5) \log_{x-1} 8 = 1$$

Решение:

$$(x-1)^1 = 8$$

$$x-1 = 8$$

$$x = 9$$

1. Метод решения с помощью определения логарифма

ПРИМЕР:

$$6) \log_7(50x-1) = 2$$

Решение:

$$7^2 = 50x-1$$

$$50x-1 = 49$$

$$x = 1$$

2. Применение основного логарифмического тождества: $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$)

Примеры: 1) $9^x = 0,7$

Решение:

$$9^x = 0,7$$

$$9^x = 9^{\log_9 0,7}$$

$$x = \log_9 0,7$$

2) $2^x = 10$

$$2^x = 10$$

$$2^x = 2^{\log_2 10}$$

$$x = \log_2 10$$

3) $0,3^x = 7$

$$0,3^x = 7$$

$$0,3^x = 0,3^{\log_{0,3} 7}$$

$$x = \log_{0,3} 7$$

3. Метод потенцирования

Суть метода - переход от уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

к уравнению следствию $f(x)=g(x)$.

При решении уравнений $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ часто происходит *расширение области определения* уравнения (за счёт решения уравнения $f(x)=g(x)$), а значит, могут появиться посторонние корни. Поэтому, решив уравнение, следует **проверить найденные корни подстановкой в данное уравнение.**

Примеры на метод потенцирования

$$1) \log_3 x = \log_3 9$$

Решение: 1) $x=9$ Проверка: подставим найденное значение $x=9$ в исходное уравнение $\log_3 9 = \log_3 9$

Ответ: $x=9$

Примеры на метод потенцирования

$$2) \log_7(2x-3) = \log_7 x$$

Решение: $2x-3=x$; $x=3$ Проверка: подставим найденное значение $x=3$ в исходное уравнение $\log_7(2 \cdot 3 - 3) = \log_7 3$;
 $\log_7 3 = \log_7 3$

Ответ: $x=3$

Примеры на метод потенцирования

$$3) \log_5 (2x+3) = \log_5 (x+1)$$

Решение: $\log_5 (2x+3) = \log_5 (x+1)$

$$2x+3 = x+1;$$

$$x = 1-3 = -2$$

Проверка: подставим найденное значение $x = -2$ в исходное уравнение $\log_5 (2x+3) = \log_5 (x+1)$ и получим $\log_5 (2 \cdot (-2)+3) = \log_5 (-2+1)$, $\log_5 (-1) = \log_5 (-1)$, это равенство неверно (оно не имеет смысла, так как выражения под логарифмом всегда больше нуля)

Ответ: нет решения

Примеры на метод потенцирования

$$4) \log_5 x = \log_5 (6 - x^2)$$

Решение: $\log_5 x = \log_5 (6 - x^2)$

$$x = 6 - x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

Проверка:

1) $x_1 = -3$ $\log_5 (-3)$ не существует -3 посторонний корень

2) $x_2 = 2$ $\log_5 2 = \log_5 (6 - 2^2)$ $\log_5 2 = \log_5 2$

Ответ: 2.

4. Метод введения новых переменных

Суть метода -приведение логарифмического уравнения к квадратному $A \log_a^2 x + B \log_a x + C = 0$

1) ввести новую переменную $y = \log_a x$

2) решить уравнение $Ay^2 + By + C$ относительно y ;

3) выполнить обратную подстановку и решить уравнения относительно x .

Метод введения новых переменных

Пример: 1) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$

$$\log_5 x = y$$

$$2y^2 + 5y + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2 \cdot 2} \quad y_1 = -2, y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_5 x = -2 \quad \log_5 x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 5^{-2} = \frac{1}{25} \quad x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{Ответ: } \frac{1}{25} ; \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Метод введения новых переменных

Решение: 2) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$

$$\lg^2 x - 2\lg x + 1 = 0$$

$$\lg x = y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$D = 0 \quad y = \frac{-b}{2a}, \quad y = 1$$

$$\lg x = 1$$

$$x = 10$$

Ответ: 10

Закрепление

Вариант 1. № 1 (а)

№2 (а)

Вариант 2. №1 (б)

№2 (б)

1. Решите уравнения методом потенцирования:

• **Логарифмом** положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c , в которую надо возвести число a , чтобы

2. Решите уравнения методом введения вспомогательной переменной: получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

а) $3\log_{0,5}^2 x + 5\log_{0,5} x - 2 = 0;$

б) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 = 0.$