Решение логарифмических уравнений

1. Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество.
2.Основные свойства логарифмов.
3. Частные свойства.

Логарифмом положительного числа $\boldsymbol{b}$ по основанию $\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1}$, называется **показатель степени** $\boldsymbol{c}$, в которую надо возвести число $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{b}$, т.е.

$$\boldsymbol{log_a b = c, a^c = b}$$

Логарифмом положительного числа $\boldsymbol{b}$ по основанию $\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1}$, называется **показатель степени** $\boldsymbol{c}$, в которую надо возвести число $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{b}$, т.е.

$$\boldsymbol{log_a b = c, a^c = b}$$

Основные свойства логарифмов

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется <u>**показатель степени**</u> c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется <u>**показатель степени**</u> c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется <u>**показатель степени**</u> c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

Частные свойства:

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Решение логарифмических уравнений

Что значит «решить уравнение»?

Решить уравнение – это значит найти все его корни (решения) или установить, что их нет.

Что такое корень уравнения?

Корнем (решением) уравнения называется число, которое при подстановке в уравнение превращает его в верное равенство.

Какие уравнения называют логарифмическим?

Логарифмическим уравнением – уравнение, содержащие неизвестное под знаком логарифма.

Определение простейшего логарифмического уравнения:

Уравнение вида $\log_a x = в$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, называется простейшим логарифмическим уравнением, оно равносильно уравнению $x = a^в$, причём ни проверка, ни ОДЗ не требуется.

Простейшие логарифмические уравнения:

1. $\log_{x-1} 8 = 1$
2. $\log_7(50x-1) = 2$
3. $\log_3 x = \log_3 9$
4. $\log_7(2x-3) = \log_7 x$

При решении логарифмических уравнений часто используются следующие <u>методы</u>:

- метод решения с помощью определения логарифма;
- применение основного логарифмического тождества;
- метод потенцирования;
- метод введения новых переменных;
- метод логарифмирования;
- метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию;
- графический метод.

1. **Метод решения с помощью определения логарифма**

Например, уравнение $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) имеет решение $x = a^b$

ПРИМЕРЫ:

1) $\log_4 x = 2$ $\qquad$ $x = 16$

2) $\log_{0,5} x = 2$ $\qquad$ $x = 0,25$

3) $\log_x 5 = 1$ $\qquad$ $x = 5$

4) $\log_5 x = -2$ $\qquad$ $x = 0,04$

1. **Метод решения с помощью определения логарифма**

ПРИМЕР:

5) $\log_{x-1} 8 = 1$

Решение:

$(x-1)^1 = 8$

$x-1 = 8$

$x = 9$

1. **Метод решения с помощью определения логарифма**

ПРИМЕР:

6) $\log_7(50x-1) = 2$

Решение:

$7^2 = 50x-1$

$50x-1 = 49$

$x = 1$

2. Применение основного логарифмического тождества: $a^{\log_a b} = b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a \neq 1$)

Примеры: 1) $9^x = 0{,}7$

Решение:

$9^x = 0{,}7$

$9^x = 9^{\log_9 0{,}7}$

$x = \log_9 0{,}7$

2) $2^x = 10$

$2^x = 10$

$2^x = 2^{\log_2 10}$

$X = \log_2 10$

3) $0{,}3^x = 7$

$0{,}3^x = 7$

$0{,}3^x = 0{,}3^{\log_{0{,}3} 7}$

$X = \log_{0{,}3} 7$

3. Метод потенцирования

Суть метода - переход от уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

к уравнению следствию $f(x)=g(x)$.

При решении уравнений $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ часто происходит *расширение области определения* уравнения (за счёт решения уравнения f(x)=φ(x)),а значит, могут появиться посторонние корни. Поэтому, решив уравнение, следует проверить найденные корни подстановкой в данное уравнение.

Примеры на метод потенцирования

1) $\log_3 x = \log_3 9$

Решение: 1) x=9 Проверка: подставим найденное значение x=9 в исходное уравнение $\log_3 9 = \log_3 9$

Ответ: x=9

Примеры на метод потенцирования

2) $\log_7(2x-3) = \log_7 x$

Решение: $2x-3=x$; $x=3$ Проверка: подставим найденное значение $x=3$ в исходное уравнение $\log_7(2\cdot3-3) = \log_7 3$;
$\log_7 3 = \log_7 3$

Ответ: $x=3$

Примеры на метод потенцирования

3) $\log_5 (2x+3)= \log_5 (x+1)$

Решение: $\log_5 (2x+3)= \log_5 (x+1)$
$2x+3= x+1;$
$x=1-3=-2$
Проверка: подставим найденное значение $x= -2$ в исходное уравнение $\log_5 (2x+3)= \log_5 (x+1)$ и получим $\log_5 (2 \cdot (-2)+3)= \log_5 (-2+1)$, $\log_5 (-1)= \log_5 (-1)$, это равенство неверно (оно не имеет смысла, так как выражения под логарифмом всегда больше нуля)

Ответ: нет решения

Примеры на метод потенцирования

4) $\log_5 x = \log_5 (6 - x^2)$

Решение: $$\log_5 x = \log_5(6 - x^2)$$

$$x = 6 - x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = 2$$

Проверка:

1) $x_1 = -3$ $\log_5(-3)$ не существует -3 посторонний корень

2) $x_2 = 2$ $\log_5 2 = \log_5(6 - 2^2)$ $\log_5 2 = \log_5 2$

Ответ: 2.

4. Метод введения новых переменных

Суть метода -приведение логарифмического уравнения к квадратному $A\log_a^2 x + B\log_a x + C = 0$

1) ввести новую переменную $y = \log_a x$

2) решить уравнение $Ay^2 + By + C$ относительно y;

3) выполнить обратную подстановку и решить уравнения относительно x.

Метод введения новых переменных

Пример: 1) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$

$\log_5 x = y$

$2y^2 + 5y + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$y_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2 \cdot 2}$ $\quad y_1 = -2, y_2 = -\dfrac{1}{2}$

$\log_5 x = -2$ $\quad \log_5 x = -\dfrac{1}{2}$

$x = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$ $\quad x = 5^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **Ответ:** $\dfrac{1}{25}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Метод введения новых переменных

Решение: 2) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$

$$\lg^2 x - 2\lg x + 1 = 0$$

$$\lg x = y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$D = 0$ $y = \dfrac{-b}{2a}$, $y = 1$

$$\lg x = 1$$

$x = 10$ **Ответ: 10**

Закрепление

Вариант 1. № 1 (а) Вариант 2. №1 (б)

№2 (а) №2 (б)

1.Решите уравнения методом потенцирования:

- Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени** c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$log_a b = c, a^c = b$$

2. Решите уравнения методом введения вспомогательной переменной:

а) $$3\log_{05}^2 x + 5\log_{0,5} x - 2 = 0;$$

б) $$2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 = 0.$$