

Ряды Фурье

Работу выполнили: Грачев Владимир

Быков Георгий

Группа: КИ15-10Б

Задача

- 1. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 1, & -1 < x < 0 \\ x^4 + 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

- 2. На промежутке $[-31, 31]$ построить графики функции $y=f(x)$, а также функции $y=f_1(x)$, которая состоит из первых пяти ненулевых слагаемых ряда Фурье.
- 3. Оформить презентацию для демонстрации решения задачи и результатов.

Основные понятия

- В большинстве случаев в качестве простейших используются тригонометрические функции синуса и косинуса, в этом случае ряд Фурье называется *тригонометрическим*.



Тригонометрический ряд Фурье

- Тригонометрическим рядом Фурье называют функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Коэффициенты Фурье

- Коэффициентами Фурье функции $f(x)$ называются числа a_n и b_n , определяемые формулами:

$$a_n = \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n x) dx\right)$$

$$b_n = \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n x) dx\right)$$



Коэффициенты Фурье

- В нашем случае понадобятся другие формулы нахождения коэффициентов на отрезке $[-l, l]$.

- $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

- $$a_n = \left(\frac{1}{l} \right) \left(\int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx \right)$$

- $$b_n = \left(\frac{1}{l} \right) \left(\int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx \right)$$

Вычисление коэффициентов

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 1, & -1 < x < 0 \\ x^4 + 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x) dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^4 - 1) dx + \int_0^1 (x^4 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x \right) + \left(\frac{x^5}{5} + x \right) = \left(-\frac{4}{5} \right) + \left(\frac{6}{5} \right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов

$$a_n = \left(\frac{1}{l}\right) \left(\int_{-l}^0 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right)$$

$$a_n = \int_{-1}^0 (x^4 - 1) * \cos(\pi * n * x) dx + \int_0^1 (x^4 + 1) * \cos(\pi * n * x) dx = \frac{4(\pi * n(\pi^2 * n^2 - 6) * \cos[\pi * n])}{\pi^5 * n^5} + \frac{2 * \cos[\pi * n]}{\pi^5 * n^5}$$

Вычисление коэффициентов

- $$b_n = \int_{-1}^0 (x^4 - 1) * \sin(\pi * n * x) dx + \int_0^1 (x^4 + 1) * \sin(\pi * n * x) dx = \frac{\pi^4 n^4 - 4\pi(\pi^2 n^2 - 6)n \sin(\pi n) - 12(\pi^2 n^2 - 2) \cos(\pi n) - 24}{\pi^5 n^5}$$

Практическое применение

- Ряды Фурье используют в физике , математике.
- Вычисления силы тока в электрической цепи.
- Почти любой звуковой эффект – это разложение в ряд Фурье.
- Формат JPEG – основан на разложении в ряд Фурье.

Решение функции

```
>> an
```

```
an =
```

```
(2*(12*sin(pi*n) + 2*n^3*pi^3*cos(pi*n) - 6*n^2*pi^2*sin(pi*n) + n^4*pi^4*sin(pi*n) - 12*n*pi*cos(pi*n))
```

```
>> bn
```

```
bn =
```

```
(24*cos(pi*n) + n^4*pi^4 - 12*n^2*pi^2*cos(pi*n) - 4*n^3*pi^3*sin(pi*n) + 24*n*pi*sin(pi*n) - 24)
```

```
>> first
```

```
>> first
```

```
>> first
```

```
>> a0
```

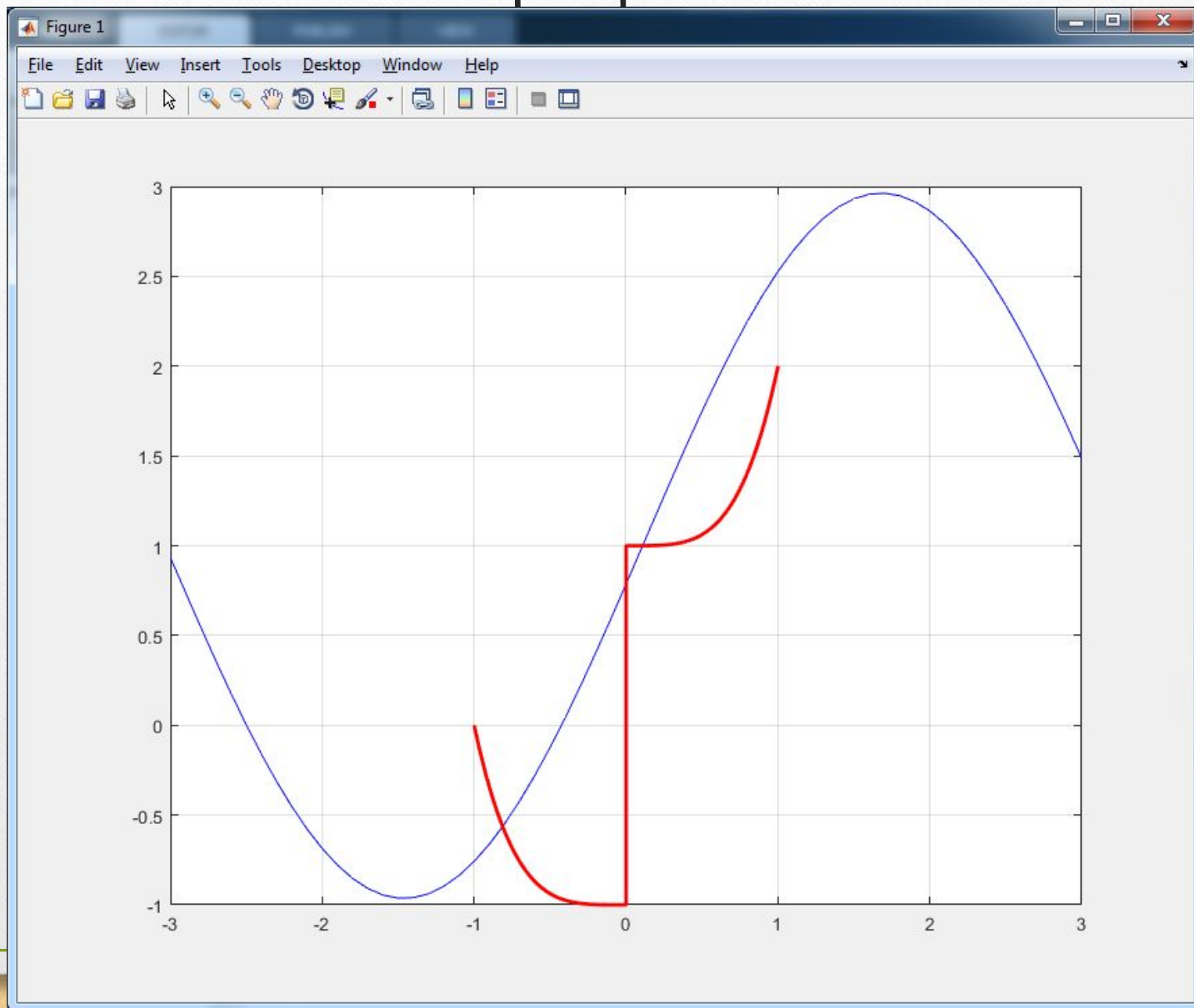
```
a0 =
```

```
2/5
```

Код программы

```
syms x;
t=2;
f=0;
l=2/2;
f1=x^4-1;
f2=x^4+1;
f1an=(x^4-1)*cos(pi*n*x);
f1bn=(x^4-1)*sin(pi*n*x);
f2an=(x^4+1)*cos(pi*n*x);
f2bn=(x^4+1)*sin(pi*n*x);
dx=x;
syms n;
a0=(1/l)*(int(f1,dx,-1,0)+int(f2,dx,0,1));
an=(1/l)*(int(f1an,dx,-1,0)+int(f2an,dx,0,1));
bn=(1/l)*(int(f1bn,dx,-1,0)+int(f2bn,dx,0,1));
d=@(x,n)(a0/2)+((2*(12*sin(pi*n)+2*n^3*pi^3*cos(pi*n))-6*n^2*pi^2*sin(pi*n)+n^4*pi^4*
pi=3.1415926535;
s=0;k=[];
for x=-3:0.1:3
    s=0;
    for n=1:5
        s=s+d(x,n);
    end
    k=[k s];
end
x=[-3:0.1:3];
plot(x,k,'b')
grid on;
hold on;
x1=[-1:0.01:0];
x2=[0:0.01:1];
y1=@(x0)(x0.^4-1);
x2=[0:0.01:1];
y1=@(x0)(x0.^4-1);
y2=@(x0)(x0.^4+1);
X=[x1 x2];
Y=[y1(x1) y2(x2)];
plot(X,Y,'r','Linewidth',2)
```

График



Анализ результатов

- При выполнении данной работы, наша команда встретила со многими проблемами и сложностями. В частности – это решение самой функции, нахождения ее коэффициентов. Было потрачено много времени на изучение теоретической части.
- Так же при написании кода программы в среде Matlab мы столкнулись со сложностями в синтаксисе.

Анализ работы

- Быков Георгий: Написание кода, изучение теории по теме «Ряды Фурье», помощь в оформлении презентации.
- Грачев Владимир: Помощь в написании кода, изучение теории по теме «Ряды Фурье», оформление презентации.

Спасибо за
внимание
