ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Підготували:

Учениці ІІ курсу

фізико-математичного класу

Маляренко Марія

та

Оксимець Тетяна

ЦІЛІ ВИРАЗИ

Властивості степеня з цілим показником:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$ $(a \neq 0)$

$$\grave{a}^m : a^n = a^{m-n}$$ $(b \neq 0)$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Одночленами називають числа, змінні, їхні степені з натуральними показниками та добутки. Одночлен , який містить єдиний числовий множник , записаний першим, та степені різних змінних, називають **одночленом стандартного вигляду**.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних , які входять до нього. Якщо одночлен лише число , то його степінь дорівнює нулю.

Многочленом називають суму кількох одночленів. Доданки многочлена , які відрізняються лише коефіцієнтом, називають **подібними членами многочлена**. Многочлен, який містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають **многочленом стандартного вигляду**.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

ДІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ:

1. Щоб додати (відняти) многочлен, досить розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+» або

«-» , та звести подібні доданки.

2. Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожен член многочлена й отримані добутки додати

3. Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен член іншого многочлена й отримані добутки додати.

4. Щоб поділити многочлен на одночлен, досить кожен член многочлена розділити на цей одночлен і одержані результати додати.

ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ:

Вирази, які можуть містити додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня чисел та змінних, називають **раціональними**.

ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНОЇ ВЛАСТИВОСТІ ДРОБУ:

1. Скорочення дробу
2. Зміна знаків дробу
3. Зведення дробів до спільного знаменника
4. Додавання і віднімання раціональних дробів
5. Множення раціональних дробів
6. Ділення раціональних дробів
7. Піднесення раціонального дробу до степеня з цілим показником

ІРРАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

- Справедливі рівності:

1. $\sqrt{a} = b$, якщо $b^2 = a, b \geq 0$

Наприклад, $\sqrt{25} = 5$, бо $5^2 = 25$

2. $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$

Наприклад, $(\sqrt{4})^2 = 4$

3. $\sqrt{a^2} = |a|, a \in R$

Наприклад, $\sqrt{3^2} = |3| = 3, \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$

Наприклад, $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geq 0, b > 0$

Наприклад, $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

3. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$

Наприклад, $\sqrt{5^4} = |5^2| = 25$

4. Винесення множника з-під знака кореня.

$$\sqrt{b^2a} = |b|\sqrt{a} = \begin{cases} b\sqrt{a}, \text{якщо } b \geq 0; \\ -b\sqrt{a}, \text{якщо } b < 0 \end{cases}$$

5. Внесення множника під знак кореня.

$$b\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{b^2a}, \text{якщо } b \geq 0 \\ -\sqrt{b^2a}, \text{якщо } b < 0 \end{cases}$$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНИХ КОРЕНІВ N-ГО СТЕПЕНЯ

1. $\sqrt[n]{0}=0$

2. $\sqrt[n]{1}=1$

3. $(\sqrt[n]{a})^n = |a|$

4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

6. Якщо a≥0, $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m},\ \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

7. Корінь непарного степеня: $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{|a|} \cdot \sqrt[2k+1]{|b|}$

8. Корінь парного степеня: $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$

9. Якщо $a > 0$, то $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ПОКАЗНИКОВІ ВИРАЗИ

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $a^x : a^y = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
5. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$, якщо $b \neq 0$
6. $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$
7. $a^1 = a$
8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, якщо $a \neq 0$; $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$
9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, якщо $a > 0, n \in N$

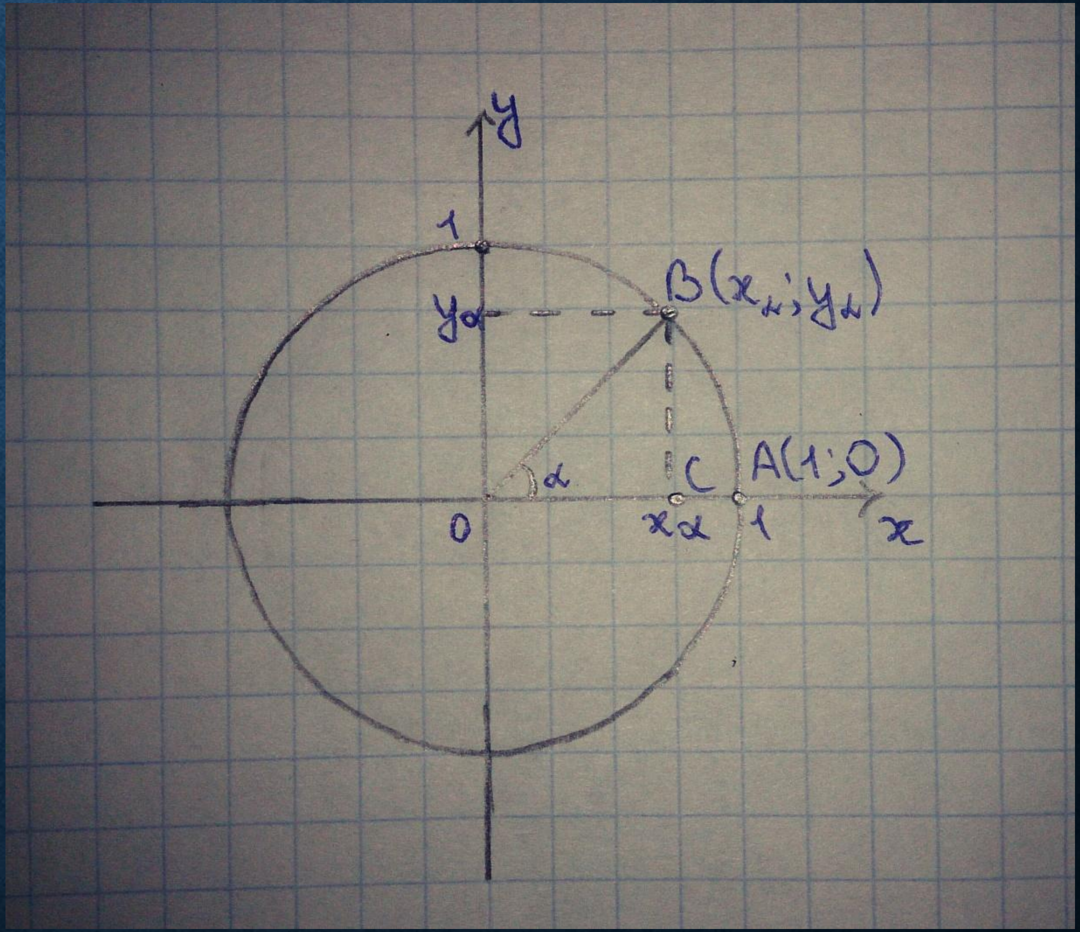
ЛОГАРИФМІЧНІ ВИРАЗИ

- Логарифмом додатного числа b за основою $a (a > 0, a \neq 1)$ називають показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число b. Тобто якщо $a^x = b$ і $a > 0, a \neq 1$, то $\log_a b = x$ і, навпаки, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$

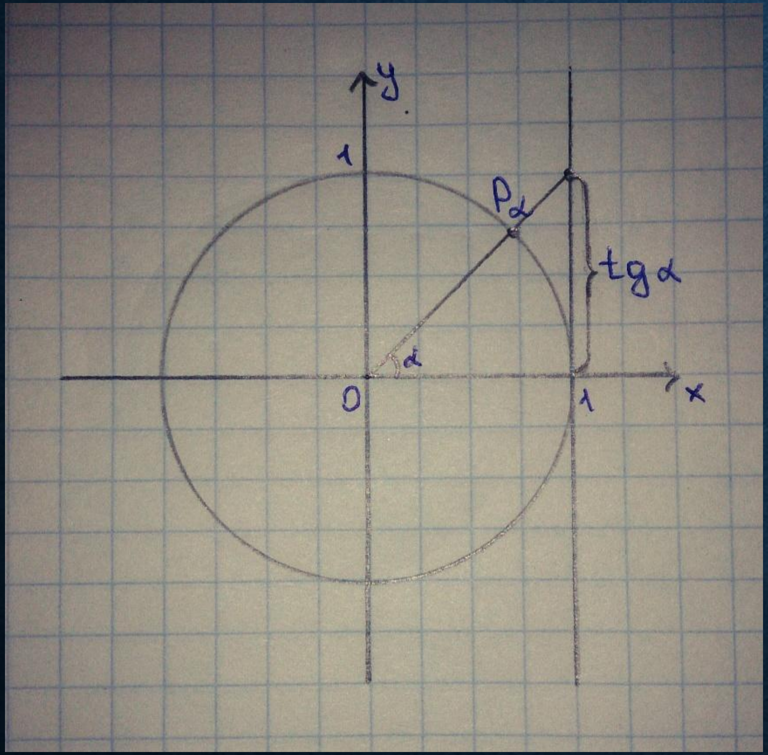
1. Основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$
2. $\log_a 1 = 0$, оскільки $a^0 = 1$
3. $\log_a a = 1$, оскільки $a^1 = a$
4. $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0$
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \frac{x}{y} > 0$
6. $\log_a x^p = p\log_a |x|, x^p > 0$
7. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$
8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, де $b > 0, c > 0, c \neq 1$
9. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

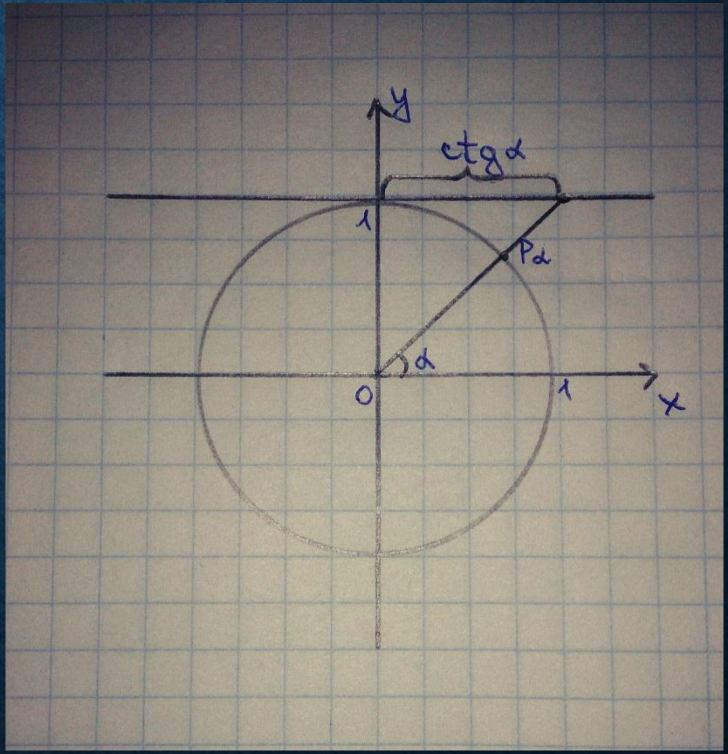
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВИРАЗИ

- Синусом кута α називають ординату точки В одиничного кола, яка відповідає куту α.
- Косинусом кута α називають абсцису точки В одиничного кола, яка відповідає куту α.
- Тангенсом кута α називається відношення ординати кінця одиничного рухомого радіусу до його абсциси.
- Котангенсом кута α називають відношення абсциси кінця одиничного рухомого радіусу до його ординати.



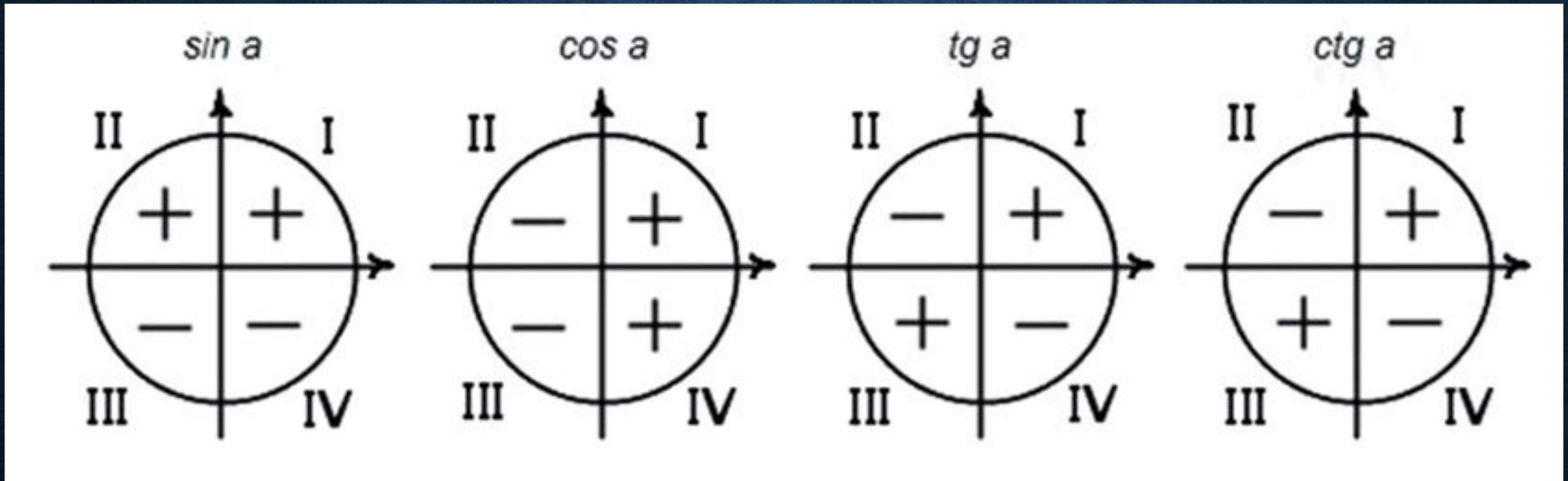
- Пряму, яка проходить через точку $P_{\alpha}(1;0)$ паралельно до осі ординат, називають лінією тангенсів.
- Пряму, яка проходить через точку (0;1) паралельно до осі абсцис називають лінією котангенсів.





α								
градусов	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos (α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg(α)	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

- Для будь-якого кута α $|sin| \leq 1, |\cos| \leq 1, tg\alpha$ і $ctg\alpha$ змінюються від $-\infty$ до $+\infty$
- Знаки тригометричних функцій у чвертях



- Функції y= sinx, y=tgx, y=ctgx – непарні, а функція y=cosx – парна

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; \; ctgx = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$tgx \cdot ctgx = 1;$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \; 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};\quad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

ФОРМУЛИ СУМИ ТА РІЗНИЦІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$Sin\alpha + Sin\beta = 2\,Sin\frac{\alpha+\beta}{2}Cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$Sin\alpha - Sin\beta = 2\,Cos\frac{\alpha+\beta}{2}Sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$Cos\alpha + Cos\beta = 2\,Cos\frac{\alpha+\beta}{2}Cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$Cos\alpha - Cos\beta = -2\,Sin\frac{\alpha+\beta}{2}Sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{Sin(\alpha+\beta)}{Cos\alpha\,Cos\beta};$$

$$ctg\,\alpha - ctg\,\beta = \frac{Sin(\alpha-\beta)}{Cos\alpha\,Cos\beta}.$$

ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОДВІЙНОГО АРГУМЕНТУ

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОТРІЙНОГО АРГУМЕНТУ

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\, 3\alpha = \frac{(3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha)}{(1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha)}$$

$$\mathrm{ctg}\, 3\alpha = \frac{(3\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha)}{(1 - 3\mathrm{ctg}^2\alpha)}$$

ФОРМУЛИ УНІВЕРСАЛЬНОЇ ПІДСТАНОВКИ

1) $\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$

3) $tg\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$

2) $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$

4) $ctg\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{2tg\dfrac{\alpha}{2}}$

ФОРМУЛИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТУ

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ФОРМУЛИ ПОНИЖЕННЯ СТЕПЕНЯ

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

ФОРМУЛИ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!