

Лекционные презентации
«Численные методы
расчета переходных
процессов»

Лекция № 20

В лекции рассматривается методика численного расчета переходных процессов в линейных цепях, в том числе методом дискретных схем замещения. Особое внимание уделено понятиям «жестких» и «дребезжащих» систем и особенностям их анализа.

Численные методы расчета переходных процессов

- Состояние цепи после коммутации описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(0) = x_0$$

- Аналитическое решение таких систем часто связано с существенными трудностями.
- Решение может быть найдено с использованием **методов численного интегрирования**.
- При использовании методов численного интегрирования (**метода Эйлера, трапеций** и т.д.) дифференциальное уравнение заменяется конечно-разностным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{h}, \quad \text{где } h = dt \text{ – шаг интегрирования.}$$

Численные методы расчета переходных процессов

- Численное решение на интервале $[0, t_1]$ находят в виде таблицы **дискретных значений**:

t	0	h	$2h$...	$Nh = t_1$
\bar{x}	$\bar{x}(0)$	$\bar{x}(h)$	$\bar{x}(2h)$...	$\bar{x}(t_1)$

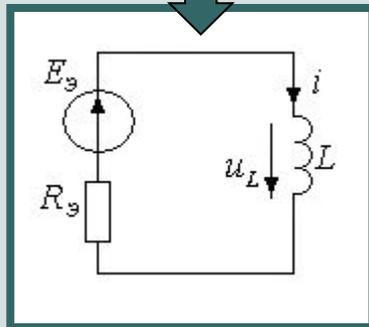
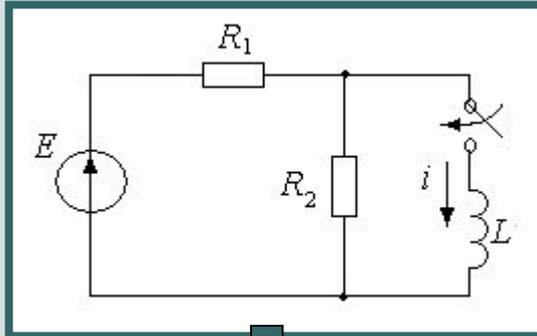
где $h = dt$ – шаг интегрирования, $t_k = kh$ – дискретное время, $k = 0, 1, \dots, N$, $N = t_1/h$ – число шагов интегрирования;
 $\bar{x}(t_k) \approx x(t_k)$, $\bar{x}(0) = x(0)$

Методы численного интегрирования

разностное
уравнение

Пример расчета переходного процесса численным методом

Рассчитаем переходной процесс, применив явный и неявный метод численного интегрирования Эйлера.



1. Составим дифференциальное уравнение, применив метод эквивалентного генератора:

$$E_{\text{э}} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_{\text{э}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2};$$

$$u_D(t) = L \frac{di}{dt} = E - iR$$

2. Начальное условие $i(0_-) = i(0_+) = 0$,
шаг интегрирования $h = dt$.

Пример расчета переходного процесса численным методом

Рассчитаем переходной процесс, применив явный и неявный метод численного интегрирования Эйлера.

3. Составим разностное уравнение: $\frac{di}{dt} = \frac{i_k - i_{k-1}}{h}$

Неявный метод Эйлера: $\frac{i_k - i_{k-1}}{h} = \frac{1}{L}(E_{\text{Э}} - i_{k-1}R_{\text{Э}})$

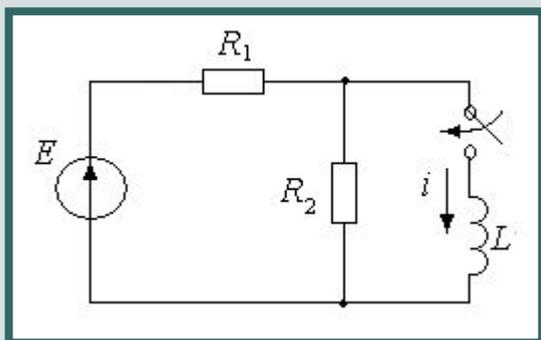
$$i_{\text{Э}} = \frac{h}{L}(E_{\text{Э}} - i_{k-1}R_{\text{Э}}) + i_{-1} \quad \text{при } k=1 \quad i_0 = 0$$

Явный метод Эйлера: $\frac{i_k - i_{k-1}}{h} = \frac{1}{L}(E_{\text{Э}} - i_k R_{\text{Э}})$

$$i_k = \left(\frac{hE_{\text{Э}}}{L} + i_{k-1} \right) / \left(1 + \frac{hR_{\text{Э}}}{L} \right) \quad \text{при } k=1 \quad i_0 = 0$$

Пример расчета переходного процесса численным методом

Результаты численного интегрирования для $h = 0,5\tau$



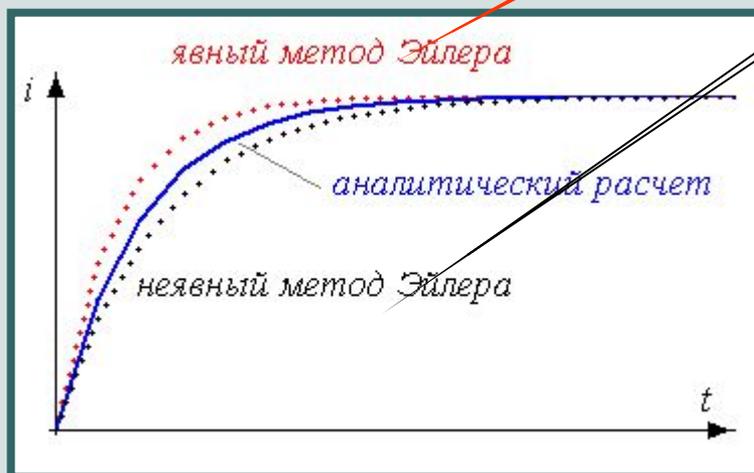
параметры
элементов цепи:

$E = 50$
 $L = 0,02$
 $R_1 = 100$
 $R_2 = 100$

$$t_k = k \cdot h$$

i_k

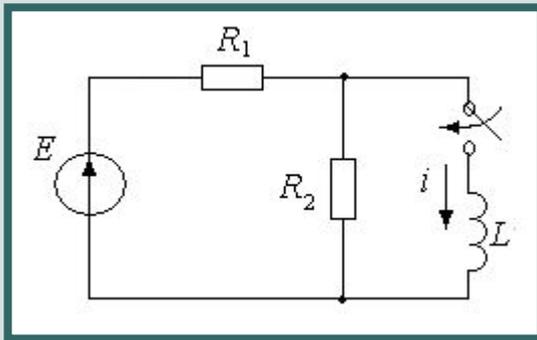
i_k



	0		0		0
0	$0 \cdot 10^0$	0	0	0	0
1	$1,25 \cdot 10^{-3}$	1	2,5	1	1,667
2	$2,5 \cdot 10^{-3}$	2	3,75	2	2,778
3	$3,75 \cdot 10^{-3}$	3	4,375	3	3,519
4	$5 \cdot 10^{-3}$	4	4,688	4	4,012
5	$6,25 \cdot 10^{-3}$	5	4,844	5	4,342
6	$7,5 \cdot 10^{-3}$	6	4,922	6	4,561
7	$8,75 \cdot 10^{-3}$	7	4,961	7	4,707
8	$1 \cdot 10^{-2}$	8	4,98	8	4,805
9	$1,125 \cdot 10^{-2}$	9	4,99	9	4,87
10	$1,25 \cdot 10^{-2}$	10	4,995	10	4,913
11	$1,375 \cdot 10^{-2}$	11	4,998	11	4,942
12	$1,5 \cdot 10^{-2}$	12	4,999	12	4,961
13	$1,625 \cdot 10^{-2}$	13	4,999	13	4,974
14	$1,75 \cdot 10^{-2}$	14	5	14	4,983
15	...	15	...	15	...

Пример расчета переходного процесса численным методом

Результаты численного интегрирования для $h = 0,1\tau$



параметры
элементов цепи:

$$E = 50$$

$$L = 0,02$$

$$R_1 = 0,01$$

$$R_2 = 0,01$$

$$t_k = k \cdot h$$

 i_k
 i_k

	0
0	0
1	$2,5 \cdot 10^{-4}$
2	$5 \cdot 10^{-4}$
3	$7,5 \cdot 10^{-4}$
4	$1 \cdot 10^{-3}$
5	$1,25 \cdot 10^{-3}$
6	$1,5 \cdot 10^{-3}$
7	$1,75 \cdot 10^{-3}$
8	$2 \cdot 10^{-3}$
9	$2,25 \cdot 10^{-3}$
10	$2,5 \cdot 10^{-3}$
11	$2,75 \cdot 10^{-3}$
12	$3 \cdot 10^{-3}$
13	$3,25 \cdot 10^{-3}$
14	$3,5 \cdot 10^{-3}$
15	...

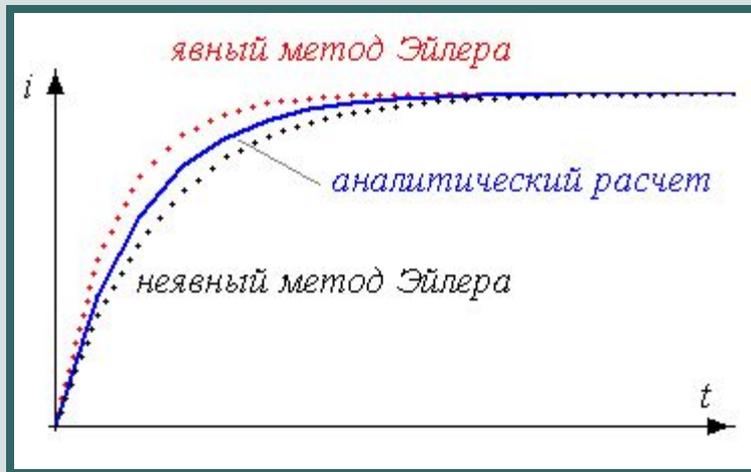
	0
0	0
1	0,5
2	0,95
3	1,355
4	1,7195
5	2,0476
6	2,3428
7	2,6085
8	2,8477
9	3,0629
10	3,2566
11	3,4309
12	3,5879
13	3,7291
14	3,8562
15	...

	0
0	0
1	0,4545
2	0,8678
3	1,2434
4	1,5849
5	1,8954
6	2,1776
7	2,4342
8	2,6675
9	2,8795
10	3,0723
11	3,2475
12	3,4068
13	3,5517
14	3,6833
15	...



Пример расчета переходного процесса численным методом

Сравнение численного расчета:



$$h = 0,5\tau$$



$$h = 0,1\tau$$

Замечание: выбор большего шага интегрирования нарушает адекватность разностных уравнений решаемым дифференциальным уравнениям.

Метод дискретных схем замещения

При замене дифференциальных уравнений **конечно-разностными уравнениями** используют **чисто резистивные схемы замещения**.
Реактивные элементы заменяют **дискретными моделями**.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(0) = x_0$$

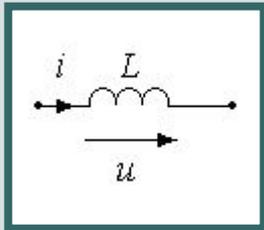
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{h} \quad \text{где } h = dt - \text{ шаг интегрирования}$$

Неявный метод Эйлера

$$x_k = x_{k-1} + hf(t_k, x_k)$$

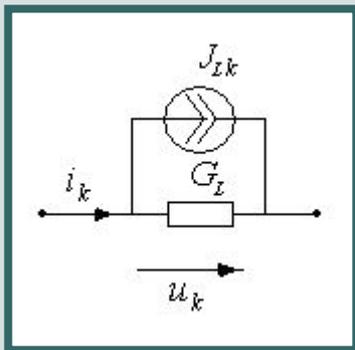
Дискретная модель индуктивного элемента

Для **индуктивного элемента**



$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}u \Rightarrow \frac{i_k - i_{k-1}}{h} = \frac{1}{L}u_k \Rightarrow i_k = i_{k-1} + \frac{h}{L}u_k$$

Обозначим: $J_{Lk} = i_{k-1}$, $G_L = \frac{h}{L}$

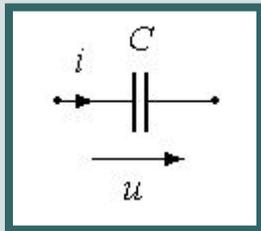


Дискретная модель индуктивного элемента

$$i_k = J_{Lk} + G_L u_k$$

Дискретная модель емкостного элемента

Для емкостного элемента

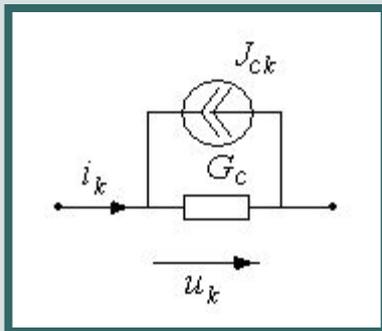


$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i \Rightarrow \frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \frac{1}{C} i_k \Rightarrow u_k = u_{k-1} + \frac{h}{C} i_k$$

$$\Rightarrow i_k = \frac{C}{h} u_k - \frac{C}{h} u_{k-1}$$

Обозначим: $J_{Ck} = \frac{C}{h} u_{k-1}$, $G_C = \frac{C}{h}$

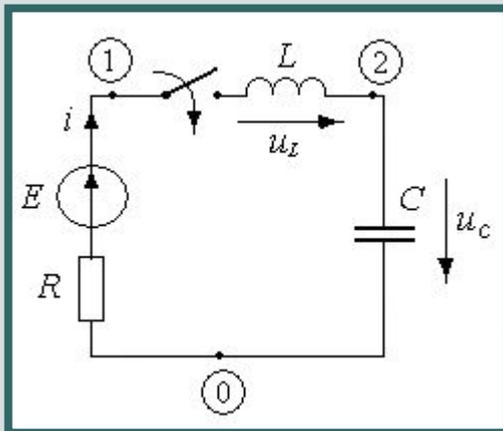
Дискретная модель емкостного элемента



$$i_k = G_C u_k - J_{Ck}$$

Пример расчета переходного процесса методом дискретных схем замещения

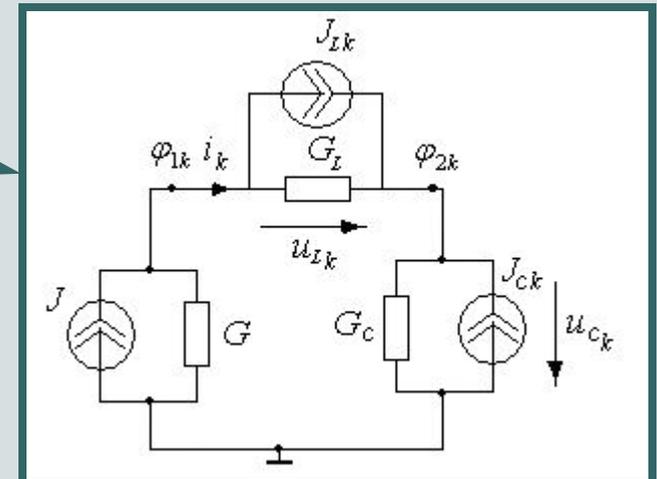
Рассчитать переходной процесс методом дискретных схем замещения.



- Обозначим: $G = \frac{1}{R}, J = \frac{E}{R}$

- Выберем шаг интегрирования $h = dt$

Составим резистивную схему для k -ой итерации



- Рассчитаем $G_C = \frac{C}{h}, G_L = \frac{h}{L}$

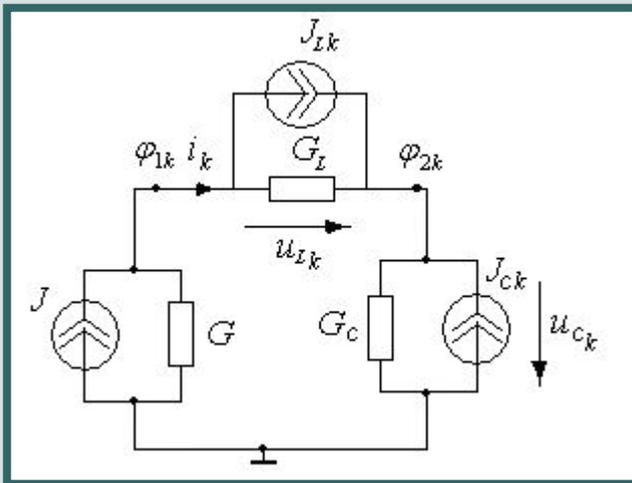
$$J_{L0} = i_{L0} = i_L(0) = 0$$

$$J_{C0} = \frac{C}{h} u_{C0} = \frac{C}{h} u_C(0) = 0$$

нулевые
начальные
условия

Пример расчета переходного процесса методом дискретных схем замещения

Методом узловых потенциалов (напряжений) рассчитаем на k -ой итерации потенциалы φ_{1k} и φ_{2k} :



$$\begin{bmatrix} G + G_L & -G_L \\ -G_L & G_L + G_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1k} \\ \varphi_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J - J_{Lk} \\ J_{Lk} + J_{Ck} \end{bmatrix}$$

Для тока и напряжений на реактивных элементах на k -ой итерации:

$$i_k = J_{Lk} + G_L (\varphi_{1k} - \varphi_{2k})$$

$$u_{Ck} = \varphi_{2k}$$

$$u_{Lk} = \varphi_{1k} - \varphi_{2k}$$

Замечания

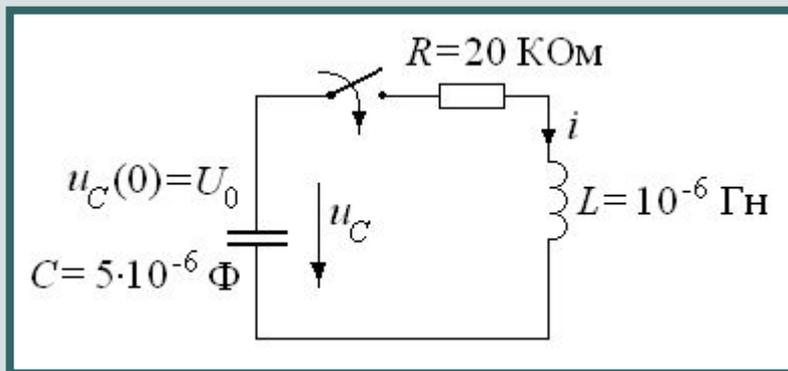
- Подобные резистивные схемы синтезируют топологические особенности электрических цепей с численными методами интегрирования, их называют **синтетические**. Синтетические схемы используют также для расчета переходных процессов в нелинейных цепях, позволяя выбрать переменные, обеспечивающие однозначное решение.
- При использовании численных методов возникает вопрос **адекватности** получаемого численного решения истинному решению уравнений, **сходимости** и **устойчивости**.

«Жёсткие» и «дребезжащие» модели электрических цепей

- При составлении математических моделей электродинамических систем и электрических цепей необходимо в первую очередь учитывать факторы, играющие первостепенную роль в моделируемом процессе.
- Без учета особенностей численная обработка (например, выбор шага интегрирования) становится весьма сложной. В этом отношении два типа моделей – «жесткие» и «дребезжащие» модели типичны для задач теории электрических цепей.
- Такие модели цепей весьма часто встречаются на практике, методы физического и математического их исследования весьма актуальны для современного инженера.

Пример, иллюстрирующий явление «жесткости»

При моделировании процесса разрядки конденсатора на RL -цепь была составлена схема и уравнение, описывающее состояние цепи после коммутации.



$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$p^2 + 2 \cdot 10^{10} p + 2 \cdot 10^{11} = 0$$

Корни уравнения:

$$p_1 \approx -2 \cdot 10^{10} = -\frac{R}{L}$$

$$p_2 \approx -10 = -\frac{1}{RC}$$

Отношение модулей корней

$$\frac{p_1}{p_2} \approx 10^{10}$$

«Жёсткие» системы, уравнения и модели электрических цепей

Жесткими называют системы (математические модели, уравнения цепей), траектории процессов которых имеют два выраженных участка:

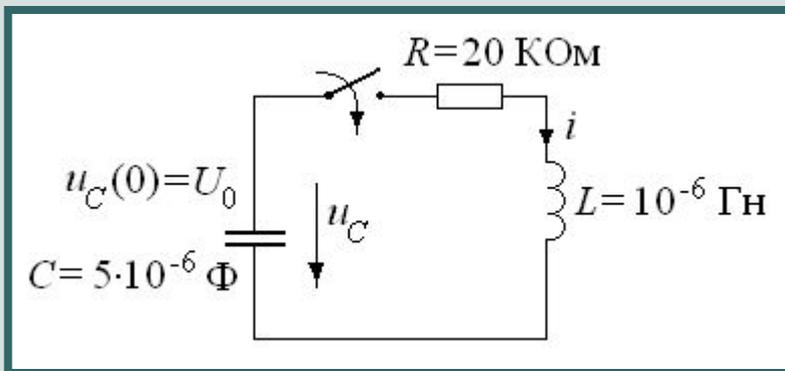
- участок **пограничного слоя** $t \in [0, \tau_{\text{пс}}]$ с большой скоростью процессов (большими по модулю значениями производных переходных токов, напряжений и т.д.);
- участок $t \in [\tau_{\text{пс}}, t_1]$, $\tau_{\text{пс}} \ll t_1$.

Здесь $\tau_{\text{пс}}$ - длительность пограничного слоя, t_1 - заданное время исследования.

Длительность пограничного слоя можно определить как $(3 \div 5) \tau_{\text{мин}}$ где $\tau_{\text{мин}}$ - минимальная постоянная времени цепи.

Пример, иллюстрирующий явление «жесткости»

В решении переходного процесса два вида функций: быстроубывающая с большой производной и функция с малой производной.



Длительность пограничного слоя $\tau_{\text{пс}}$

$$(3 \div 5) \tau_{\text{min}} = (3 \div 5) \frac{1}{|p_1|} = (3 \div 5) \frac{L}{R}$$

Участок пограничного слоя характеризуется быстрым изменением тока при практически неизменном напряжении на конденсаторе

После прохождения пограничного слоя ток плавно спадает до нуля практически за время

$$t_1 = (3 \div 5) \tau_{\text{max}} = (3 \div 5) \frac{1}{|p_2|} = (3 \div 5) RC$$

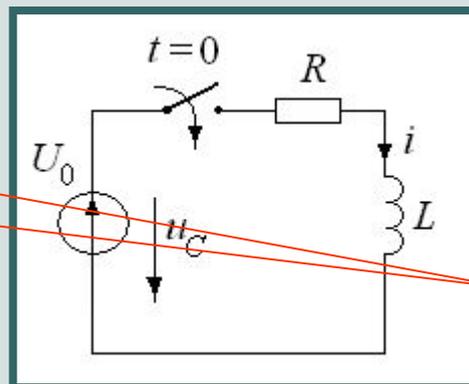
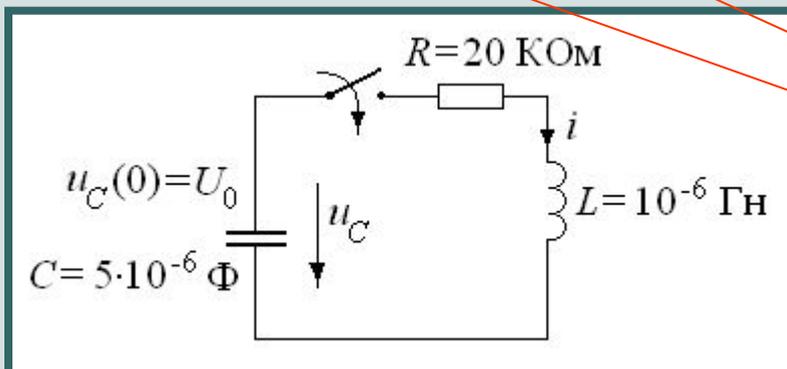
Индуктивность катушки не оказывает влияния на характер процесса

Разделение процессов с существенно разными скоростями

В решении переходного процесса два вида функций:

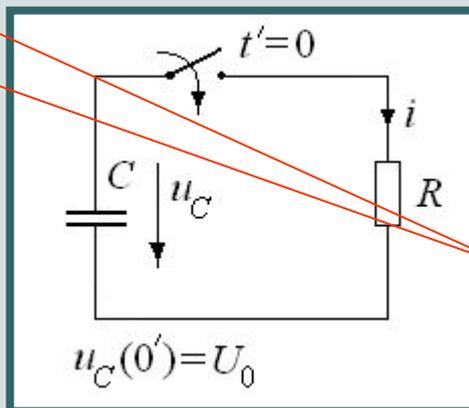
быстроубывающая с большой производной

и функция с малой производной.



• для пограничного слоя $t \in [0, \tau_{\text{пс}}]$

$$i(t) \approx \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$



• для $t' \in [0, t_1]$,
 $t' = t - \tau_{\text{пс}}$

$$i(t') \approx \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t'}$$

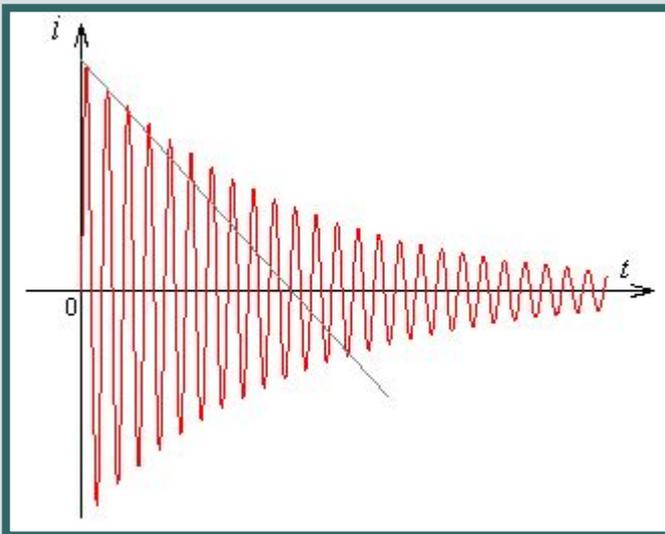
Замечания

Если проблема жесткости аналитически решается разделением процессов с существенно разными скоростями, то численное решение жесткого уравнения сталкивается со значительными трудностями. Прежде всего, **в выборе шага интегрирования**, который должен обеспечивать и точность решения и устойчивость.

- ✓ Использование шага $h_1 = 0,5\tau_{\min} = 0,25 \cdot 10^{-10}$ сек, обеспечивающего **локальную точность**, потребовало бы более 5 млрд. шагов и соответственно огромных затрат машинного времени.
- ✓ Использование шага $h_2 = 0,5\tau_{\max} = 0,5 \cdot 10^{-1}$ сек не обеспечило бы локальной точности расчета (например, максимального значения переходного тока).

«Дребезжащие» системы, уравнения и модели электрических цепей

Термин **«дребезжащая»** математическая модель используется в том случае, если решение уравнений имеет быстроосциллирующий характер. При этом процесс носит колебательный характер, но период возникающих свободных колебаний много меньше постоянной времени огибающей их амплитуды.



Быстроосциллирующие траектории процессов подобных «дребезжащих» систем, также как и траектории процессов «жестких» систем весьма трудно фиксировать в физических экспериментах и численно решать соответствующие им уравнения.