Моделирование систем массового обслуживания

- **Системы массового обслуживания** – это системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов.
- Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике

- В борьбу за клиента в современной экономике вкладываются огромные средства.
- По оценкам западных экономистов, завоевание фирмой нового клиента обходится ей в 6 раз дороже, чем удержание существующих покупателей.
- А если клиент ушел неудовлетворенным, то на его возвращение приходится потратить в 25 раз больше средств.

- Во многих случаях неудовлетворенность клиента вызвана неудачной организацией его обслуживания (слишком долгое ожидание в очереди, отказ в обслуживании и т.д.).
- Использование теории массового обслуживания позволяет фирме избежать подобных неприятностей

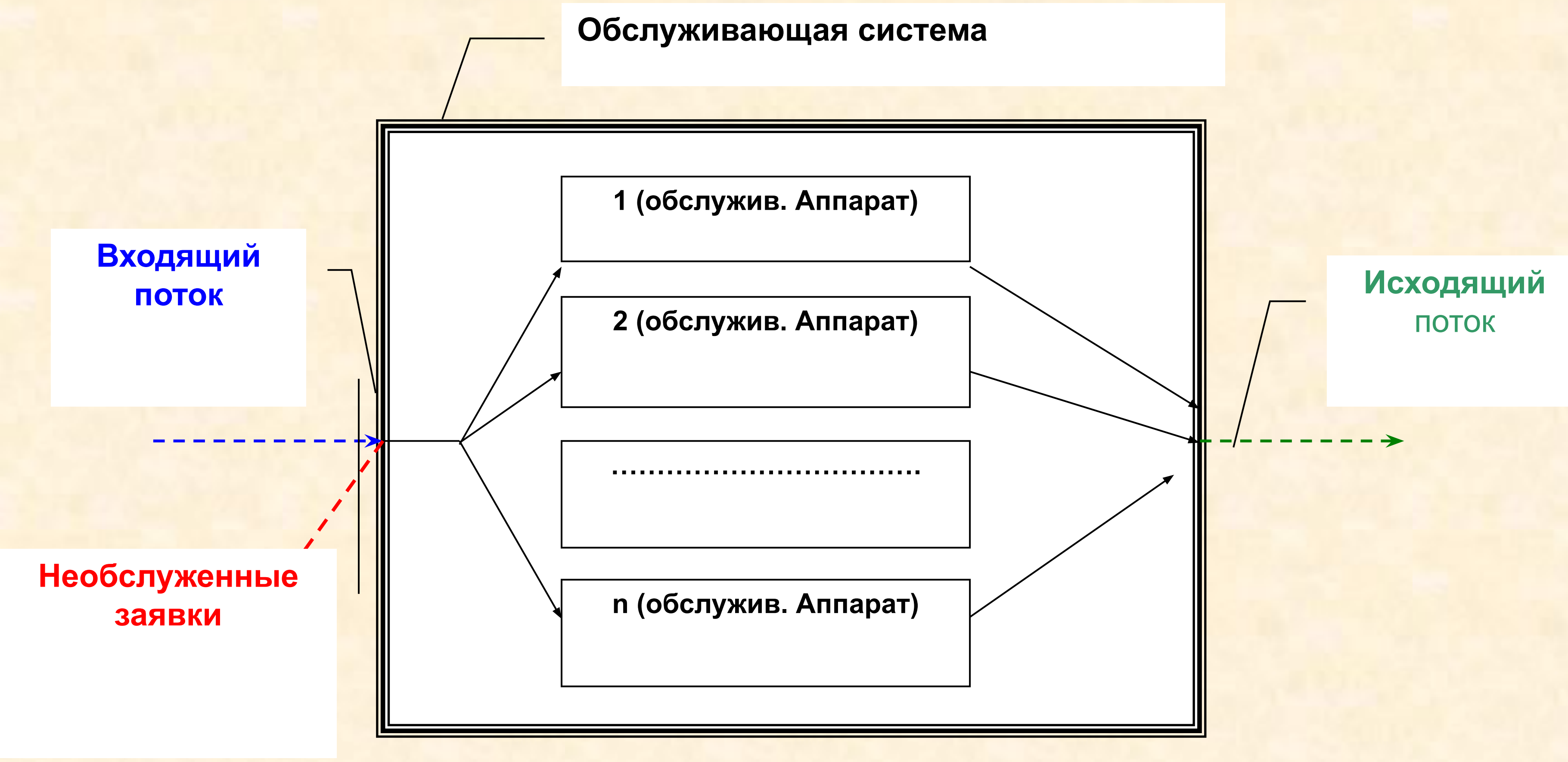
- Основоположником теории массового обслуживания считается датский ученый А. К. Эрланг.
- Являясь сотрудником Копенгагенской телефонной компании, он опубликовал в 1909 году работу «Теория вероятностей и телефонные переговоры», в которой решил ряд задач по теории систем массового обслуживания с отказами.

- Значительный вклад в создание и разработку общей теории массового обслуживания внес выдающийся советский математик Александр Яковлевич Хинчин (1984 – 1959), который предложил сам термин *теория массового обслуживания*.
- В зарубежной литературе чаще используется название *теория очередей*

Системы массового обслуживания, включают следующие элементы:

- Источник требований;
- Входящий поток требований;
- Очередь;
- Обслуживающие устройства (каналы обслуживания);
- Выходящий поток требований.

Структура СМО:



- **Заявками** могут быть производственные и торговые заказы, заявки на ремонт станков, посадку самолетов в аэропорту и заправку автомобилей на автозаправочной станции и т.д.
- **Канал обслуживания** может представлять собой совокупность устройств, этап производственного процесса, аэропорт и т.д.
- Интервалы между последовательными заявками и продолжительность их обслуживания являются **случайными величинами.**

Примеры задач систем МО

1. В торговле Определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры.
2. Склады Установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными.

3. <u>Расчет площади складских помещений</u>

- Складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а - прибытие транспортных средств под выгрузку — как требование

4. <u>Модель производственной фирмы</u>,

- Включает несколько цехов, которые последовательно участвуют в процессе производства некоторого изделия, заказы на изготовление изделия поступают в случайные моменты времени

5. Модель управленческого звена фирмы,
   - Состоит из начальника и заместителей, которые принимают участие в приеме посетителей.
   - В процессе моделирования требуется обеспечить одинаковую занятость участников процесса
6. Модель бензоколонки
   - Количество автомобилей - случайная величина

7. Модели в коммерческой деятельности предприятия.

- Коммерческая деятельность: погрузка товаров, перевозка, разгрузка, хранение, обработка, фасовка, реализация, а также операции с платежными документами, тарой, деньгами, автомашинами, клиентами и т.п.
- Для коммерческой деятельности характерны **массовость поступления товаров, денег, посетителей в случайные моменты времени. Время их обслуживания носит также случайный характер.**

- В качестве *характеристик* эффективности функционирования СМО можно выбрать **три** основные группы
- *1.* ***Показатели эффективности использования СМО****:*
- 1.1. *Абсолютная пропускная способность* СМО – среднее число заявок, которое сможет обслужить СМО в единицу времени.
- 1.2. *Относительная пропускная способность* СМО – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших за это же время заявок.

- 1.3. Средняя продолжительность периода занятости СМО.
- 1.4. Коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок, и т.п.

- 2. ***Показатели качества обслуживания заявок:***
- 2.1. Среднее время ожидания заявки в очереди.
- 2.2. Среднее время пребывания заявки в СМО.
- 2.3. Вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания.
- 2.4. Вероятность того, что вновь поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию.

- 2.5. Закон распределения времени ожидания заявки в очереди.
- 2.6. Закон распределения времени пребывания заявки в СМО.
- 2.7. Среднее число заявок, находящихся в очереди.
- 2.8. Среднее число заявок, находящихся в СМО, и т.п.

- *3.* ***Показатели эффективности функционирования пары «СМО – клиент»****, где под «клиентом» понимают всю совокупность заявок или некий их источник.*
- *К числу таких показателей относится, например, средний доход, приносимый СМО в единицу времени, и т.п.*

- Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания порождает в СМО *случайный процесс*.
- ***Случайным процессом*** (или *случайной функцией*) называется соответствие, при котором каждому значению аргумента ставится в соответствие случайная величина.

Классификация СМО

1. **По месту нахождения источника требований**

- **Разомкнутые** - источник требования находится вне системы
- **Замкнутые** - источник находится в самой системе

- Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров (магазины, кассы вокзалов, портов …)
- Здесь неисправные телевизоры — это требования, источник требований находятся вне системы, число требований можно считать **неограниченным**.
- Это система с **неограниченным** потоком требований.

- К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником требований на их обслуживание бригадой наладчиков.
- Каждый налаженный станок становится потенциальным источником требований на новую накладку.
- В подобных системах общее число требований **конечно** и чаще всего **постоянно.**

2. **По характеру образования очереди**

- **С ожиданием** - требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов
- ❖ **С ограничением на длину очереди** (с ограниченным числом требований в очереди)
- ❖ **С ограничением на время пребывания в очереди** (ограниченным сроком пребывания каждого требования в очереди)
- **С отказами** - требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и теряются

- Примером **системы с отказами** является телефонная станция.
- Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

3. По наличию приоритета

- **Без приоритета:**
  - первым пришел - первым ушел,
  - последним пришел – первым обслужен,
  - случайный отбор
- **С приоритетом:**
  - абсолютный приоритет,
  - относительный приоритет,
  - специальные правила приоритета

4. **По количеству каналов**

- **Многоканальные:**
  - с однородными каналами,
  - с неоднородными каналами,
  - с параллельно расположенными каналами,
  - с последовательно расположенными каналами.
- **Одноканальные.**

Потоки событий

- Под *потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих* одно за другим в какие-то случайные моменты времени
- (например, поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей, поток заказных писем, поступающих в почтовое отделение и т. п.)..

- Поток характеризуется ***интенсивностью λ*** – *частотой появления событий или средним* числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.
- Поток событий называется *регулярным, если события следуют одно за другим через* определенные равные промежутки времени.

- Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.
- Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай.
- Типичным для системы массового обслуживания является **случайный поток заявок.**

- Наиболее разработаны методы решения, в которых входящий поток требований является ***простейшим (пуассоновским).***
- Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время ***t*** ***k*** требований задается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

λ –математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени

- Простейший поток обладает тремя основными свойствами:

1. ординарности,
2. стационарности
3. отсутствием последействия

- *Ординарность* потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований.
- Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков

- *Стационарным* называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (**λ**,), не меняется во времени.
- Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени Δt зависит от величины промежутка и не зависит от начала его отсчета.

- *Отсутствие последействия* означает, что число требований, поступивших в систему до момента ***t***, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от ***t*** до ***t* + Δ*t*.**
- Например, если на ткацком станке в данный момент произошел обрыв нити, и он устранен ткачихой, то это не определяет, произойдет новый обрыв на данном станке в следующий момент или нет, тем более это не влияет на вероятность возникновения обрыва на других станках.

Пример.

- На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью **λ**=1,2 вызовов в минуту.
- Найти вероятность того, что за две минуты: а) не придет ни одного вызова; б) придет ровно один вызов; в) придет хотя бы один вызов.

Решение

- а) Случайная величина *X* – *число вызовов за **две** минуты – распределена* по закону Пуассона с параметром λ =1,2· 2 = 2,4 .
- Вероятность того, что вызовов не будет (k=0)

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = P_0(2) =$$

$$= e^{-2,4} \approx 0,091$$

- б) Вероятность одного вызова (*k =1)*

$$P_1(2) = 2{,}4 \cdot 0{,}091 \approx 0{,}218$$

в) Вероятность хотя бы одного вызова:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$$
$$1 - P_0(2) = 1 - 0{,}091 \approx 0{,}909$$

- Важная характеристика СМО — **время обслуживания требований в системе**.
- Оно является, как правило, случайной величиной и может быть описано законом распределения. Обычно используется ***экспоненциальный закон*** *распределения времени обслуживания.*
- Вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины ***t***, определяется формулой

$$\mathbf{P(t) = 1 - e^{-\mu t},}$$

- где **μ** —величина, обратная среднему времени обслуживания $\boldsymbol{\mu = 1/t_{об}}$

СМО с отказами

- В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:
- ***А*** *– абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых* в единицу времени;
- ***Q*** *– относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуженных* системой (или вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена);

- *P отк – вероятность отказа – вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной;*
- *k – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).*

1.Одноканальная система с отказами.

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$A = \lambda \cdot Q$$

Пример.

- В фирму поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью **λ = 90** вызовов в час,
- а средняя продолжительность разговора по телефону = 2 *мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при* наличии одного телефонного номера.

Решение

- Интенсивность потока обслуживаний **μ=1/tоб=1/2=0,5 в мин=30 в час**
- **Q=30/(90+30)=0,25** т.е.,в средем около 25 % поступающих заявок осуществят переговоры по телефоу.
- **Вероятность отказа составит Р отк=1−0,25 = 0,75**
- **Абсолютная пропускная способность** ***А = 90 ·0,25 = 22,5*** т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки.
- **Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.**

2.Многоканальная система с отказами (задача Эрланга)

- Эта задача возникла из нужд телефонии и была решена в 1909 г. датским инженером-математиком А.К. Эрлангом.
- Задача ставится так: имеется ***n*** *каналов (линий связи), на кото*рые поступает поток заявок с интенсивностью **λ** . Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ .
- Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

- Обозначим **λ_{ij}-** интенсивность потока событий, переводящий систему из состояния **S_i** в состояние **S_j**.

$$S_0 \xleftrightarrow{\lambda_{01}\rightarrow\leftarrow\lambda_{10}} S_1 \ldots\ldots S_{n-1} \xleftrightarrow{\lambda_{n-1,n}\rightarrow\leftarrow\lambda_{n,n-1}} S_n$$

$$\text{Для } S_0 \quad \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1$$

$$\text{следовательно} \quad \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$$

$$\text{и} \quad \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k$$

$$\text{кроме того} \quad p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1$$

Решим ситему

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0 \qquad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0$$

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k.....}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1.....}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0$$

Таким образом, все вероятности состояний $\mathbf{p_0}$ $\mathbf{p_1....p_n}$ выражены через $\mathbf{p_0}$

Так как $p_0 + p_1 + ... + p_n = 1$

$$p_0 \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + ... + \frac{\lambda_{n-1,n} .....\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} .....\lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = 1$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + ... + \frac{\lambda_{n-1,n} .....\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} .....\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}$$

или $$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1}$$

- Введем параметр **$\alpha = \lambda/\mu$**.
- **λ** — среднее число требований, поступающих за единицу времени, **$1/\mu$** — среднее время обслуживания одним каналом одного требования, тогда **$\alpha = \lambda/\mu$**, — среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования.
- **$\alpha/n < 1$** означает, что число обслуживающих каналов больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы обслужить все поступившие требования.

Важнейшие характеристики

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \frac{\alpha^k}{k!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}\right)^{-1}$$

2. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты

$$p_{отк} = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot p_0$$

2 Вероятность того, что занято ровно **k** обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad при \quad 1 \le k \le n$$

4. Вероятность того, что занято ровно **k** обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, превосходит число обслуживающих аппаратов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!\,n^{k-n}} P_0 \quad при \quad k \ge n$$

5. Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0$$

6. Абсолютная пропускная способность получается умножением интенсивности заявок на относительную пропускную способность

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \left(1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0\right)$$

7. Среднее число каналов занятых обслуживанием

$$\bar{k} = A / \mu = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^{n}}{n!} p_0\right)$$

8. Среднее время ожидания начала обслуживания в системе

$$\bar{t}_{ож} = \frac{P_n}{\mu(n-\alpha)}$$

9. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$\overline{N_0} = n - \bar{k}$$

10. Коэффициент простоя каналов:

$$K_{пр} = \frac{\overline{N_0}}{n}$$

11. Коэффициент загрузки каналов

$$K_з = \frac{\bar{k}}{n}$$

Примеры

- 1. В условиях предыдущего примера определить оптимальное число телефонных номеров в фирме, если условием оптимальности считать удовлетворение из каждых 100 заявок на переговоры в среднем **не менее 90** заявок.

Решение

- **$\mu=1/t_{об}=1/2=0{,}5$ в мин=30 в час**
- Интенсивность нагрузки канала **$\alpha=90/30=3$** т.е. за время среднего (по продолжительности телефонного разговора= 2 мин) поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

- Будем постепенно увеличивать число каналов (телефонных номеров) *n = 2, 3, 4,... и* определим для получаемой *n - канальной СМО характеристики обслуживания.*

Показатели эффективности	Обозначение	Число каналов (телефонных номеров)					
		1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность	***Q***	0,25	0,47	0,65	0,79	0,90	0,95
Абсолютная пропускная способность	***A***	22,5	42,3	58,8	71,5	80,1	85,3

- По условию оптимальности **Q ≥ 0,9**, *следовательно, в фирме необходимо установить* 5 телефонных номеров (в этом случае Q = *0,90).*
- *При этом в час будут обслуживаться в* среднем **80** заявок (*A = 80,1),*
- *а среднее число занятых телефонных номеров (каналов) k =A μ = 80,1 30 ≈* **2,67** *.*

- *Содержание* каждого канала в единицу времени обходится в какую-то сумму. Вместе с тем, каждая обслуженная заявка приносит какой-то доход.
- Умножая этот доход на среднее число заявок, *обслуживаемых в единицу* времени, мы получим **средний доход от СМО в единицу времени.**

- Естественно, при увеличении числа каналов этот доход растет, но растут и расходы, связанные с содержанием каналов.
- Что перевесит – увеличение доходов или расходов? Это зависит от условий операции, т.е. от «платы за обслуживание заявки» и от стоимости содержания канала.
- Зная эти величины, можно найти **оптимальное число каналов, наиболее экономически эффективное**

Пример 2

- Пусть филиал фирмы по ремонту радиоаппаратуры имеет $\boldsymbol{n = 5}$ мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт $\boldsymbol{\lambda = 10}$ радиоаппаратов.
- Общее число радиоаппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным пуассоновским.

- Каждый аппарат в зависимости от характера неисправности требует различного случайного времени на ремонт. Статистика показала, что время ремонта подчиняется экспоненциальному закону;
- В среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров успевает отремонтировать **μ = 2,5** радиоаппарата.
- Требуется оценить работу филиала фирмы по ремонту радиоаппаратуры, рассчитав ряд основных характеристик данной СМО.
- За единицу времени принимаем 1 рабочий день (7 часов).

- 1. Определим параметр
- $\alpha=\lambda/\mu= 10/2,5 = 4$,так как $\alpha < n$, то очередь не может расти безгранично.
- 2. Вероятность того, что все мастера свободны от ремонта аппаратуры
- P **=*1/[*** $1+4+4^2/2!+ 4^3/3!+ 4^4/4!+ 4^5/5!]=$ **0,008.**
- 3. Вероятность того, что все мастера заняты ремонтом

$$P_n = \frac{4^5 \cdot 0{,}008}{5!} = 0{,}068$$

Это означает, что 6,8% времени мастера полностью загружены работой

- 4. Среднее время обслуживания (ремонта) одного аппарата
- $t_{об}$= 1/μ = 7/2,5 = 2,8 ч/аппарат

(при условии семичасового рабочего дня).

- 5. В среднем время ожидания начала ремонта равно

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0{,}068 \cdot 2{,}8}{5-4} = 0{,}19 ч.$$

Среднее число мастеров занятых обслуживанием

$$\bar{k} = \alpha(1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0) = 4(1 - \frac{4^5}{5!} 0{,}008) = 3{,}72$$

Среднее число мастеров, свободных от работы

$$\overline{N}_o = n - \bar{k} = 5 - 3{,}72 = 1{,}28$$

Таким образом, в среднем в течение рабочего дня ремонтом заняты четыре мастера из пяти

СМО с ожиданием (с очередью)

1. **Одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

- Часто встречаются одноканальные СМО с очередью (врач, обслуживающий пациентов; кассир, выдающий зарплату и т.д.).
- Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием:

Рассмотрим одноканальную СМО, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью **λ**

. Предположим, что поток обслуживаний также простейший с интенсивностью **μ** . Это означает, что непрерывно занятый канал обслуживает в среднем **μ** заявок в единицу времени.

- Заявка, поступившая в СМО в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.
- Интенсивность нагрузки канала: $\alpha = \lambda / \mu$

- Далее предполагаем, что в системе имеется ограничение на длину очереди, предполагаем, что в очереди могут находиться максимум ***m*** ($m \geq 1$) заявок.
- *Поэтому заявка, пришедшая на вход* СМО, в момент, когда в очереди уже стоят ***m*** *заявок, получает отказ и покидает систему* необслуженной.

Основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием

$$P_0 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+2}}$$

$$P_{отк} = P_{m+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+2}}, если\, \alpha \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+2}, \qquad если\;\; \alpha = 1 \end{cases}$$

- **Относительная пропускная способность**, или доля обслуживаемых заявок, *совпадает со средней долей* не получивших отказ заявок, поскольку заявка попавшая в очередь будет обслужена.

$$Q = 1 - P_{отк} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha^{m+2}}, если\ \alpha \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{m+2}, \quad если\ \ \alpha = 1 \end{cases}$$

- **Абсолютная пропускная способность системы A=λQ**
- **Среднее число заявок в *очереди* $L_{оч}$** *определяется как ма*тематическое ожидание случайной величины – *числа заявок, стоящих в оче*реди:

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2(1-\alpha^m(m+1-\alpha m))}{(1-\alpha)(1-\alpha^{m+2})}, если\, \alpha \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2m(m+2)}, \qquad если\ \alpha = 1 \end{cases}$$

- Важной характеристикой СМО с ожиданием является **среднее время ожидания заявки в очереди *$T_{оч}$***, которая называется формулой Литтла

$$\overline{T_{оч}} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$$

т.е. *среднее время ожидания заявки в очереди равно среднему числу заявок в очереди ,деленному на интенсивность λ входящего потока заявок*

Пример

- На АЗС имеется **одна** колонка. Площадка, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более **трех** машин одновременно, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю АЗС.
- В среднем машины прибывают на станцию каждые **2** мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем **2,5** мин.
- Определить основные характеристики системы.

- **Решение.** Математической моделью данной АЗС является одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди (*m = 3).*
- *Предполагается, что поток машин, подъезжающих* к АЗС для заправки, и поток обслуживаний – простейшие
- Поскольку машины прибывают в среднем через каждые 2 мин, то интенсивность входящего потока равна **λ =1 /2 = 0,5** (машин в минуту)

- Среднее время обслуживания одной машины $T_{об}$ = 2,5 *мин, следовательно, интенсивность потока обслуживаний* μ =1 /2,5 = 0,4 (машины в минуту).
- Определяем интенсивность нагрузки канала: α = λ/ μ = 0,5/ 0,4 =1,25
- Вычисляем вероятность отказа

$$P_{отк} = \frac{\alpha^4(1-\alpha)}{1-\alpha^5} \approx 0,297$$

- Относительная пропускная способность

$$Q = 1 - P_{отк} \approx 1 - 0,297 = 0,703$$

- Абсолютная пропускная способ ность **$A = \lambda Q \approx 0,5 \cdot 0,703 \approx 0,352$**

- Среднее число машин, ожидающих в очереди на заправку

$$L_{оч} = \frac{\alpha^2(1-\alpha^3(m+1-3\alpha))}{(1-\alpha)(1-\alpha^5)} \approx 1,559$$

Среднее время ожидания машины в очереди находим по формуле Литтла

$$\overline{T_{оч}} = \frac{L_{оч}}{\lambda} \approx \frac{1,559}{0,5} = 3,118$$

- Таким образом, из анализа работы СМО следует, что из каждых 100 подъезжающих машин 30 получают отказ (*Р отк* ≈ 29,7%*), т.е. обслуживаются 2/3 заявок.*
- *Поэтому необходимо* либо сократить время обслуживания одной машины (увеличить интенсивность потока обслуживаний), либо увеличить число колонок, либо увеличить площадку для ожидания.

- Оптимальное решение принимается с учетом затрат, связанных соответственно с увеличением штата обслуживающего персонала (увеличение производительности канала),
- с расширением площадки для ожидания или приобретением дополнительной колонки, и потерь, связанных с потерей заявок на обслуживание.

Многоканальная система с ограниченной очередью

Вероятность простоя каналов

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^{n+1}}{nn!} + \frac{\alpha^{n+2}}{n^2 n!} + \ldots \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!}\right)^{-1}$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки (отказ произойдет в случае, если все каналы заняты и в очереди находятся m

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0$$

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \qquad k = 1,2,\ldots n$$

m –длина очереди

$$P_{n+i} = \frac{\alpha^{n+i}}{n^i \; n!} P_0 \qquad i = 1,2,\ldots m$$

- Относительная пропускная способность

$Q=1-P_{отк}$

Абсолютная пропускная способность

$A=Q*\lambda$

- ПРИМЕР
- Междугородный переговорный пункт имеет четыре телефонных аппарата*.* В среднем за сутки поступает *320* заявок на переговоры*.* Средняя длительность переговоров составляет *5* мин*.* Длина очереди не должна превышать *6* абонентов*.* Потоки заявок и обслуживаний простейшие*.*
- Определить характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме *(*вероятность простоя каналов*,* вероятность отказа*,* среднее число занятых каналов*,* абсолютную пропускную способность*,* относительную пропускную способность*,* среднее время заявки под обслуживанием*).*

РЕШЕНИЕ.

- Имеем систему массового обслуживания (СМО) с четырьмя каналами (четыре аппарата), с ожиданием и ограниченной очередью (6 мест).
- Получаем параметры *n* = 4 (число каналов), *m* = 6 (число мест в очереди), Λ=320/60*24=2/9 (интенсивность входящего потока, заявок в минуту), μ =1/5 (интенсивность потока обслуживания, одна заявка за 5 минут). α=2/9:1/5=1,1
- Определим характеристики работы данной СМО в предельном режиме

Вероятность простоя каналов

$$p_0 = \left(1 + 1{,}1 + \frac{1{,}1^2}{2!} + \frac{1{,}1^3}{3!} + \frac{1{,}1^4}{4!} + \frac{1{,}1^5}{4*4!} + \frac{1{,}1^6}{4^2*4!} + \frac{1{,}1^7}{4^3*4!}\right.$$

$$\left. + \frac{1{,}1^8}{4^4*4!} + \frac{1{,}1^9}{4^5*4!} + \frac{1{,}1^{10}}{4^6*4!}\right)^{-1} \approx 0{,}328$$

- Вероятность отказа в обслуживании
-

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{1{,}1^{10}}{4^6 4!} 0{,}328 = 0{,}000009$$

- Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания)

$Q=1-0,000009=0,99999$

- Абсолютная пропускная способность

$A=0,99999*2/9=0,22222$

- Среднее число занятых каналов $N=A/\mu=0,2222*5=1,1111$
- Среднее время заявки под обслуживанием $T=N/\lambda=1,1111/(2/9)=4,99995$ минут

Одноканальная СМО с неограниченным ожиданием

- Если $\lambda > \mu$ ($\alpha > 1$), т.е. среднее число заявок, поступивших в систему за единицу времени, больше среднего числа обслуживаемых заявок за то же время при непрерывно работающем канале, то очевидно, что **очередь неограниченно растет.**
- В этом случае предельный режим не устанавливается и предельных вероятностей состояний не существует (они равны нулю).

- В случае $\lambda = \mu$ ($\alpha = 1$) при условии, что входящий поток заявок и поток обслуживаний регулярные (заявки поступают через равные интервалы времени, и время обслуживания одной заявки является постоянным, равным интервалу времени между поступлениями заявок), **очереди не будет и канал будет обслуживать заявки непрерывно.**
- Но если входящий поток или поток обслуживаний становится случайным, очередь начинает расти до бесконечности.

- Поэтому далее при рассмотрении указанных систем будем предполагать, что $\lambda < \mu$,т.е. $\alpha <1$.
- При этом условии с течением времени устанавливается предельный режим, и предельные вероятности состояний существуют.

- При отсутствии ограничений на очередь каждая заявка, поступившая в СМО, будет обслужена. Поэтому вероятность отказа равна нулю **Ротк=0**
- Следовательно, вероятность того, что поступившая заявка будет принята в систему,так же как и относительная пропускная способность *равна единице* ***Q =1-Ротк=1***

- Тогда для абсолютной пропускной способности *А (и интенсивности выходящего потока)* будем иметь:

$A = \lambda Q = \lambda$ *, т.е. интенсивности входящего и выходящего потоков совпадают*

Среднее число заявок в очереди

$$L_{оч} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}$$

- Среднее время ожидания заявки в очереди по формуле Литтла равно

$$\overline{T_{оч}} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\alpha}{\mu(1-\alpha)}$$

среднее время пребывания заявки в СМО *складывается из среднего* времени заявки в очереди *и среднего времени обслуживания заявки :*

$$\overline{T_{СМО}} = \overline{T_{оч}} + \overline{T_{об}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

- **Пример.** В парикмахерской работает только один мужской мастер. Среднее время стрижки одного клиента составляет 20 мин. Клиенты в среднем приходят каждые 25 мин.
- Средняя стоимость стрижки составляет 60 руб. Как в первую смену с 9 до 15, так и во вторую – с 15 до 21, работают по одному мастеру.
- . Определить ежедневный «чистый» доход каждого мастера, если он получает только 30% от выручки (остальное уходит на оплату аренды, налоги, и проч.).

- **Решение.** Интенсивность входящего потока $\boldsymbol{\lambda = 2{,}4}$ клиента/ч,
- интенсивность потока обслуживаний **μ=1/ 20мин=1/(1/3) часа=3 клиента в час**
- интенсивность нагрузки (канала) мастера $\boldsymbol{\alpha=\lambda/\mu=0{,}8}$
- долю времени (вероятность) простоя мастера $\boldsymbol{P_0=1-\alpha=1-0{,}8=0{,}2}$
- вероятность того, что мастер занят работой $\boldsymbol{P_{зан}=1-P_0=1-0{,}2=0{,}8}$

- Среднее число клиентов в очереди

$$L_{оч} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)} = \frac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2 \ \textit{клиента}$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\overline{T_{оч}} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{3{,}2}{2{,}4} = 1{,}34 \ \textit{минуты}$$

Среднее время пребывания в парикмахерской

$$\overline{T_{CMO}} = \overline{T_{оч}} + \overline{T_{об}} = 1{,}34 + 20 = 21{,}34 \ мин$$

- Система работает вполне удовлетворительно. Поскольку α <1, то режим работы системы устойчивый, 20% рабочего времени мастер не занят,
- а остальные 80% времени занят работой, длина очереди 3,2 клиента небольшая, а среднее время пребывания клиента в парикмахерской всего 21,34 мин.

- Каждый мастер занимается обслуживанием клиентов в среднем ежедневно в течение

0,8(15-9)=4,8 часа=288 мин.

- За это время он обслужит 288 20 =14,4 клиента, поэтому ежедневная выручка в среднем составит 14,4 · 60 = 864 руб.
- Ежедневный «чистый» доход каждого мастера в среднем составляет 864 · 0,3 = 259,2 руб.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

- Предположим, что α/n <1 выполнено и предельные вероятности существуют.
- 1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны

$$p_0=\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\dots\frac{\alpha^k}{k!}+\dots+\frac{\alpha^n}{n!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right)^{-1}$$

2 Вероятность того, что занято ровно **k** обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad при \quad 1 \le k \le n$$

4. Вероятность того, что занято ровно **k** обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, превосходит число обслуживающих аппаратов

$$P_{n+r} = \frac{\alpha^{n+r}}{n!\,n^r} P_0 \quad при \quad k \ge n$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \lambda / \mu = \alpha$$

Среднее число заявок в очереди

$$L_{оч} = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{n \cdot n!(1 - \alpha/n)^2}$$

- Среднее число заявок в системе

$L_{сист} = L_{оч} + \alpha$

- Среднее время заявки в очереди

$W_{оч} = 1/\lambda \ L_{оч}$

- Среднее время заявки в системе

$W_{сист} = 1/\lambda \ L_{сист}$

Пример

- Железнодорожная касса с двумя кассирами (очередь одна **$n=2$**), **$\lambda=0{,}9$** (пассажира в минуту), кассир тратит на обслуживание одного пассажира в среднем 2 минуты.
- **РЕШЕНИЕ $\mu=1/2=0{,}5$ $\alpha=\lambda/\mu=1{,}8$.**
- Т.к. $\alpha/2=1{,}8/2=0{,}9<1$, то финальные (предельные) вероятности существуют.

$$p_0 = \left(1 + 1{,}8 + \frac{1{,}8^2}{2!}\right)^{-1} \approx 0{,}0525$$

$$L_{оч} = 7{,}68$$

$$W_{оч} \approx 8{,}54\,мин$$