Функцияның шегі.

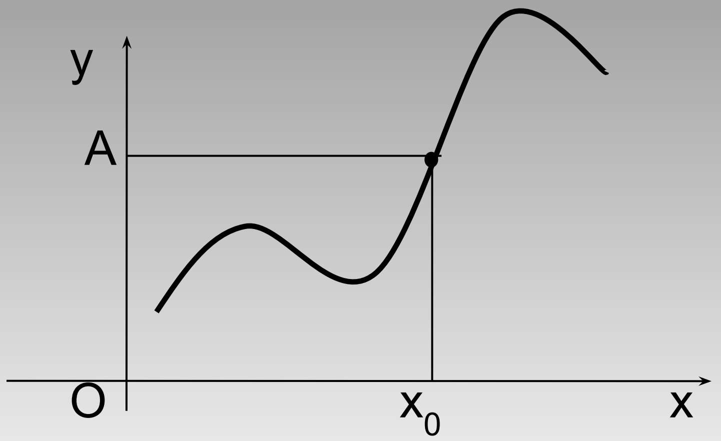
Қасиеті.

Анықтама

f функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталсын.

f функциясы x_0 нүктесінде шегі болады, егер x_0 нүктесіне ұмтылатын x_n $(n = 1, 2,..., x_n \neq x_0)$ нүктелер тізбегі үшін, $f(x_n)$ функция мәндерінің тізбегі A санына ұмтылса. Яғни f функциясының $(x \rightarrow x_0)$ ұмтылғандағы x_0 нүктесіндегі шегі A-ға тең деп аталады, және былай белгіленеді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



Шектің қасиеті

егер $f\,(x)$ және $g\,(x)$ функциялары шегі бар болса,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

Онда

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = A + B$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) g(x) \right) = AB,$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B},$$

егер $B \neq 0$ және егер $g\,(x) \neq 0$

Функцияның нүктедегі шегін есептеу мысалдары

1 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$

2 $$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+8)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x+4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

3 $$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}=\frac{2}{0}=\infty.$$

Анықталмаған жағдайларды ашу

Шектерді есептеу барысында келесі анықталмаған жағдайлармен кездесеміз

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^{\infty}), (0^{\infty}), (0^{0})(\infty^{0}).$$

Осы жағдайларда шекті есептеу анықталмағандықты ашу деп аталады. Нәтижесінде нақты сан, ноль немесе шексіздік шығуы мүмкін

∞/∞ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін, айнымалының жоғарғы дәрежесіне алымы мен бөлімін бөлу жеткілікті

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(**)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Жалпы ереже: егер бөлшектің алымы мен бөлімінде **көпмүшеліктер**, және 0/0 түріндегі анықталмаған жағдай болса, онда оны ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін **көбейткіштерге жіктеу керек.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Алымы мен бөлімін түйіндес өрнекке көбейту әдісі

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Егер бөлшектің алымы (бөлімінде) иррационал өрнек болса, одан құтылу үшін бөлшектің алымы (бөлімін) түйіндес өрнекке көбейту керек

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

Тамаша шектер

Бірінші тамаша шек

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

Екінші тамаша шек

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$