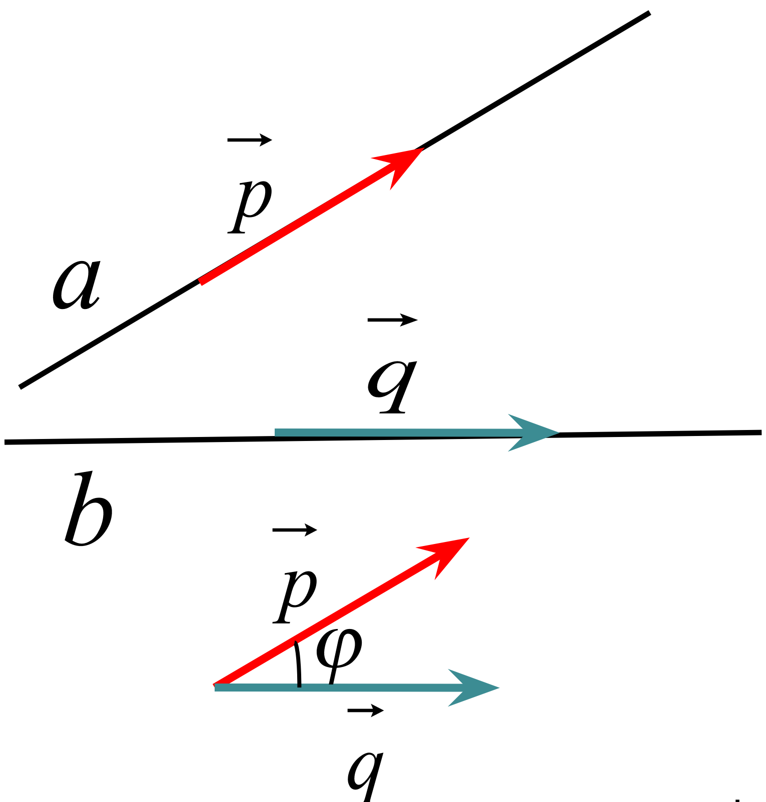
Стереометрия

Векторно- координатный метод в решении задач №14 ЕГЭ

Угол между прямыми



$\vec{p}$ - направляющий вектор прямой ***a***

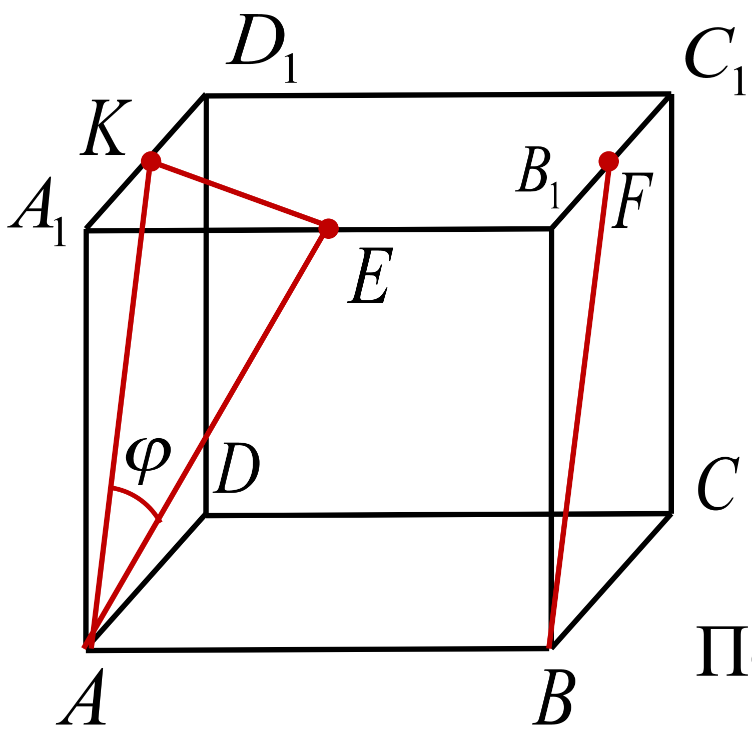
$\vec{q}$ - направляющий вектор прямой ***b***

φ - угол между прямыми

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\qquad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF, где E – середина ребра A_1B_1, а F – середина ребра B_1C_1



Решение (1 способ)

К - середина A_1D_1

$$AK \parallel BF \qquad \angle KAE = \varphi$$

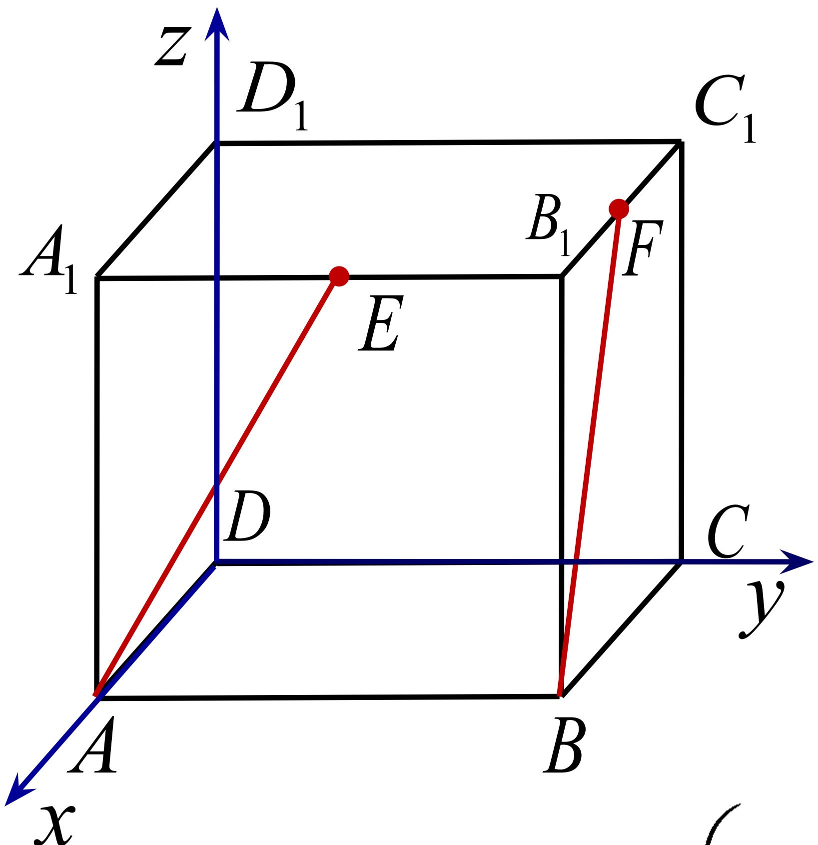
$$AE = AK = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle AKE$

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \varphi = \arccos 0{,}8$$

Решение (2 способ)



$A(1;0;0)$ $\quad E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$

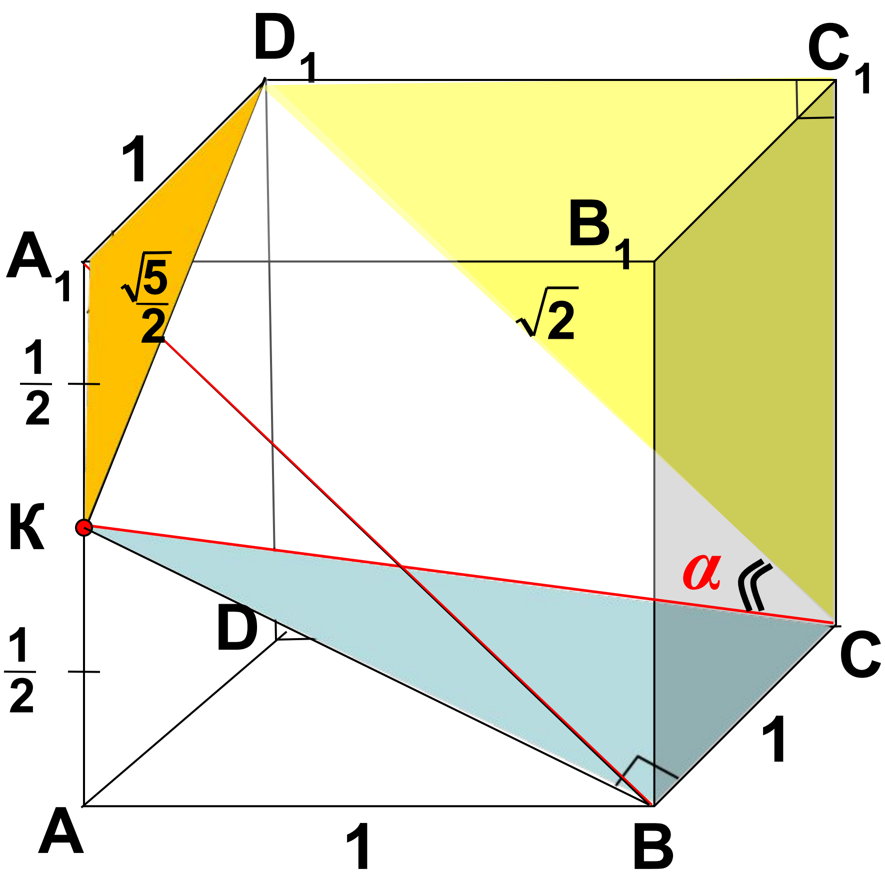
$B(1;1;0)$ $\quad F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$

$\overrightarrow{AE}\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ $\quad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$

$$\cos\varphi=\frac{\left|0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot 1\right|}{\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}}=0{,}8$$

Задача2. **Точка К – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и СК.**

1способ



$Из\ \Delta KA_1D_1:$

$KD_1^2 = KA_1^2 + A_1D_1^2;$

$KD_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2;$

$KD_1^2 = 1\frac{1}{4};$

$KD_1 = \pm\sqrt{\frac{5}{4}};$

$KD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

$Из\ \Delta CC_1D_1:$

$CD_1^2 = CC_1^2 + C_1D_1^2;$

$CD_1^2 = 1^2 + 1^2;$

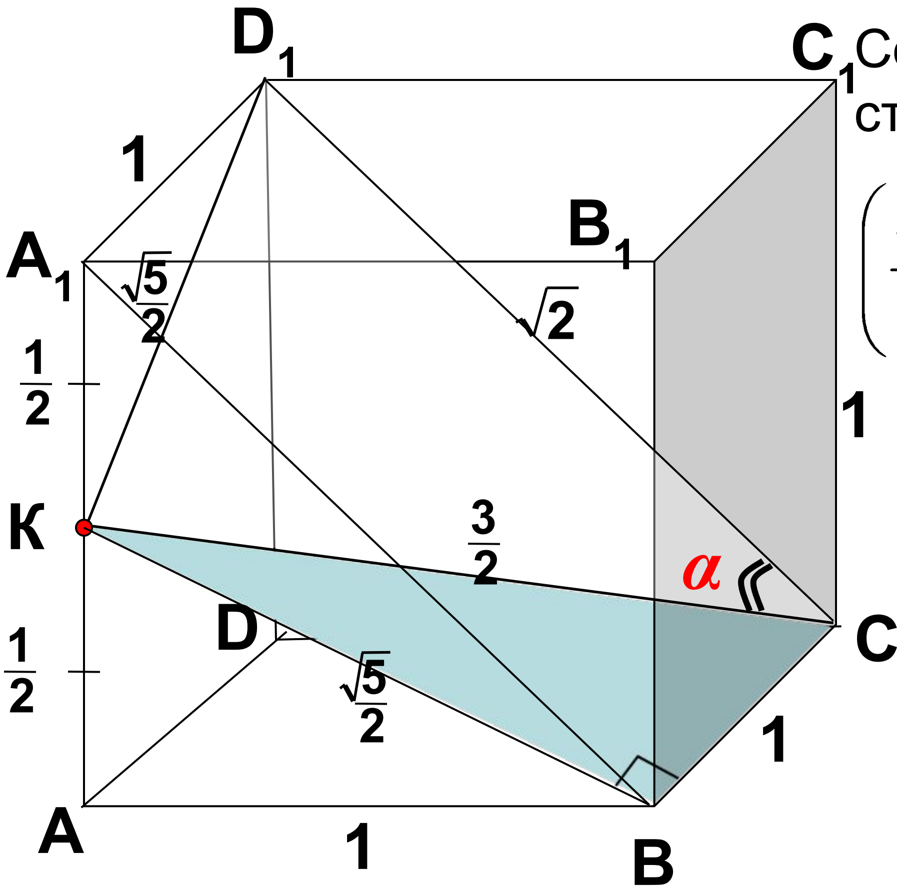
$CD_1^2 = 2;$

$CD_1 = \pm\sqrt{2};$

$CD_1 = \sqrt{2}.$

Точка К – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и СК.

Из треугольника KBC $KC = \frac{3}{2}$



Составляем теорему косинусов для стороны KD_1:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$3\sqrt{2}\cos\alpha = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}}$$

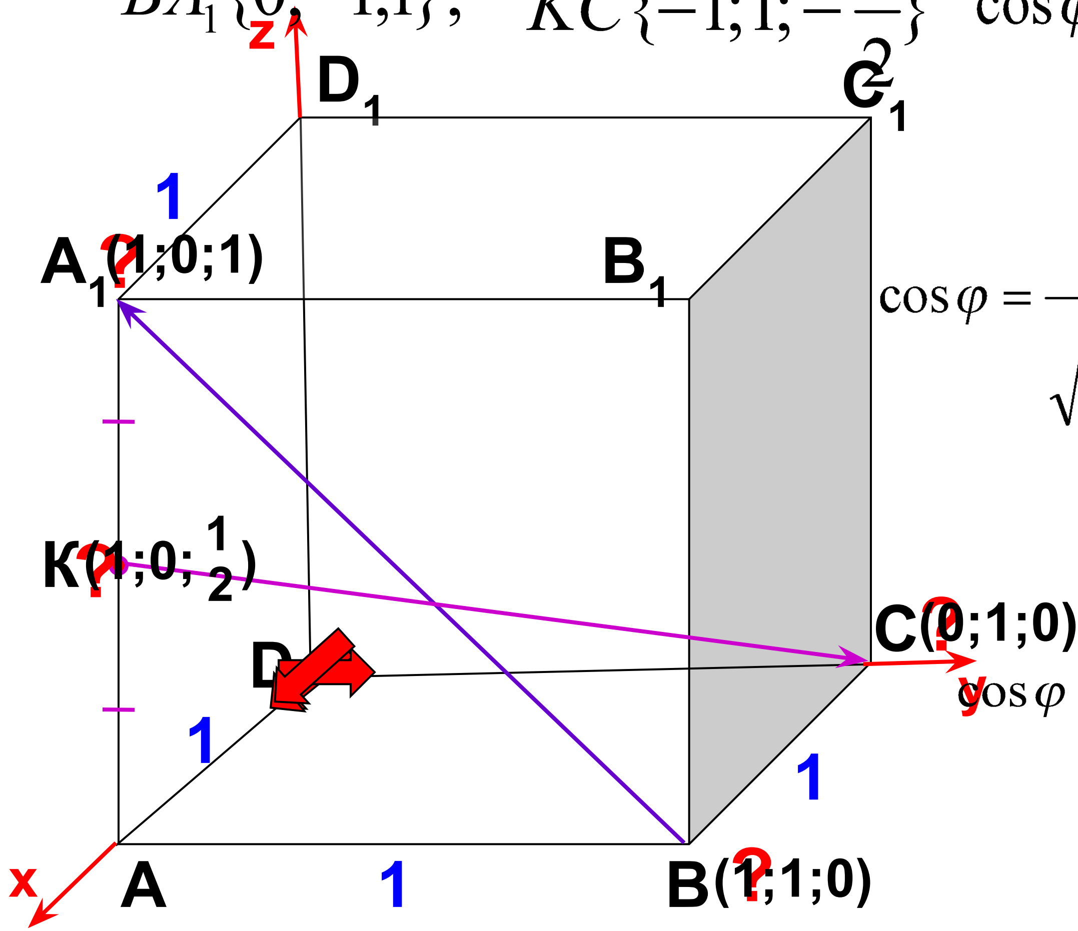
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^0$$

Задача 2. Точка К – середина ребра AA_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и СК.

2 способ

$\overrightarrow{BA_1}\{0;-1;1\}$; $\overrightarrow{KC}\{-1;1;-\frac{1}{2}\}$



$$\cos\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

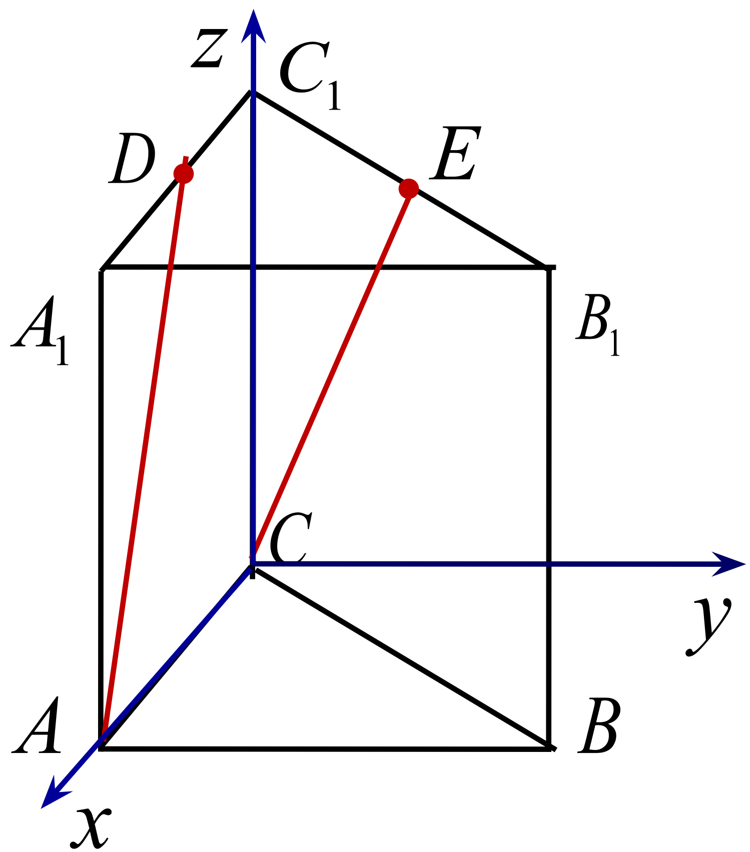
$$\cos\varphi = \frac{\left|0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-1\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}}$$

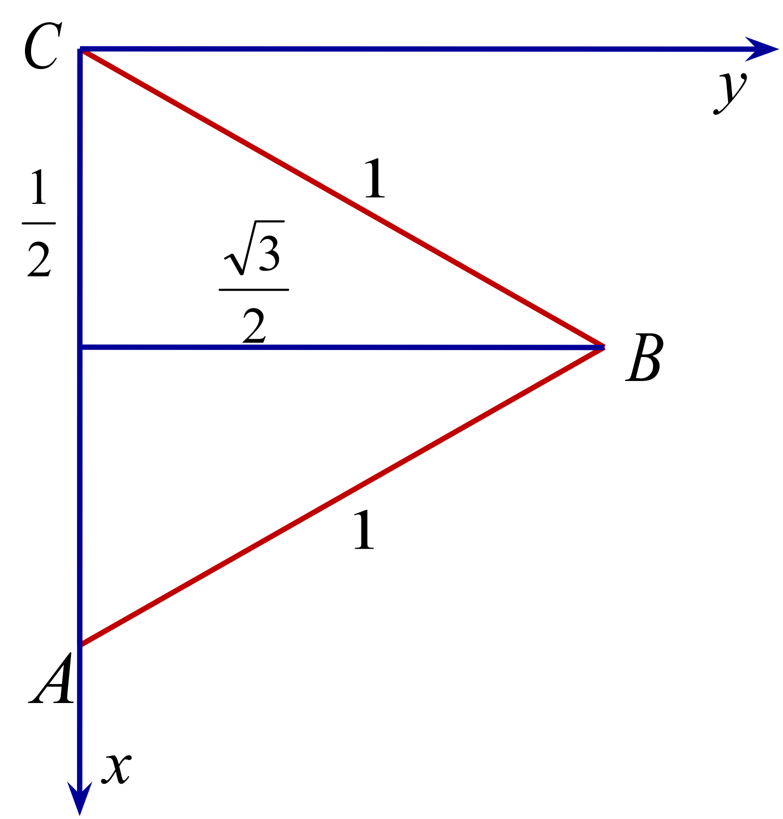
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45^0$$

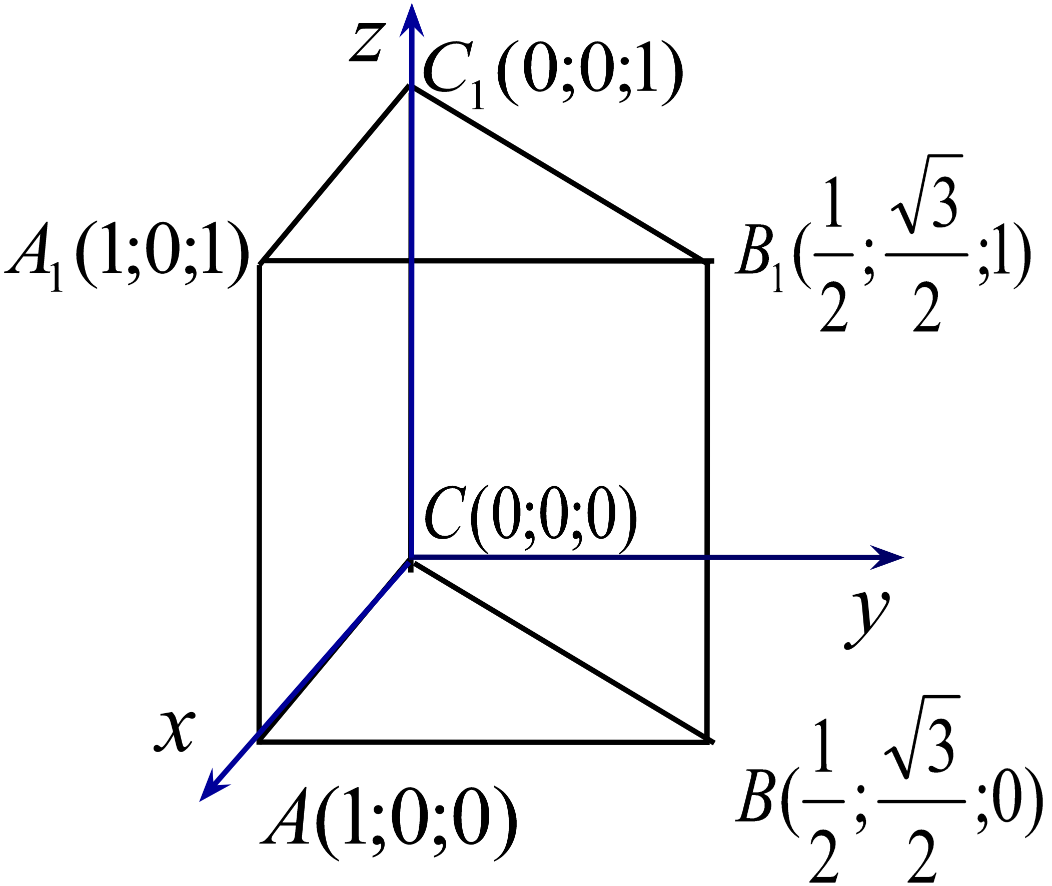
Задача 3 **В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми *AD* и *CE*, где *D* и *E* - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1**



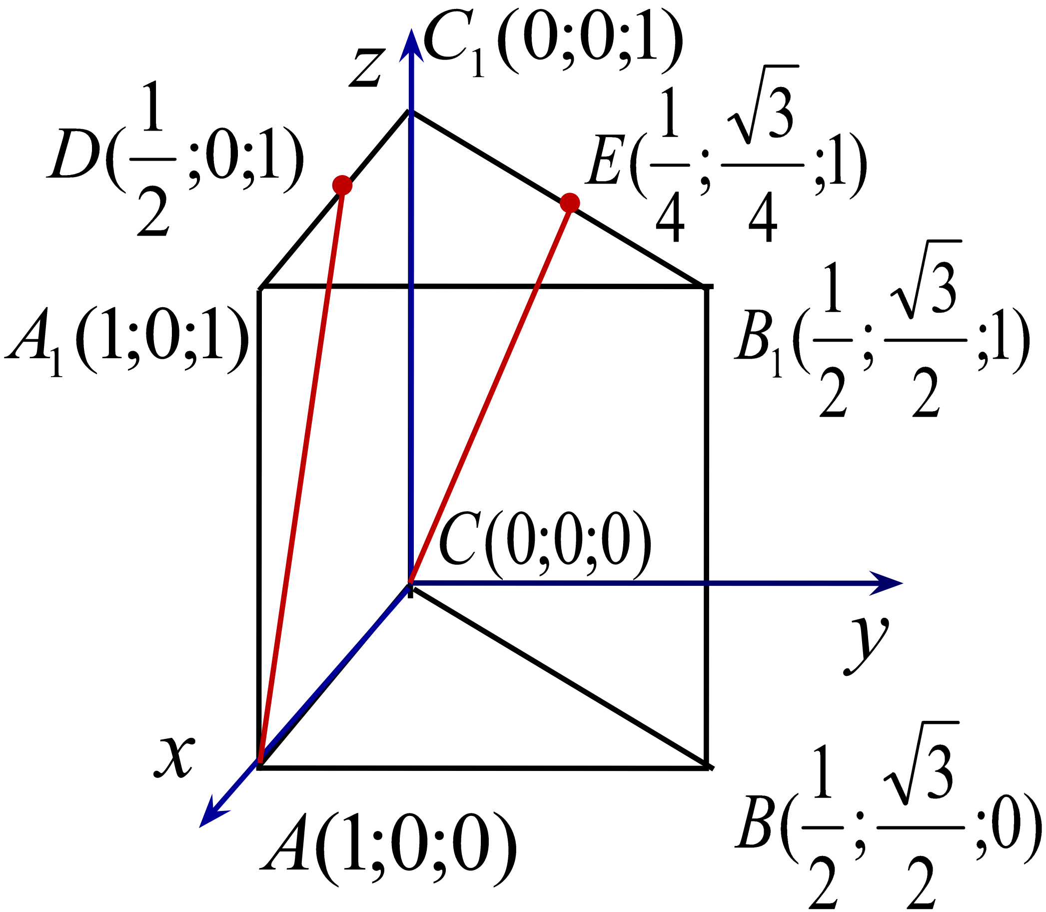
Решение.



Координаты правильной треугольной призмы



Решение.



$$\overrightarrow{AD}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$$

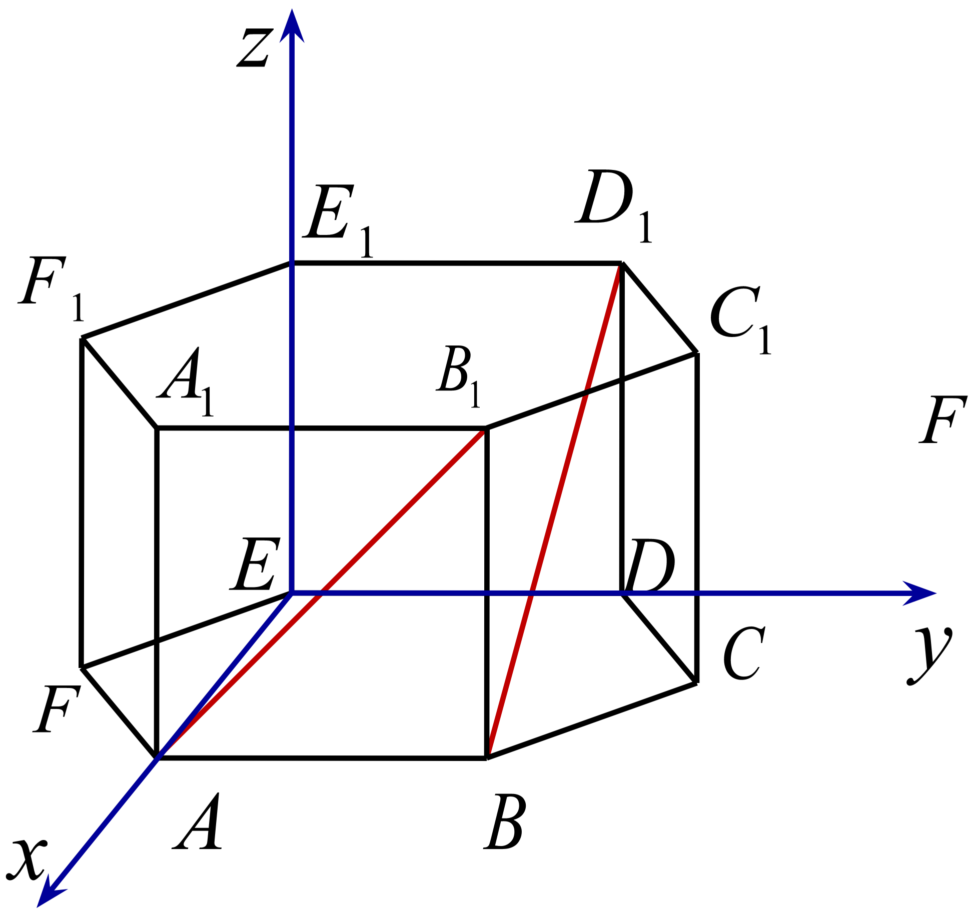
$$\overrightarrow{CE}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$$

$$\overrightarrow{AD}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\} \qquad \overrightarrow{CE}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$$

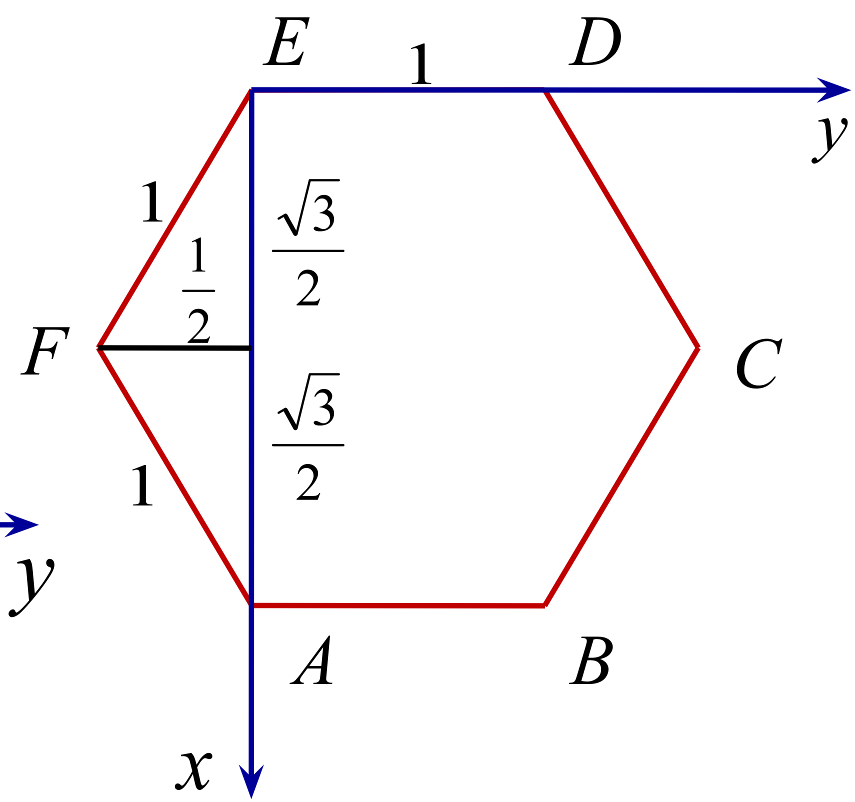
$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = 0{,}7$$

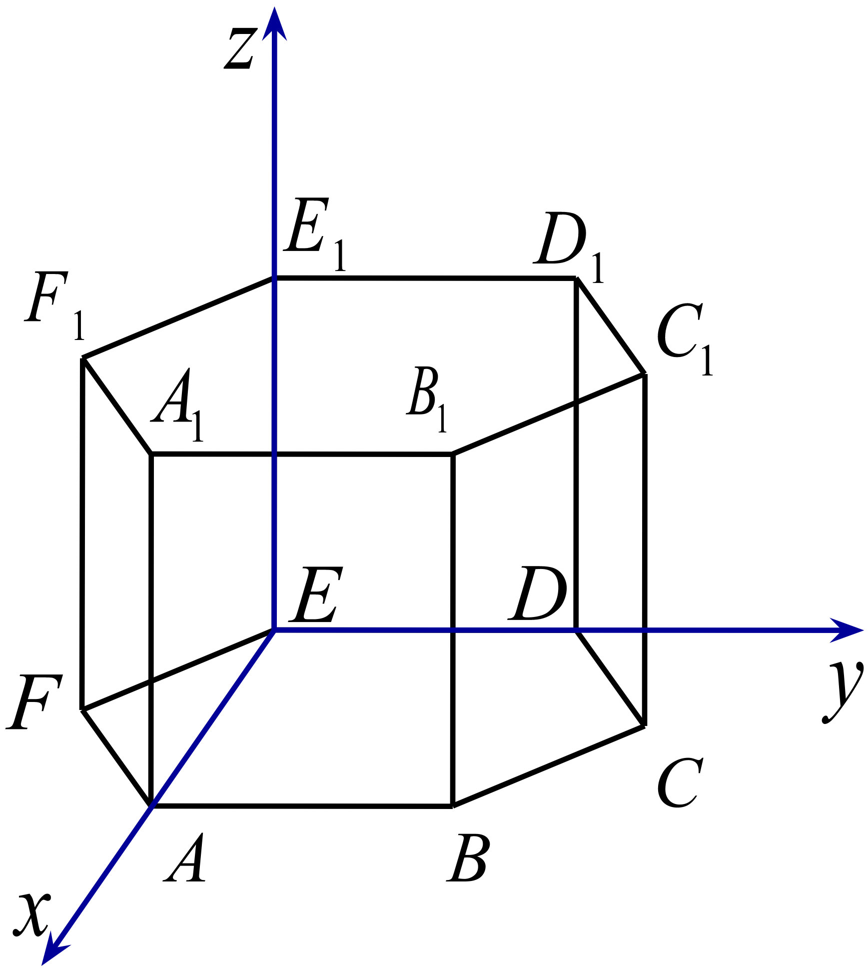
Задача 4. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1



Решение.



Координаты правильной шестиугольной призмы



$E_1(0;0;1)$ $D_1(0;1;1)$

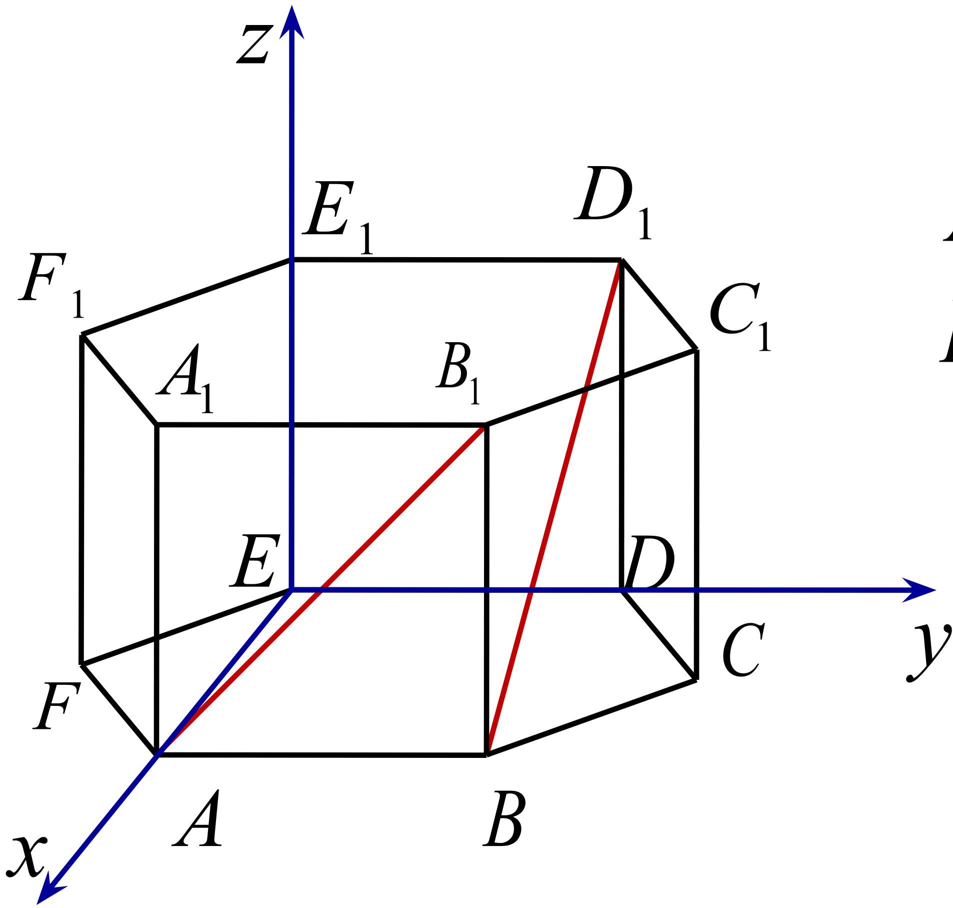
$F_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$ $C_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1)$

$A_1(\sqrt{3};0;1)$ $B_1(\sqrt{3};1;1)$

$E(0;0;0)$ $D(0;1;0)$

$F(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$ $C(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0)$

$A(\sqrt{3};0;0)$ $B(\sqrt{3};1;0)$



Решение.

$A(\sqrt{3};0;0)$ $\quad B_1(\sqrt{3};1;1)$

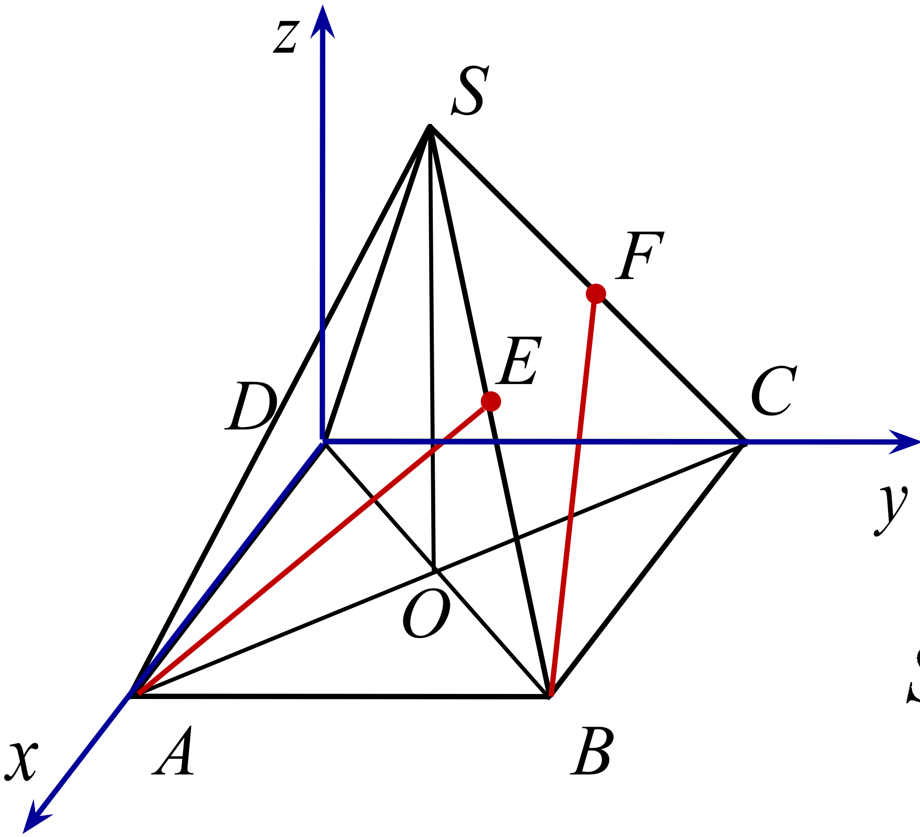
$B(\sqrt{3};1;0)$ $\quad D_1(0;1;1)$

$\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$

$\overrightarrow{BD_1}\{-\sqrt{3};0;1\}$

$$\cos\varphi = \frac{|\,0\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0+1\cdot 1\,|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны *1*, отмечены точки E и F – середины сторон SB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF.



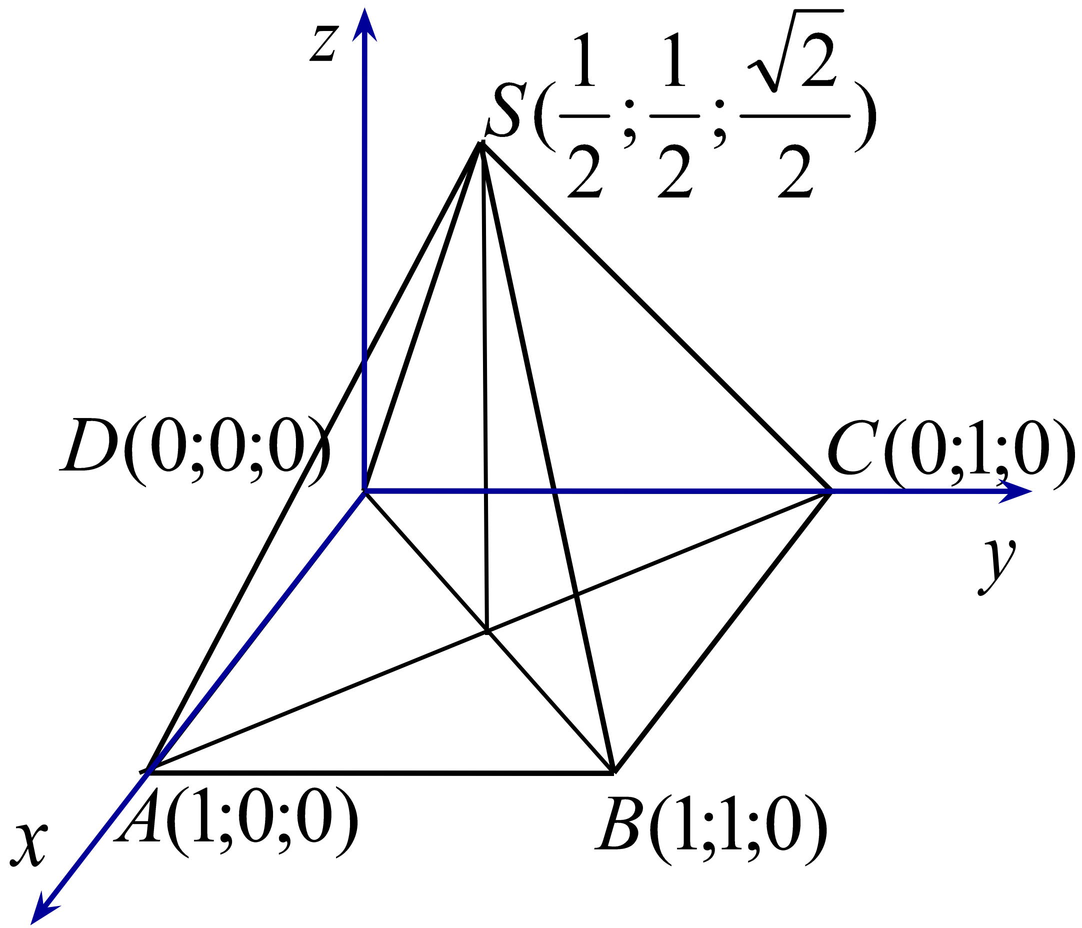
Решение.

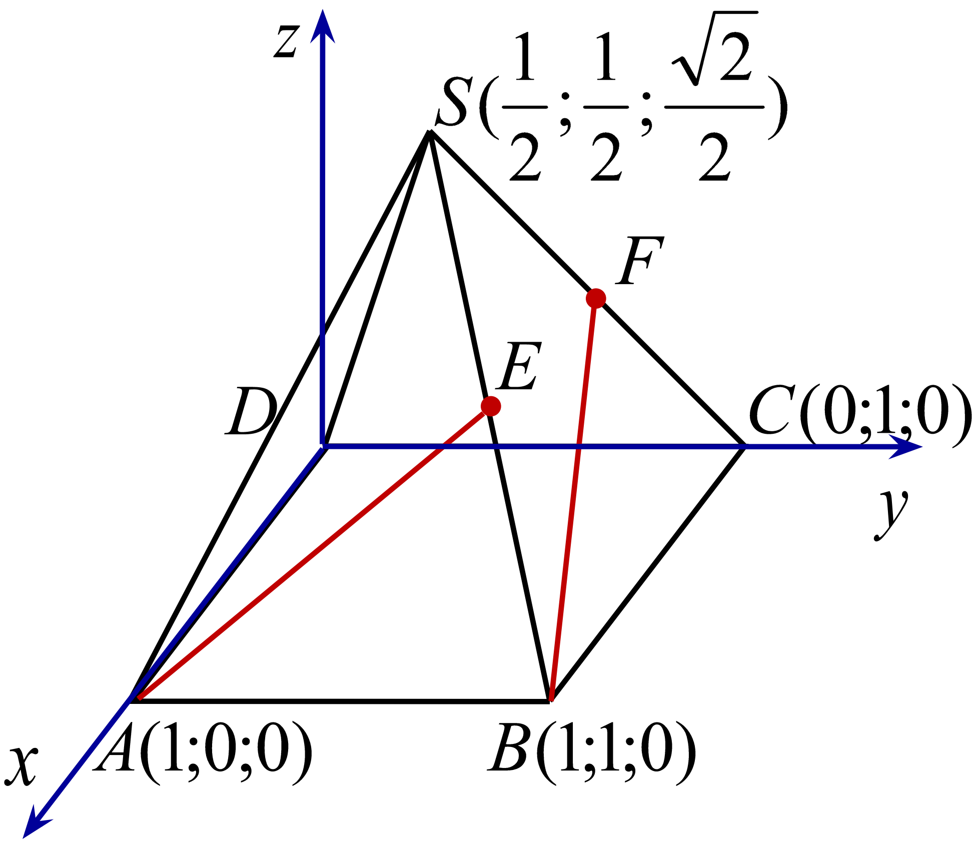
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$SO = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Координаты правильной четырехугольной пирамиды





Решение.

E- середина SB

$$E(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$$

F- середина SC

$$F(\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

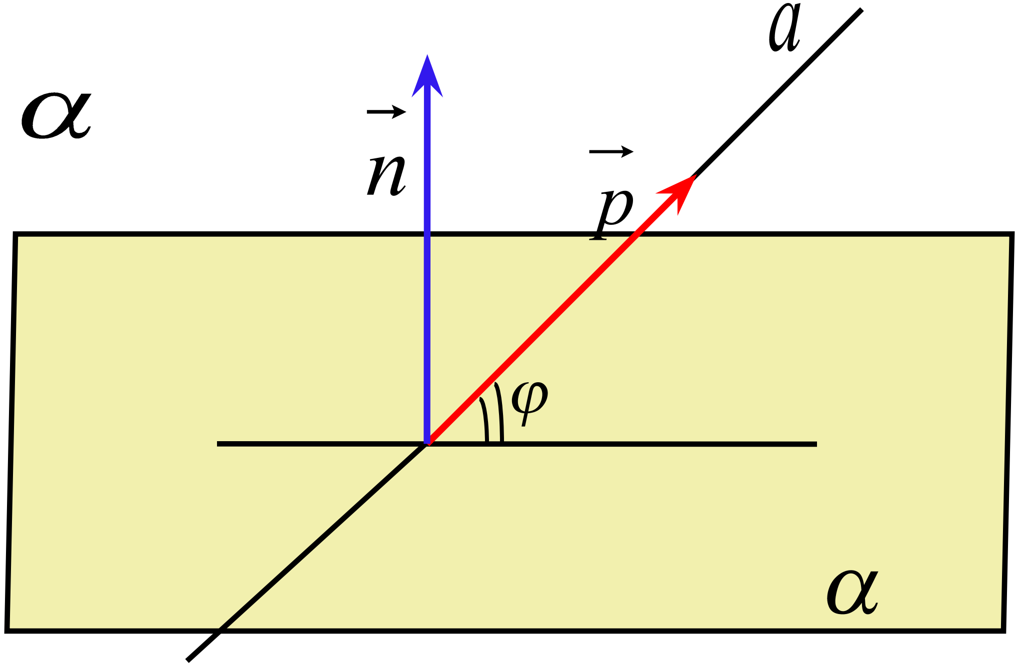
$$\cos\varphi = \frac{1}{6} \qquad \varphi = \arccos\frac{1}{6}$$

Угол между прямой и плоскостью

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ - *направляющий вектор прямой*

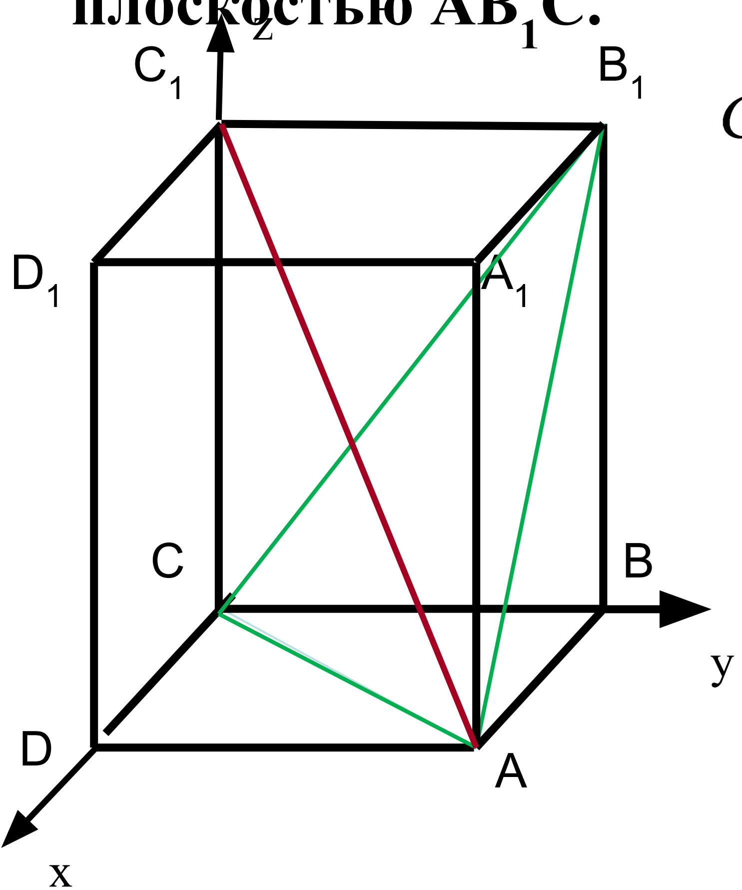
$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ - *нормальный вектор плоскости*

$\vec{n} \perp \alpha$



$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 6. **Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AB = AD = 2, AA_1 = 1)$. Найти угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C.**



$$C(0;0;0),\quad A(2;2;0)\quad C_1(0;0;1)\quad B_1(0;2;1)$$

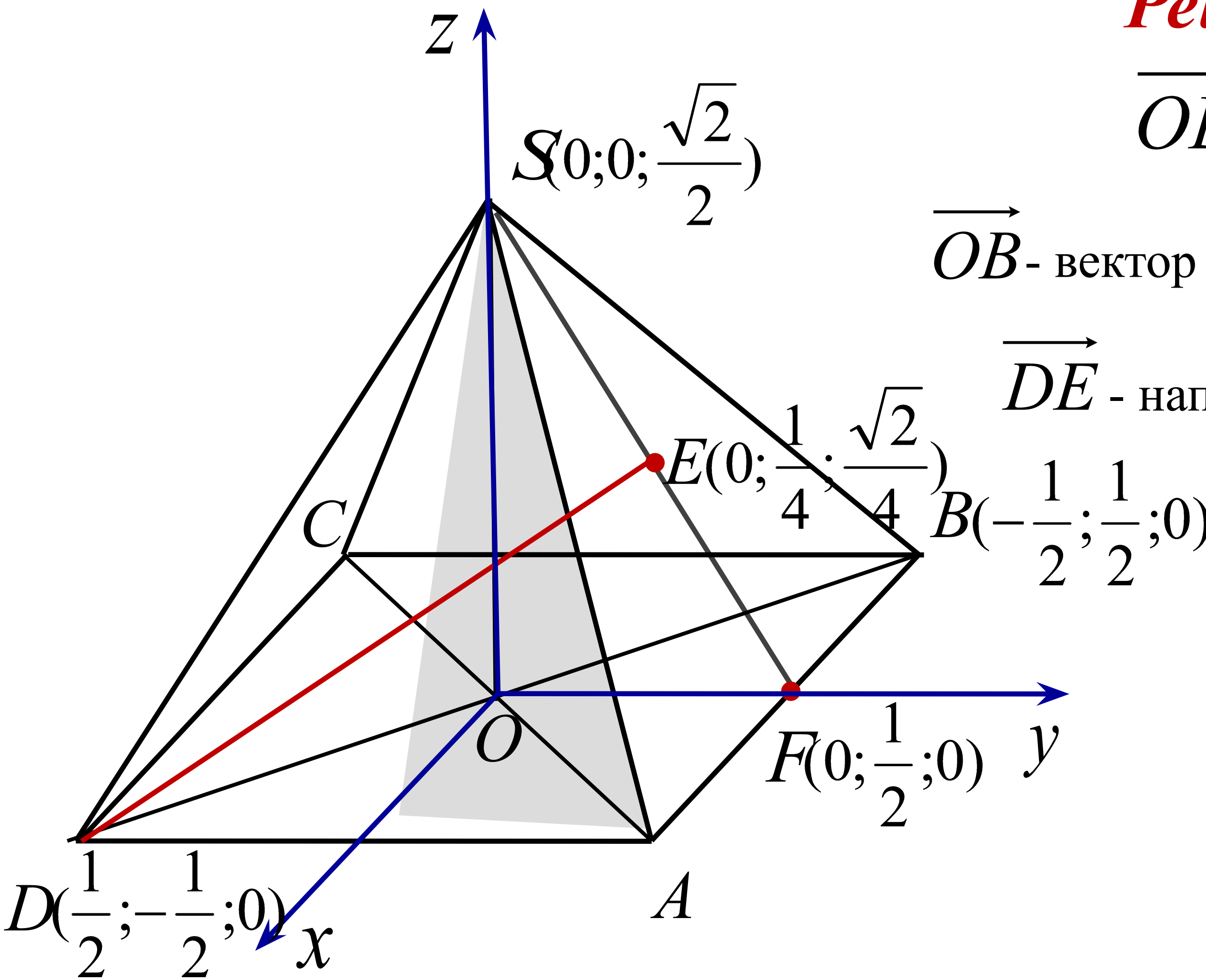
$$x - y + 2z = 0 \quad \vec{n}\{1;-1;2\}$$

$$\sin\angle\left(AC_1;(AB_1C)\right) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{AC_1};\vec{n}\right)\right| =$$

$$= \frac{|-2+2+2|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$

Задача 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны *1*, найдите угол между прямой *DE,* где *E*- середина апофемы *SF* грани *ASB* и плоскостью *ASC*



Решение.

$\overrightarrow{OB} \perp ASC$

$\overrightarrow{OB}$ - вектор нормали плоскости ASC

$\overrightarrow{DE}$ - направляющий вектор прямой

$$\overrightarrow{OB}\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\}$$

$$\overrightarrow{DE}\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

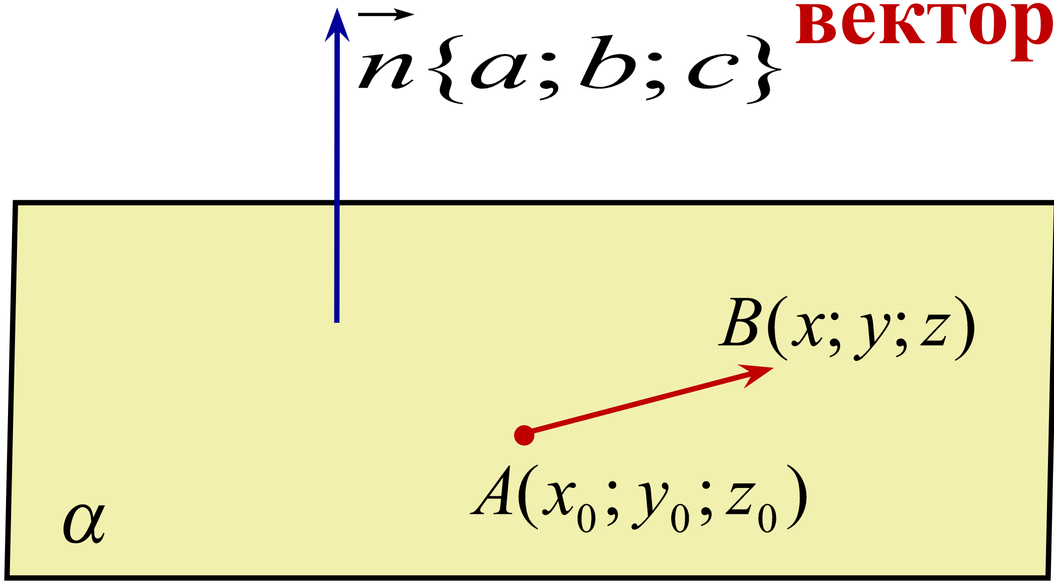
$$\overrightarrow{OB}\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\}$$ - вектор нормали плоскости ASC

$$\overrightarrow{DE}\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$ - направляющий вектор прямой DE

$$\sin\varphi=\frac{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

$$\sin\varphi=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{5}{\sqrt{30}}\qquad \varphi=\arcsin\frac{5}{\sqrt{30}}$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



$A(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$

$\vec{n}\perp\alpha$

$\vec{n}\{a;b;c\}$-нормальный вектор плоскости

$B(x;y;z)\in\alpha$

$\overrightarrow{AB}\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

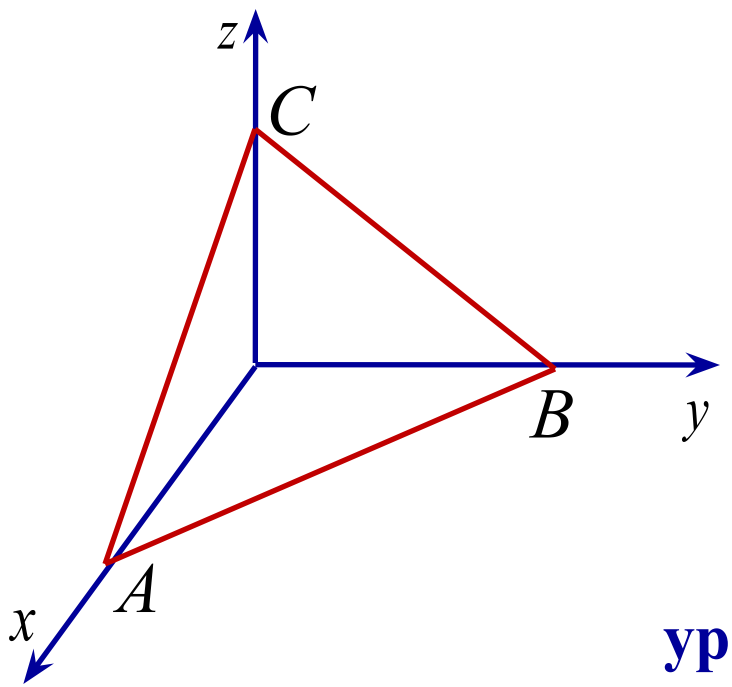
, где $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

Уравнение плоскости

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$, где $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

Если плоскость проходит через начало координат, то ***d=0***



Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

уравнение плоскости в отрезках

Задача 8. **Составить уравнение плоскости, проходящей через точки А(-2;3;5), В(4;-3;0), С(0;6;-5) и найти координаты вектора нормали.**

Решение.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

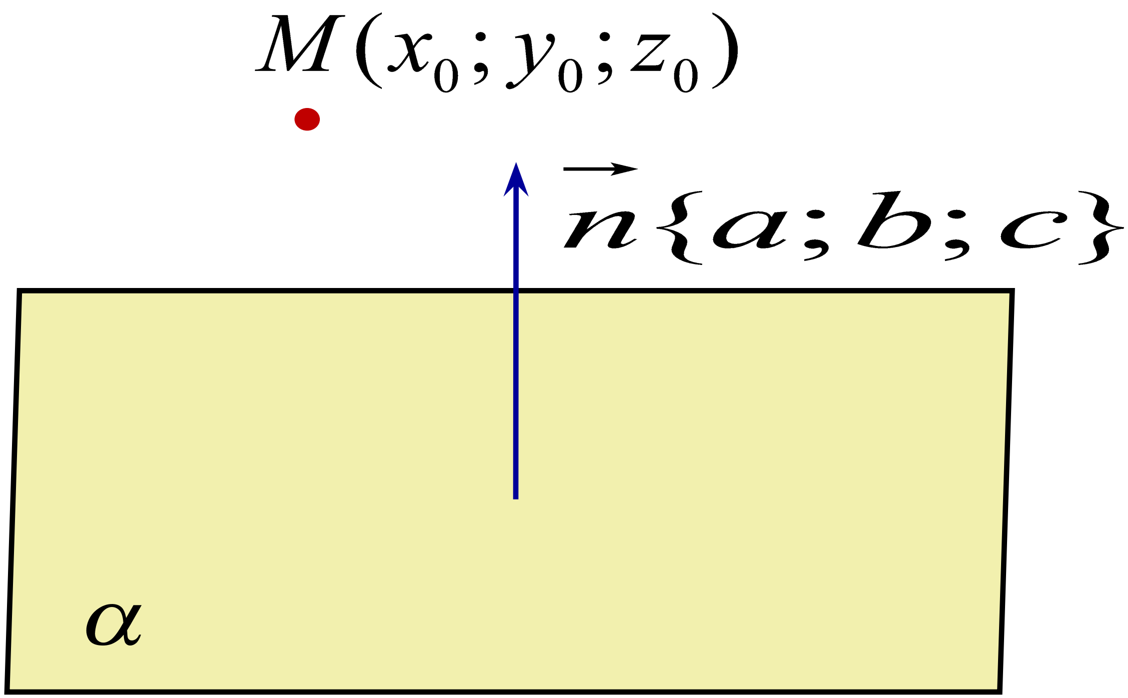
$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

$$\vec{n}\{15;10;6\}$$

Расстояние от точки до плоскости



$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Расстояние между параллельными плоскостями

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

α

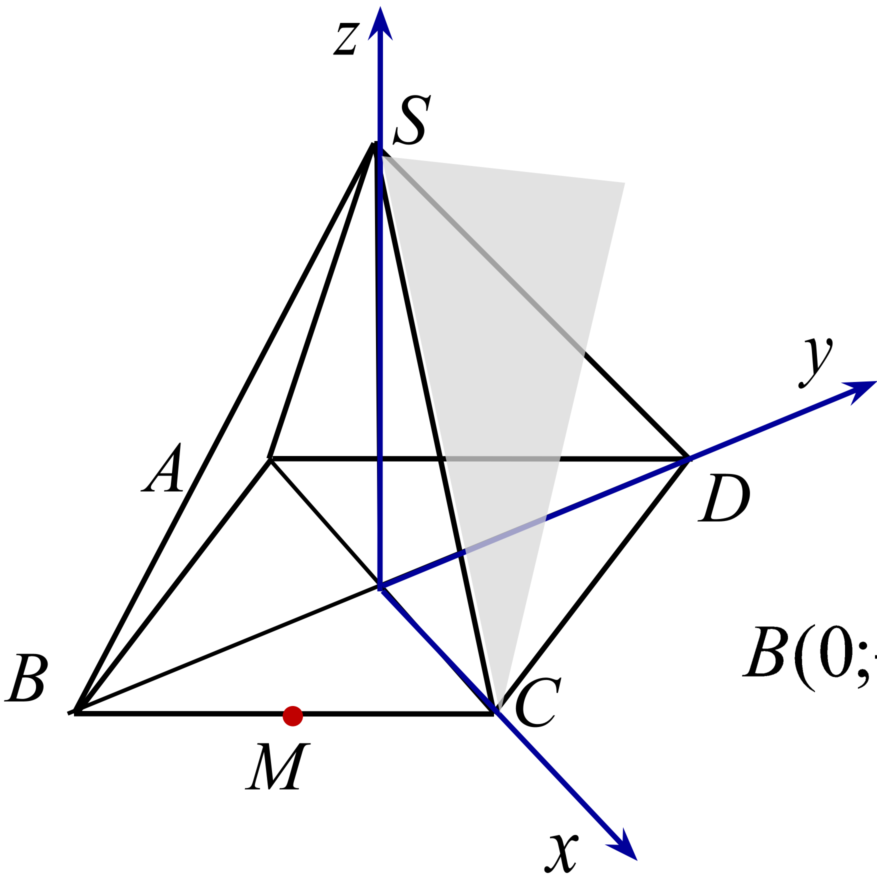
$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

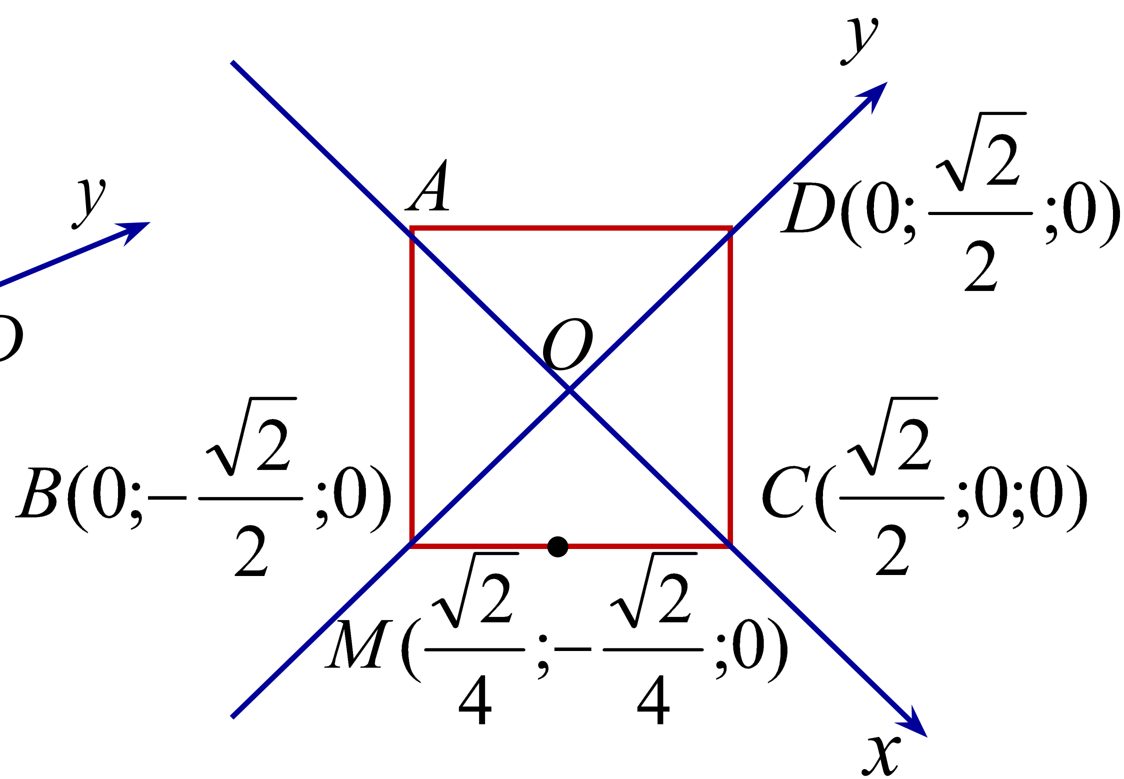
β

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

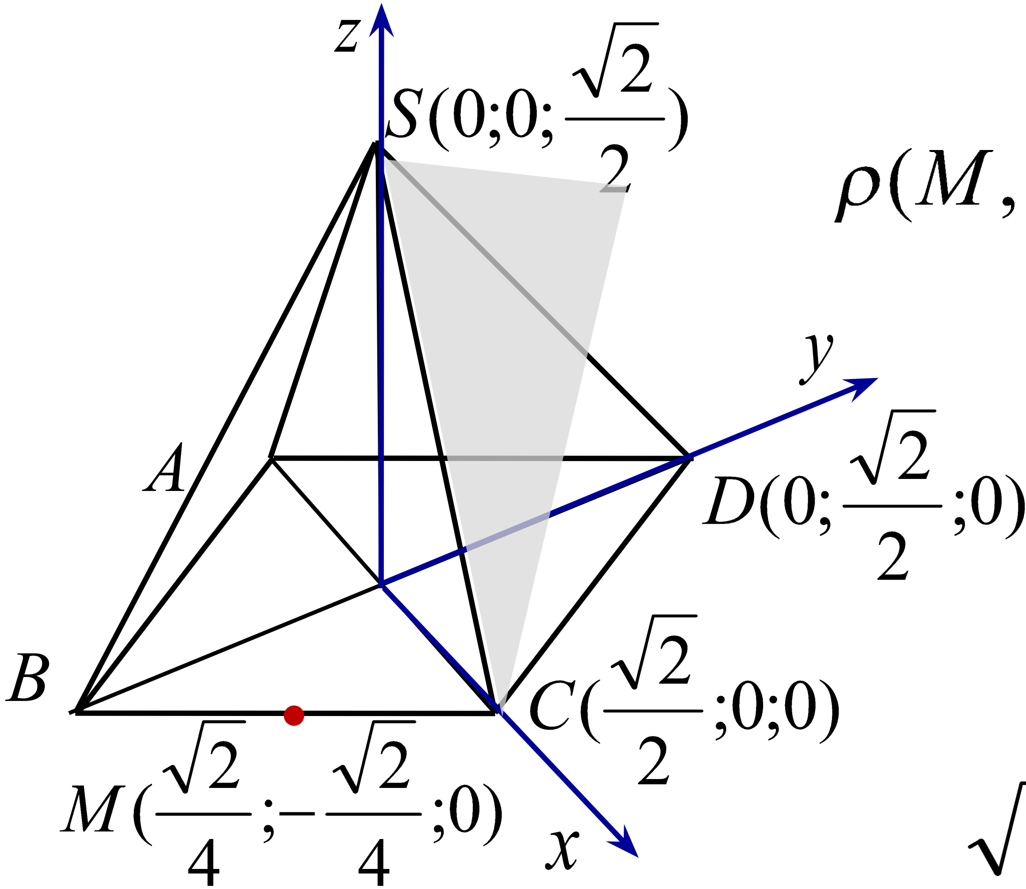
Задача 9. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны *1*, найдите расстояние от середины ребра *BC* до плоскости *SCD*

Решение.





Решение.



$$\rho(M,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}z-1=0$$

$$\rho(M,SCD)=\frac{\left|\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\sqrt{2}\cdot 0-1\right|}{\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Угол между плоскостями

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

Вектор нормали плоскости $\alpha : \overrightarrow{n_1}\{a_1; b_1; c_1\}$

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Вектор нормали плоскости $\beta : \overrightarrow{n_2}\{a_2; b_2; c_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}}$$

Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.

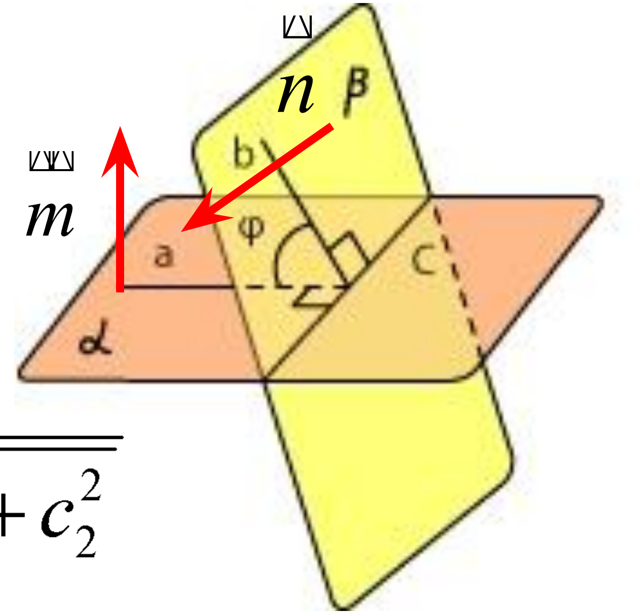
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ – уравнение плоскости α

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ – уравнение плоскости β

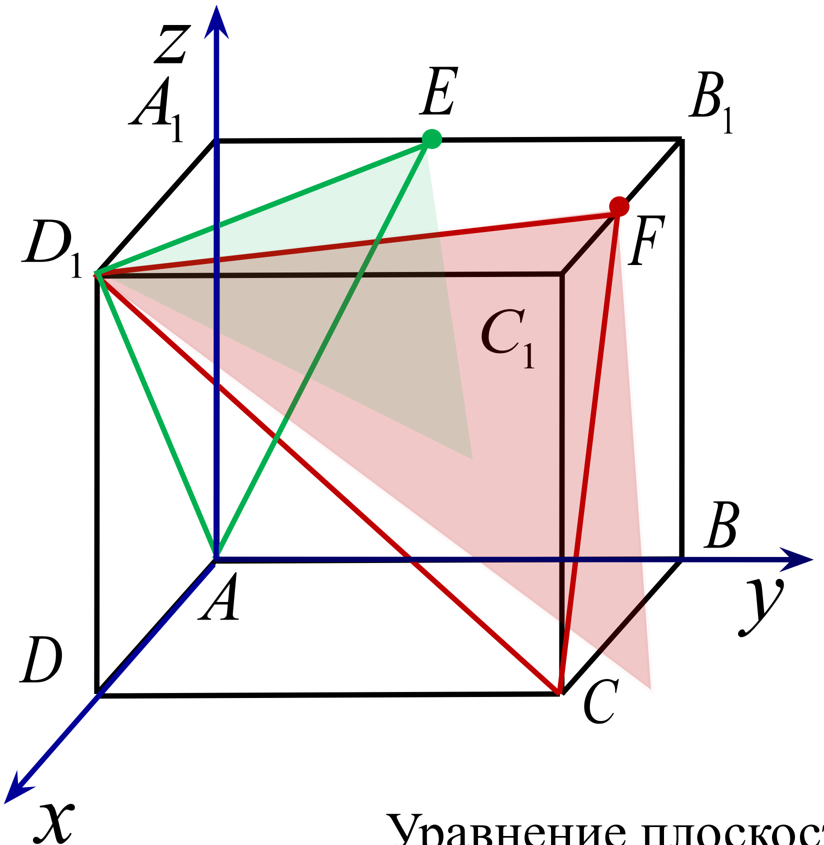
$\vec{m}\{a_1; b_1; c_1\} \perp \alpha$

$\vec{n}\{a_2; b_2; c_2\} \perp \beta$

$$\cos(\vec{m}; \vec{n}) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Задача 10. В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где E – середина ребра A_1B_1, а F – середина ребра B_1C_1



Решение.

$A(0;0;0)$ $D_1(1;0;1)$ $E(0;\frac{1}{2};1)$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}b + c + d = 0 \end{cases}$$

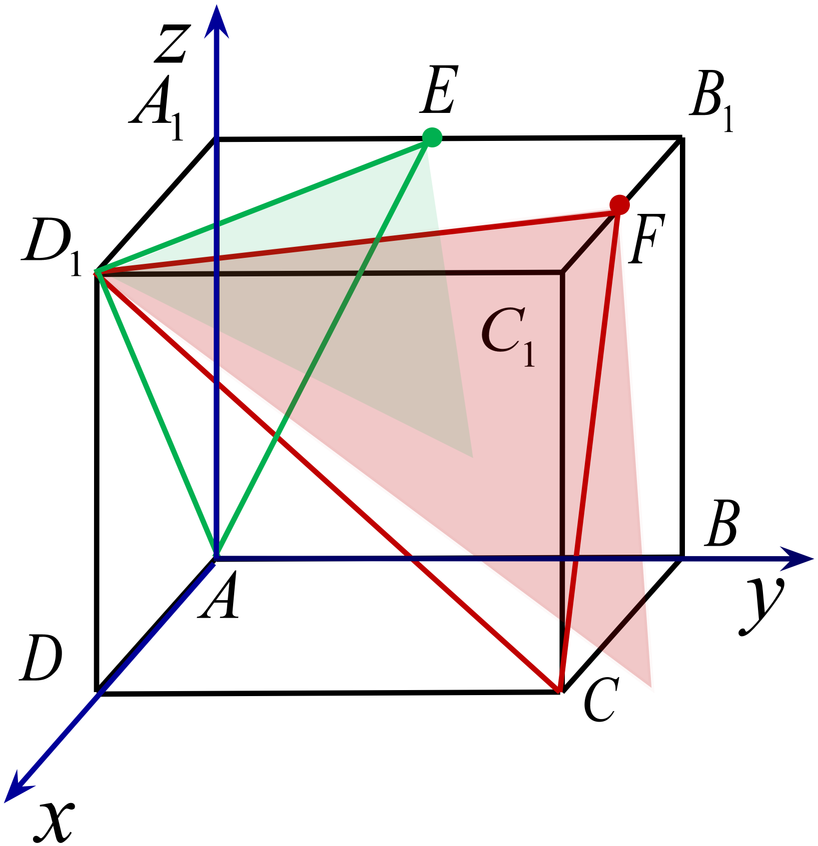
$c = -a$

$b = 2a$

$ax + 2ay - az = 0$

Уравнение плоскости AD_1E: $x + 2y - z = 0$

Вектор нормали плоскости AD_1E: $\overrightarrow{n_1}\{1;2;-1\}$



$$D_1(1;0;1) \qquad F(\frac{1}{2};1;1) \qquad C(1;1;0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

$$a = 2c \qquad b = c \qquad d = -3c$$

$$2cx + cy + cz - 3c = 0$$

Уравнение плоскости $D_1FC: \quad 2x + y + z - 3 = 0$

Вектор нормали плоскости $D_1FC: \quad \overrightarrow{n_2}\{2;1;1\}$

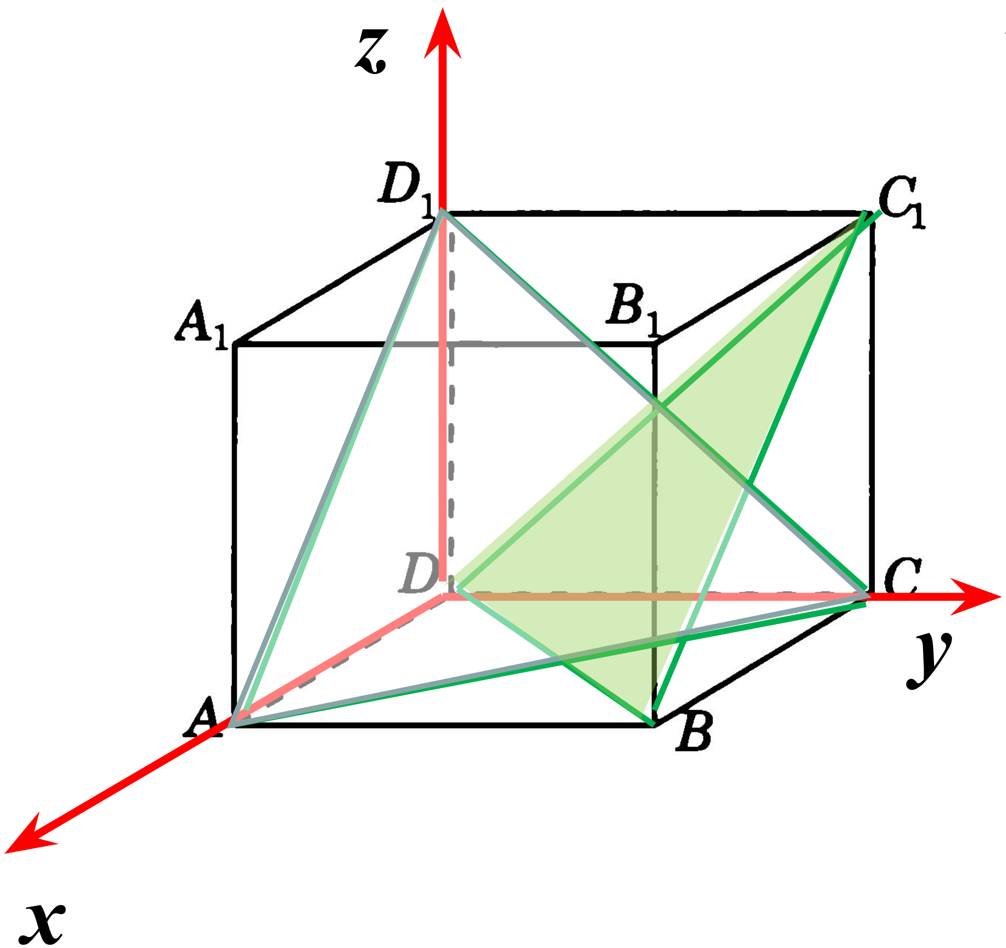
$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + c_1^{\,2}} \cdot \sqrt{a_2^{\,2} + b_2^{\,2} + c_2^{\,2}}}$$

$$\overrightarrow{n_1}\{1;2;-1\} \qquad \overrightarrow{n_2}\{2;1;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Задача 11. В единичном кубе найдите угол между плоскостями (ACD_1) и (BDC_1).



$A\,(1;\,0;\,0)$ $D_1\,(0;\,0;\,1)$

$C\,(0;\,1;\,0)$

$D\,(0;\,0;\,0)$ $C_1\,(0;\,1;\,1)$

$B\,(1;\,1;\,0)$

Запишем уравнения плоскостей (ACD_1) и (BDC_1):

$$ax+by+cz+d=0$$

A (1; 0; 0)

C (0; 1; 0)

D_1 (0; 0; 1)

$$\begin{cases} a+d=0 \\ b+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-d \\ b=-d \\ c=-d \end{cases}$$

$$-dx-dy-dz+d=0$$

$$x+y+z-1=0$$

$$\vec{m}\{1;1;1\} \perp (ACD_1)$$

D (0; 0; 0)

B (1; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=0 \\ a=-b \\ c=-b \end{cases}$$

$$-bx+by-bz=0$$

$$x-y+z=0$$

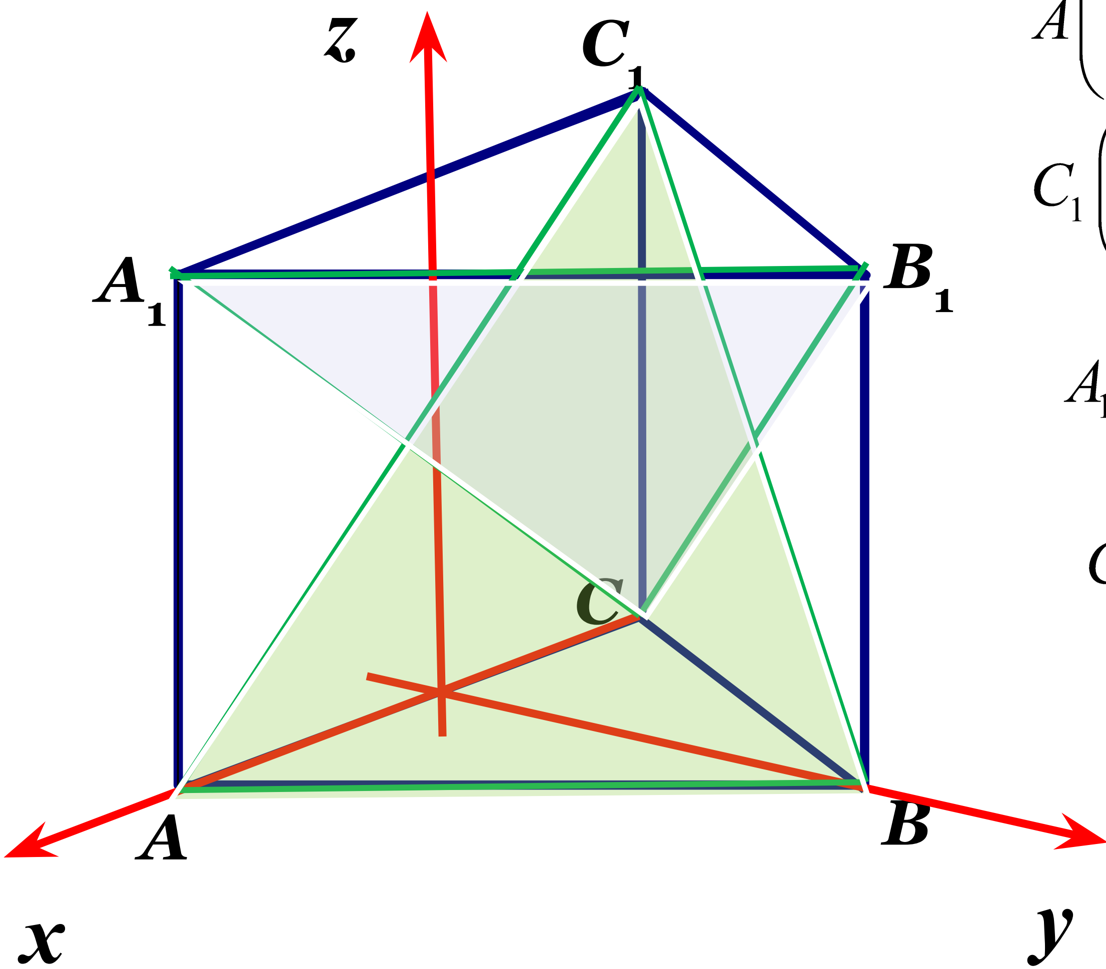
$$\vec{n}\{1;-1;1\} \perp (DBC_1)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{m};\vec{n}}\right)=\frac{|1\cdot1-1\cdot1+1\cdot1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\angle\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\arccos\frac{1}{3}$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$

Задача 12. В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями (ABC_1) и (A_1B_1C).



$A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ $B\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C_1\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$

$A_1\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ $B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

$C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$

Запишем уравнения плоскостей (ABC_1) и (A_1B_1C):

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right) \quad B\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \quad C_1\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + d = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\ -\frac{1}{2}a + c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2d \\ b = -\frac{2}{\sqrt{3}}d \\ c = -2d \end{cases}$$

$$-2dx - \frac{2}{\sqrt{3}}dy - 2dz + d = 0$$

$$2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y + 2z - 1 = 0$$

$$\vec{m}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};2\right\} \perp \left(ABC_1\right)$$

$$A_1\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \quad C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + c + d = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b + c + d = 0 \\ -\frac{1}{2}a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2d \\ b = \frac{2}{\sqrt{3}}d \\ c = -2d \end{cases}$$

$$2dx + \frac{2}{\sqrt{3}}dy - 2dz + d = 0$$

$$2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y - 2z + 1 = 0$$

$$\vec{n}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right\} \perp \left(A_1B_1C\right)$$

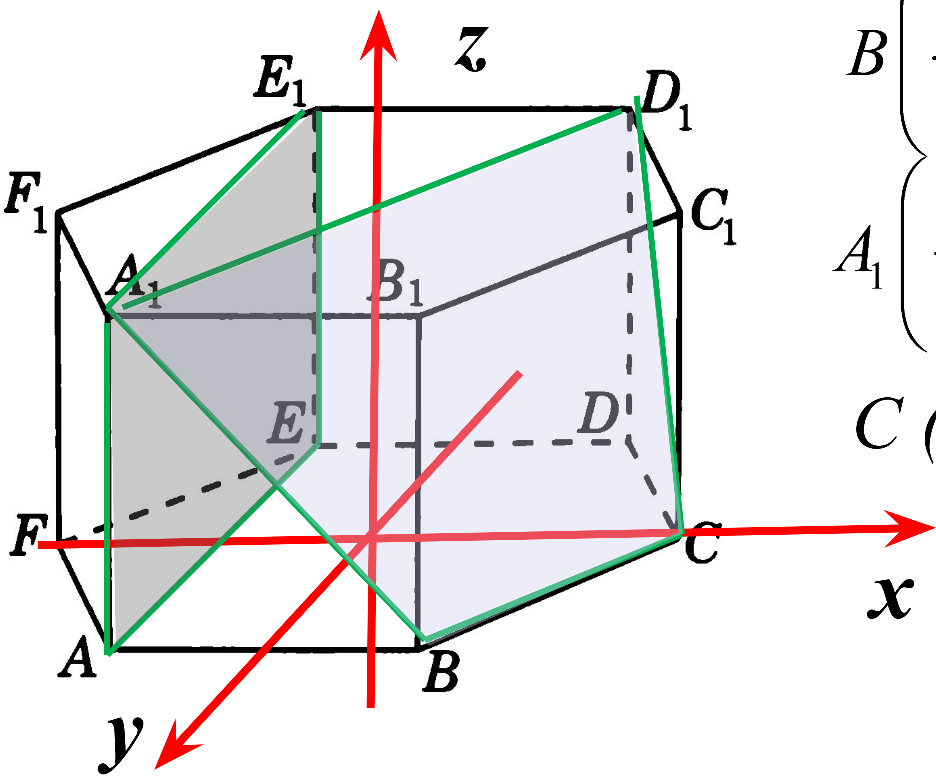
$$\vec{m}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};2\right\} \qquad \vec{n}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right\}$$

$$\cos\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\frac{\left|2\cdot 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-2\cdot 2\right|}{\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+2^2}\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{7}$$

$$\angle\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\arccos\frac{1}{7}$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{7}$

Задача 13. **В правильной шестиугольной призме ребро основания равно 1, а боковое ребро – 2. Найдите угол между плоскостями (BA_1D_1) и (AA_1E_1).**



$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$ $E\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C\ (1;\ 0;0)$

Запишем уравнения плоскостей (A_1BC) и (AA_1E):

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$$

$$C\ (1;\ 0;0)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + 2c + d = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -\frac{1}{\sqrt{3}}d \\ c = -\frac{1}{2}d \end{cases}$$

$$-dx - \frac{1}{\sqrt{3}}dy - \frac{1}{2}dz + d = 0$$

$$x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$$

$$\vec{m}\left\{1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right\} \perp \left(A_1BC\right)$$

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$$

$$E\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \\ -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+2c+d=0 \\ -\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2d \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$2dx+0\cdot y+0\cdot z+d=0$$

$$2x+0\cdot y+0\cdot z+1=0$$

$$\vec{n}\{2;0;0\}\perp\left(A_1AE\right)$$

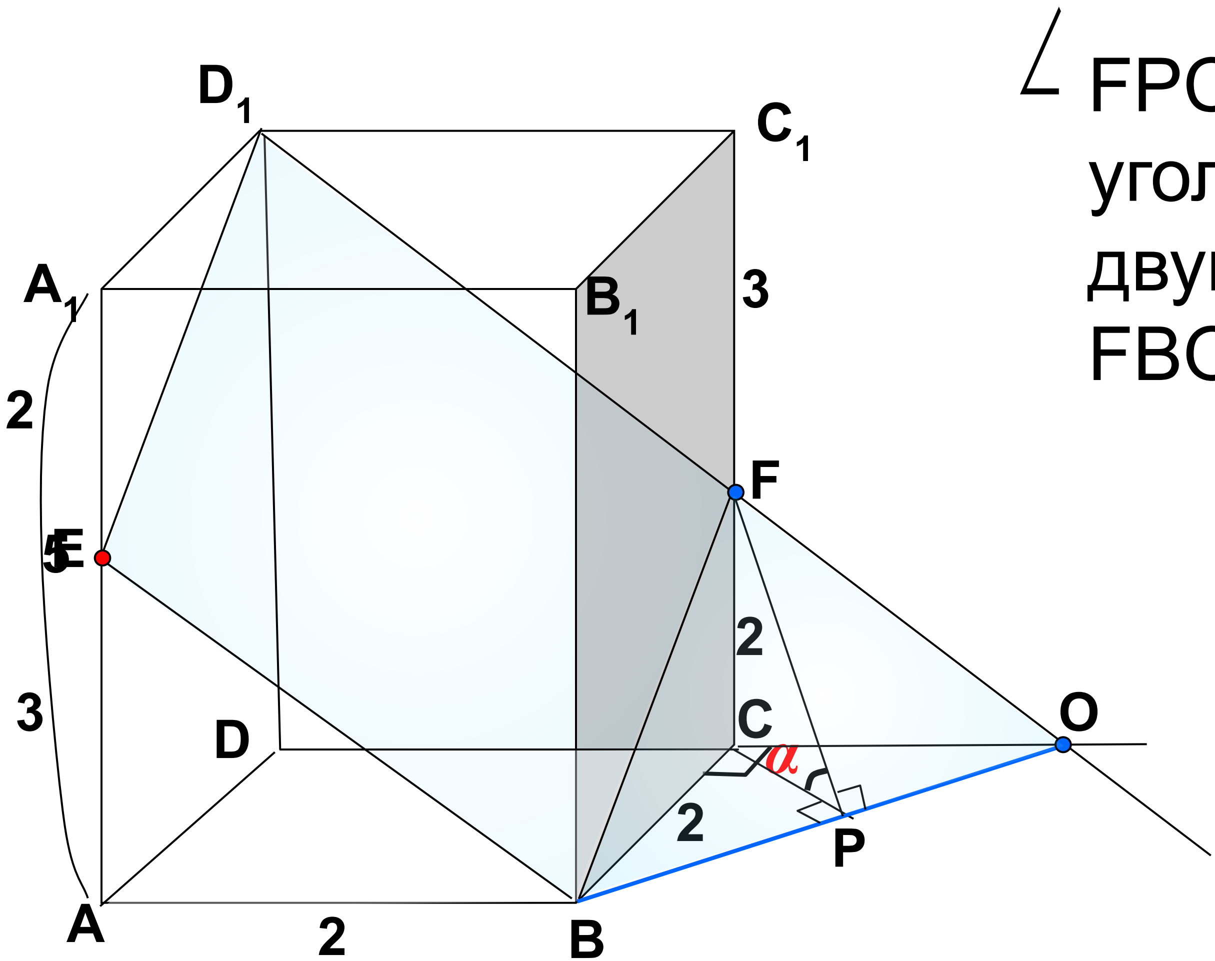
$$\vec{m}\left\{1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right\} \qquad \vec{n}\{2;0;0\}$$

$$\cos\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\frac{\left|1\cdot 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+0^2}}=\sqrt{\frac{12}{19}}$$

$$\angle\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$$

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$

Задача 14. **В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1. (Обсудить нахождение линейного угла двугранного угла).**



$\angle$ FPC – линейный угол двугранного угла FBOC

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

2 способ.

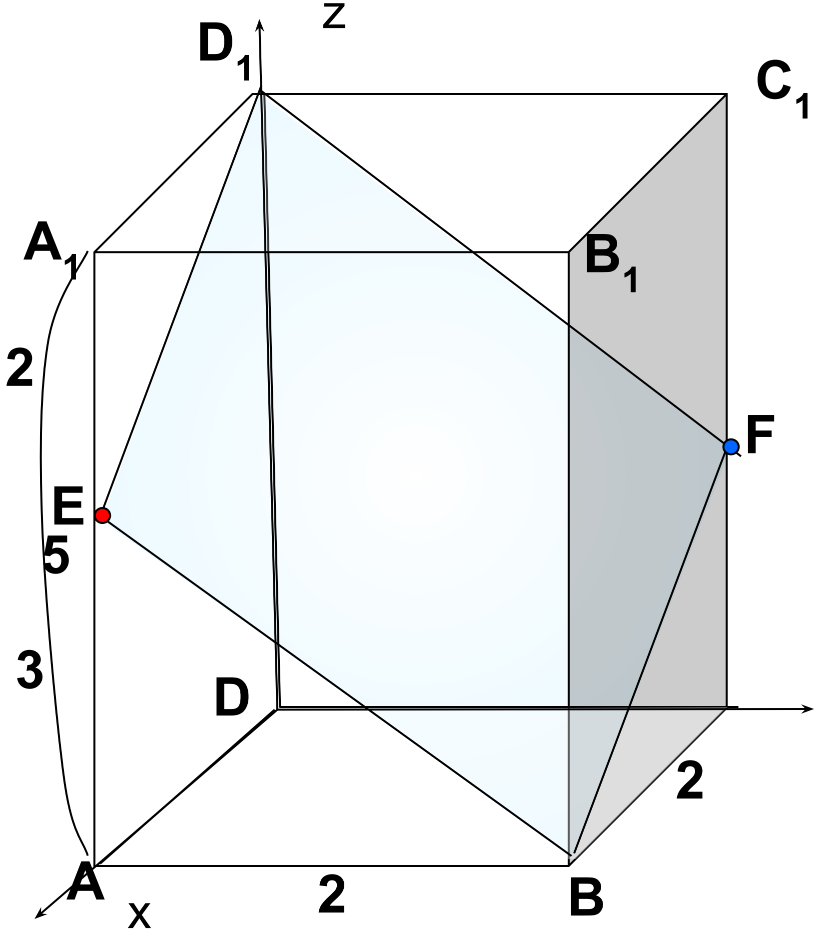
$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

Вектор нормали плоскости $\vec{n_1}\{a_1; b_1; c_1\}$

Вектор нормали плоскости $\vec{n_2}\{a_2; b_2; c_2\}$

$\alpha :$

$\beta :$



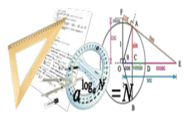
E(2;0;3), B(2;2;0), D_1 (0;0;5). $\overrightarrow{DD_1}\{0; 0; 5\}$,

$$\begin{cases} 2a+3c+d=0 \\ 5c+d=0 \\ 2a+2b+d=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=c \\ d=-5c \\ b=1,5c \end{matrix} \qquad 2x+3y+2z-10=0$$

$\vec{n} \perp (BED_1)$ $\quad \vec{n}\{2;3;2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot 2 + 0\cdot 3 + 5\cdot 2|}{\sqrt{0^2+0^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

Использование ИКТ при подготовке к ЕГЭ.

Название сайта	Материалы сайта	Электронный адрес
РЕШУ ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам МАТЕМАТИКА 	Все задачи открытого банка заданий ЕГЭ по математике 2013 года с образцами решений.	http://reshuege.ru/
ALEXLARIN.NET	Материалы прошлых лет. Диагностические и тренировочные работы.	http://alexlarin.net/
AB Alleng	Учебные материалы (книги, учебники, пособия, справочники и т.п.) размещенные на самом сайте.	http://www.alleng.ru
Открытый банк заданий ЕГЭ по математике	Задания, тренировочные работы, документы	http://mathege.ru
МИФИст	Решённые задачи открытого банка	http://live.mephist.ru/show/mathege2010/
Федеральный институт педагогических измерений	Документы, КИМы	http://www.fipi.ru/
Официальный информационный портал ЕГЭ	Документы, новости, мероприятия	http://ege.edu.ru/