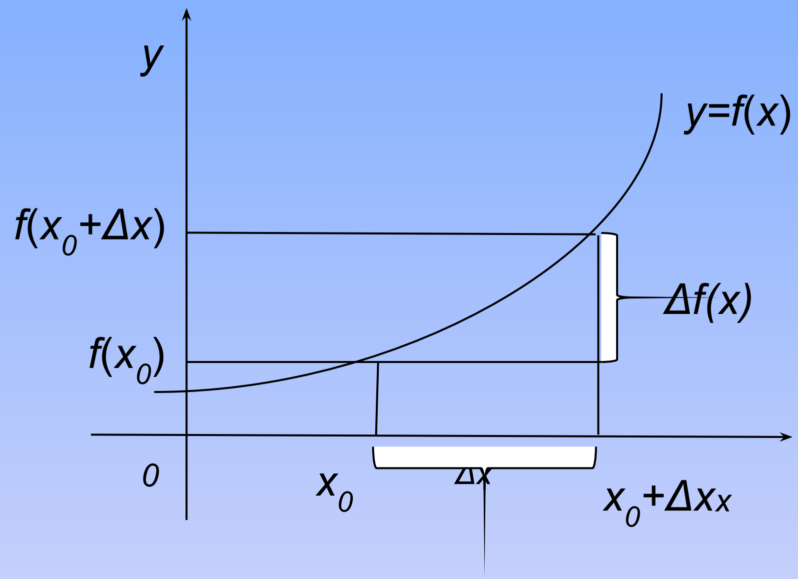
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 1.2

Похідна функції



Графічне зображення приросту функції і приросту аргументу.

Похідною від функції *y=f(x)* по аргументу *x* називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

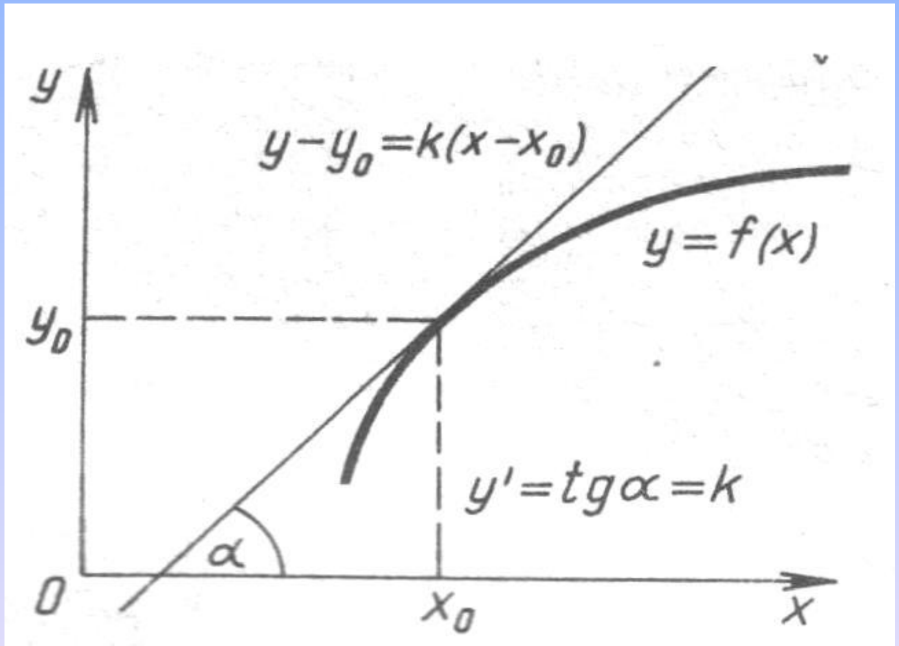
Алгоритм знаходження похідної

1) $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Геометрична інтерпретація похідної функції в точці



$$f'(x_0)=k=tg\alpha$$

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

- Геометричний зміст похідної полягає у тому, що значення похідної функції *y=f(x)* у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції у точці з абсцисою x_0.

Фізичний зміст похідної функції

$$y = f(x) = S(t)$$

$$S'(t_0) = \upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$ - ***миттєва швидкість***

$$S''(t_0) = \upsilon'(t_0) = a(t_0)$$ - ***прискорення***

- ***Миттєва швидкість*** прямолінійного руху дорівнює похідній шляху за часом руху
- Похідна від швидкості по часу(або друга похідна від шляху) є ***прискоренням***

Правила диференціювання

$(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$ - похідна алгебраїчної суми функції;

$(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + \upsilon' \cdot u$ - похідна добутку функції;

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u' \cdot \upsilon - \upsilon' \cdot u}{\upsilon^2}$$

- похідна від частки функцій.

Таблиця знаходження похідних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$, де C – стала величина;
2. $(C \cdot f(x))' = C \cdot (f(x))'$;
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
4. $(x)' = 1$;
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
7. $(a^x)' = a^x \ln a$;
8. $(e^x)' = e^x$;
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

Таблиця знаходження похідних елементарних функцій

10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
11. $(\sin x)' = \cos x$;
12. $(\cos x)' = -\sin x$;
13. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
14. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
17. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
18. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклади визначення похідної функції

№1

$$(y)' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$$

№2

$$(y)' = (\sqrt{x} \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$$

№3

$$(y)' = (\frac{x}{\cos x})' = \frac{(x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{1 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

Диференціювання складених функцій

Функція називається *складеною*, якщо її аргумент, у свою чергу, є функцією. Цей аргумент називається *проміжним аргументом*.

Наприклад, $y = \sin^2 x$, де $u(x) = \sin x$ - проміжний аргумент.

Складену функцію можна представити у вигляді:

$$y = f(u(x)),$$

де $u(x)$ - проміжний аргумент.

Похідна складеної функції дорівнює добутку похідної функції по проміжному аргументу на похідну проміжного аргументу:

$$(y)'_x = [f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Диференціювання складених функцій

$y = \sin 2x, \quad y = \sin u(x), \; u(x) = 2x,$ - складена функція

$y = f(u(x))$ - загальний вигляд складеної функції, де

$u(x)$ - проміжний аргумент

Похідна складеної функції

$$(y)'_x = \left[f(u(x)) \right]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Таблиця похідних складених функцій

1. $(u^n)'_x = n \cdot u^{n-1} \cdot u'_x$;
2. $(\sqrt{u})'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'_x$;
3. $\left(\frac{1}{u}\right)'_x = -\frac{1}{u^2} u'_x$;
4. $(a^u)'_x = a^u \ln a \cdot u'_x$;
5. $(e^u)'_x = e^u \cdot u'_x$;
6. $(\log_a u)'_x = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x$;
7. $(\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x$;
8. $(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$;

Таблиця похідних складених функцій

9. $(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$;

10. $(tgu)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$;

11. $(ctgu)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$;

12. $(\arcsin u)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$;

13. $(\arccos u)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$;

14. $(arctgu)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$;

15. $(arcctgu)'_x = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$.

Приклади знаходження похідних складених функцій

№1

$$(\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot (4x)' = -4\sin 4x$$

№2

$$(\cos^3 4x)' = 3\cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = -12\cos^2 4x \cdot \sin 4x$$

Функція багатьох змінних

$$S = ab$$

- площа прямокутника: (де ***a*** і ***b***- довжини сторін),

$$V = abc$$

- об'єм паралелепіпеда: (де ***a*** і ***b*** - довжини сторін основи, а ***c*** - висота).

$$S = S(a, b)$$

$$V = V(a, b, c)$$

- Дані формули задають функції двох і трьох змінних

$$z = f(x, y)$$

- Функція двох змінних, представлена у загальному вигляді

Частинні похідні функції багатьох змінних

- *Частинна похідна першого порядку* функції по аргументу ***x***:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x$$

- *Частинна похідна першого порядку* функції по аргументу ***y***:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y$$

Приклад знаходження частинних похідних

Знайти частинні похідні функції по ***x*** і по ***y***

$$z(x, y) = x^2 + 4y^3$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 4y^3)'_x = (x^2)'_x + (4y^3)'_x = 2x + 0 = 2x$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + 4y^3)'_y = (x^2)'_y + (4y^3)'_y = 0 + 12y^2 = 12y^2$$

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

$$df = f'(x) \cdot dx$$

- Диференціал функції однієї змінної

$$df = d_x f + d_y f \quad , або$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

- Повний диференціал функції двох змінних

Приклади знаходження диференціала функції

- Знайти диференціал функції

$$y = \ln 4x \;\; \text{при} \;\; x = 1, \;\; \Delta x = 0{,}1$$

Рішення :

$$dy = (\ln 4x)' \cdot dx = \frac{(4x)'}{4x} \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{4}{4x} \Delta x = \frac{1}{x} \cdot \Delta x = \frac{1}{1} \cdot 0{,}1 = 0{,}1$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!