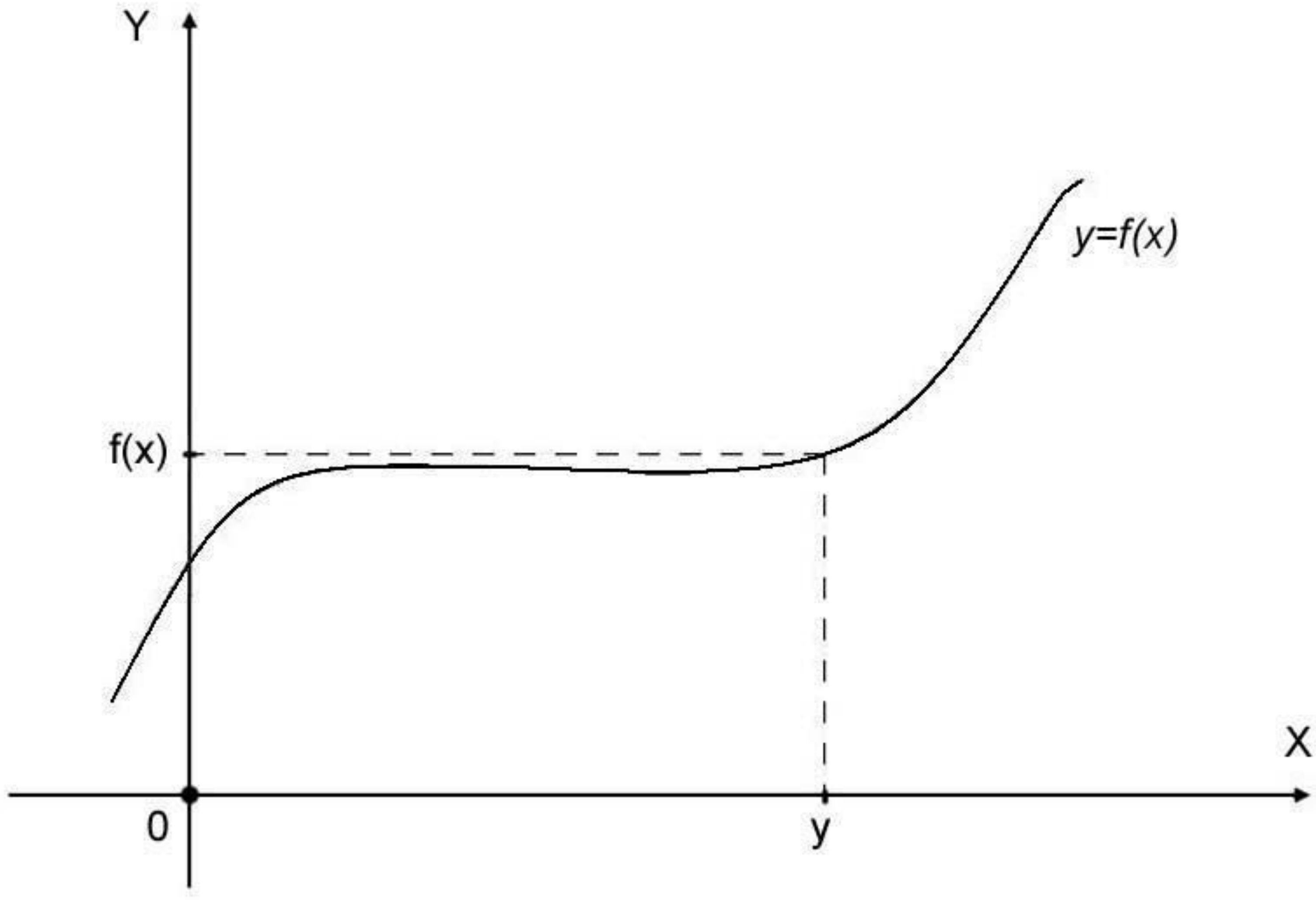
# Лекція 4. Вступ до математичного аналізу

1. Функції
2. Послідовності та їх границі
3. Границі функцій

# 1. Функції

Коли кожному елементу х множини $X$ $(x \in X)$ ставиться у відповідність визначений елемент $y$ множини $Y$ $(y \in Y)$, то кажуть, що на множині Х задано **функцію** $Y=f(x)$.

# Графічна інтерпретація функціональної залежності (графік функції)



1. x – незалежна змінна (аргумент);
2. X – множина визначення (існування) функції, позначається D(y);
3. y – залежна змінна;
4. Y – область значень функції;
5. f – символ функціональної залежності.

Функція може задаватися наступними способами:

- **таблично** (задається таблиця, в якій значенням x відповідають значення y);

**Приклад.** При вивченні залежності об’ємів продаж протягом дня прохолоджувальних напоїв V торгівельною точкою (у літрах) від температури повітря t (у градусах Цельсія) отримали наступні результати:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | 18 | 19 | 22 | 24 | 28 |
| V | 150 | 160 | 280 | 450 | 600 |

Маємо, таким чином, таблично задану функцію V(t).

Функція може задаватися наступними способами:

- **словесно** (наприклад, функція Діріхлє: f(x)=1, якщо x – раціональне число, f(x)=0, якщо x – ірраціональне);
- **графічно** (на координатній площині зображується лінія, для кожної точки якої ордината вважається значенням функції, яке відповідає значенню абсциси);
- **аналітично (якщо значення функції знаходиться з рівності або рівностей, які пов'язують x та y):**

$$y=x,\ y=\sin x$$

Можливі наступні варіанти аналітичного задання функції:

а) **явне задавання** функції співвідношенням $y=f(x)$;

б) **неявне задавання функції** співвідношенням $f(x,y)=0$, $y(x)$ знаходиться як корінь рівняння $f(x_1,y(x_1))=0$ для всіх $x_1$ з області визначення;

- в) **параметричне задавання** функції системою співвідношень:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}}$$

де t – параметр, у вважається значенням функції, що відповідає х. Вона задає параметрично залежність у від х.

Приклад. Дана функція може

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^4 + 2t^2 \end{cases}$$ и задана явно:

$$y = x^2 - 1$$

# Властивості функцій

**1. Парність та непарність.**

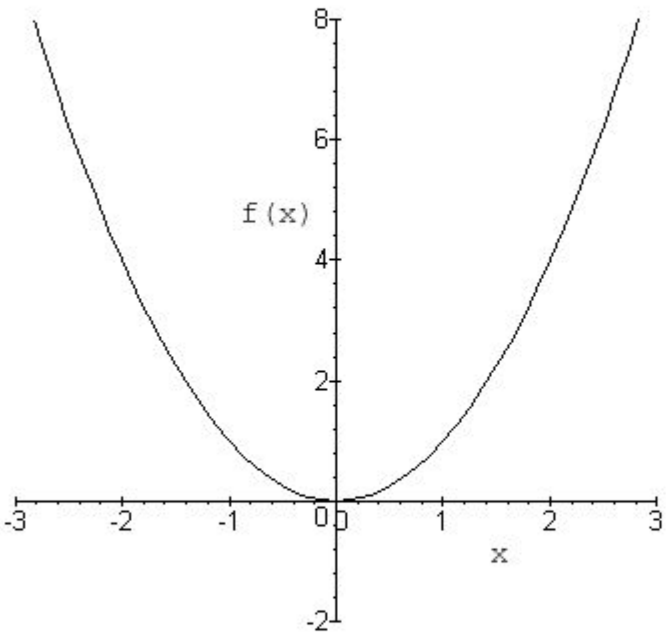
**Парною** називається функція *y=f(x),* така що для $\forall x \in D(x)$, число *(-x)* також належить *D(x)* і ***f(x)=f(-x)****, і*, відповідно, **непарною***,* якщо для $\forall x \in D(x)$, $(-x) \in D(x)$, проте ***f(-x)=-f(x)***. Функція, яка не є а ні парною а ні непарною називається функцією **загального вигляду** (або загального положення)*.*

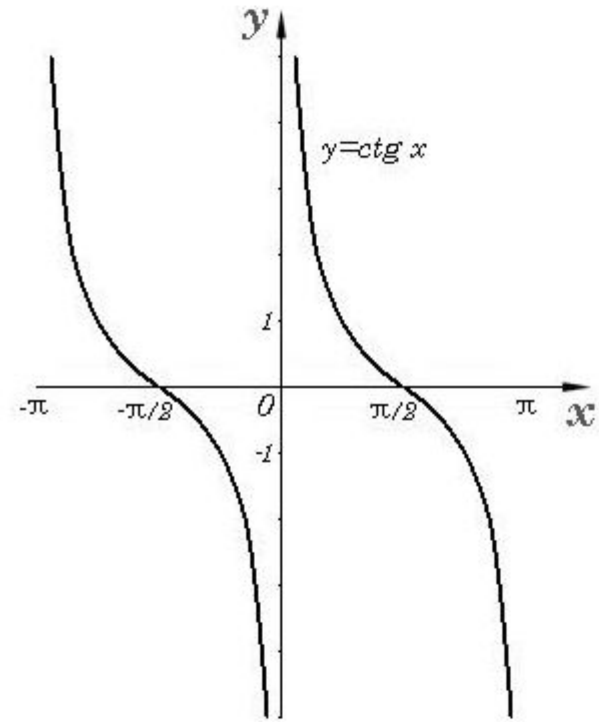
# Властивості функцій

**2. Монотонність.**

**Зростаючою (спадною)** називається функція, для якої на проміжку ***Х*** більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції. Зростаючі та спадні функції називаються ***строго монотонними.*** Якщо ж більшому значенню аргументу відповідає не менше (не більше), ніж попереднє, то функція називається ***неспадною (незростаючою).*** Такі функції також називають ***монотонними.***

# Приклади строго монотонних функцій

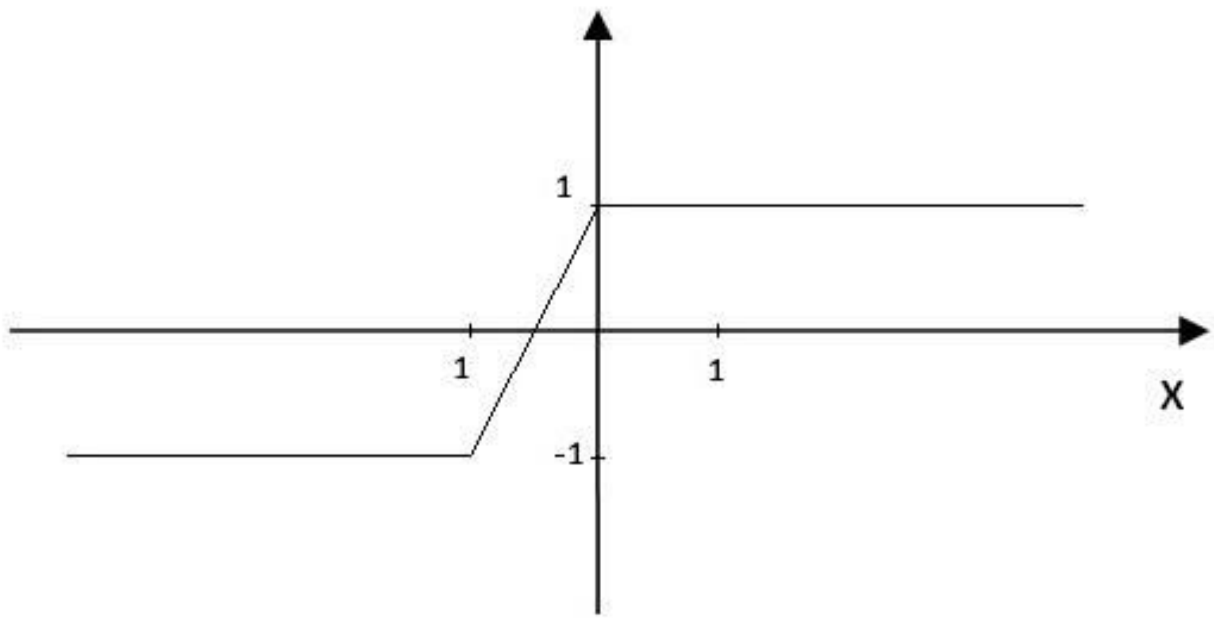



y=x2 для всіх x [0;∞]     y=ctgx

функція зростає     спадає для всіх x

# Приклади монотонних функцій



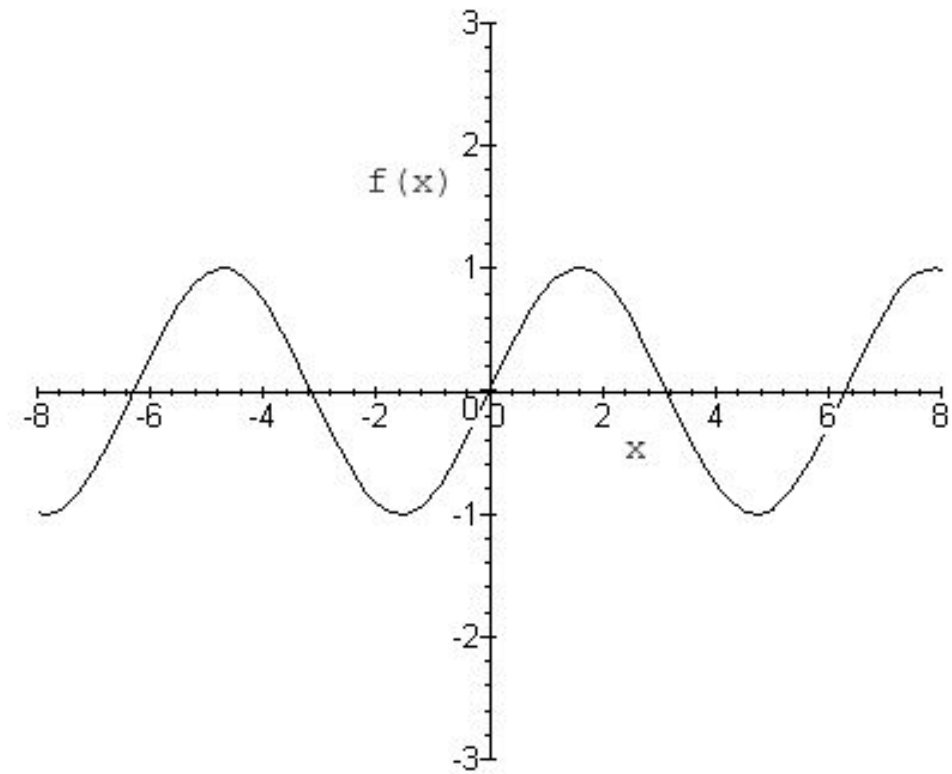

y=|x+1|-|x|  є неспадною .

# Властивості функцій

**3. Обмеженість.**

**Обмеженою** на множині X називається функція, для якої існує таке число M, що $\mathbf{|f(x)| \le M}$ для всіх $x \in X$.

# Приклади обмежених функцій




y=sinx

# Властивості функцій

**4. Періодичність.**

**Періодичною** називається функція, для якої існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(x)$ виконується рівність $f(x)=f(x+T)$, при цьому періодом функції називається найменше додатне число $T$, яке задовольняє цій умові.

# Типи функцій

Якщо значенню $y \in E(y)$ ставиться у відповідність єдине $x$ таке, що $f(x)=y$ то отриману функцію називають **оберненою** до $y=f(x)$ позначають $x=f^{-1}(y)$.

*Наприклад*: для функції $y=x^2$ оберненою є $y=\sqrt{x}$.

**Складні функції (суперпозиції функцій):** нехай $y=f(u)$, де $u \in D(u)$, а множина $D(u)$ є областю значень функції $u=\phi(x)$. Тоді кажуть, що визначено складну функцію $y=f(\phi(x))=F(x)$, або, що те ж саме, що функція $F$ є суперпозицією функцій $f$ та $\phi$.

*Наприклад*: $y=\ln \sin x$ (суперпозиція логарифму та синуса).

# Елементарні функції

- **Степенева** $y=x^a$;
- **Показникова** $y=a^x$;
- **Логарифмічна** $y=\log_a x$;
- **Гіперболічна** $y=a/x$;
- **Експоненційна** $y=e^{a/x}$;
- **Многочлени** $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$

**ступеню n**

Примітка: перші три функції називають *основними елементарними* функціями, остання функція є *алгебраїчною* функцією.

# 2. Послідовності та їх границі

*Кажуть, що задано* ***числову послідовність,*** якщо кожному натуральному числу поставлене у відповідність певне дійсне число. Таким чином, **числова послідовність** є функцією натурального аргументу $a_n=f(n)$.

Послідовність записують у вигляді $a_1, a_2,\ldots,a_n$ або $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ при цьому $a_1, a_2,\ldots,a_n$ **члени послідовності,** $a_n=f(n)$ **загальний (n-ий) член послідовності.**

Оскільки послідовність є частинним випадком функції, то для неї використовують ті ж самі терміни: монотонність , обмеженість, тощо.

Число **а** називають ***границею послідовності*** і записують $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n-a|<\varepsilon$ (інакше кажучи, знайдеться такий номер члена послідовності, починаючи з якого, всі її члени потраплять до $\varepsilon$ - околу числа а).

Якщо послідовність має границю, вона *називається* ***збіжною, інакше – розбіжною.***

**Властивості збіжних послідовностей:**

*1) Якщо існує* ***границя послідовності, то вона єдина.***

*2)* ***Збіжна послідовність є обмеженою.***

3) Якщо, починаючи з деякого номеру $n \geq N$ виконується нерівність $a_n < b_n < c_n$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ то $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ (**теорема про границю проміжної послідовності).**

4) Монотонна обмежена послідовність **– збіжна.**

Якщо $a = 0$, то послідовність *називається* **нескінченно малою**.

Якщо послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ має границю $a$, то $a_n = a + \alpha_n, \forall n$, де $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нескінченно мала, то послідовність $\beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ (при $\alpha_n \neq 0$) є **нескінченно великою** (така послідовність необмежена, абсолютні величини її членів **нескінченно зростають**);

Запровадимо **арифметичні операції над збіжними послідовностями**. Нехай загальний член однієї послідовності $a_n$, другої - $b_n$, тоді $c_n = \alpha \cdot a_n$ – **послідовність, помножена на число,** $\alpha_n = a_n \pm b_n$ - **сума (різниця) послідовностей,** $f_n = a_n \cdot b_n$ – **добуток послідовностей,** $q_n = \dfrac{a_n}{b_n} (b_n \neq 0)$ - **частка послідовностей,**

$$1.\ \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n\ ;$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\ ;$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\ ;$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

# Приклади

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2\cdot 0=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0.$$

# Типи невизначеностей при знаходженні границь

- якщо $a_n, b_n$ – нескінченно великі послідовності, то при знаходженні границі $d_n = a_n \pm b_n$ може виникнути невизначеність $(\infty - \infty)$.
- якщо $a_n$ – нескінченно мала послідовність, а $b_n$ – нескінченно велика (чи навпаки), то при знаходженні границі $f_n = a_n \cdot b_n$ маємо невизначеність $(0;\infty)$ (або $(\infty;0)$);
- якщо $a_n, b_n$ є одночасно нескінченно малими або нескінченно великими то при знаходженні границі $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ маємо невизначеності відповідно $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

# Приклад розкриття невизначеності при знаходженні границі

$$a_n = \frac{3n+2}{2n+1}$$ має місце невизначеність типу $$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Якщо чисельник і знаменник поділити на n то

$$a_n = \frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$ звідси матимемо $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

# Приклад розкриття невизначеності при знаходженні границі

$a_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ має місце невизначеність типу $(0 \cdot \infty)$

Послідовність розбивають на дві частини.

$$a_n^{(1)} = n, \qquad a_n^{(2)} = \sqrt{n^2+1} - n$$

Для другої частини послідовності запишемо:

$$a_n^{(2)} = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

Звідси маємо: $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} + 1}; \qquad \lim\limits_{n \to \infty} = \frac{1}{2}.$

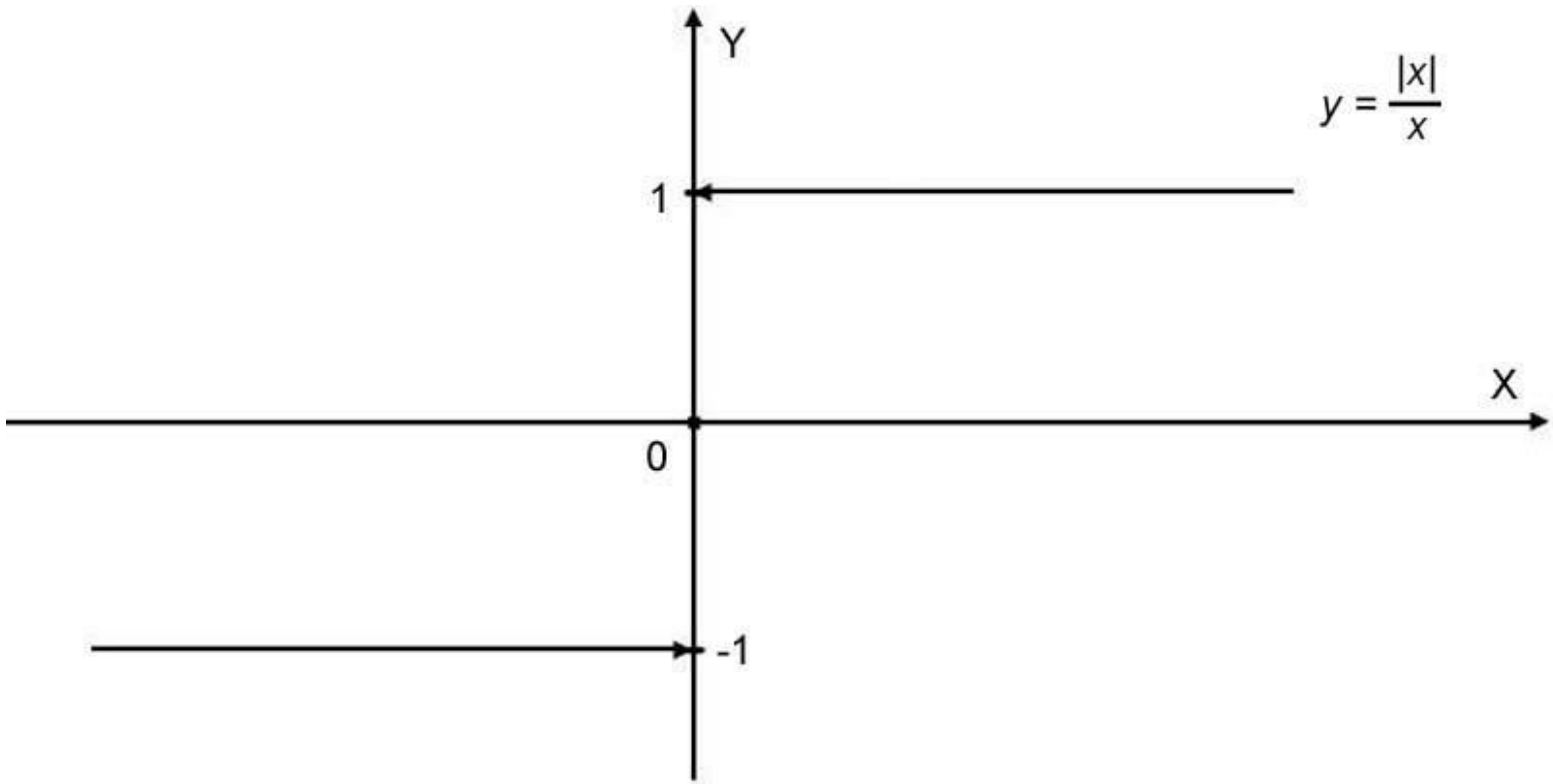
# 3. Границі функцій

Число *A називається* ***границею функції*** *y=f(x) при x* $\to\infty$, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ (наскільки завгодно малого) знайдеться число $S(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх x, $|x| > S(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$.

**Число А *називається границею функції*** *y=f(x)* при x, що прямує до $x_0$ (записується $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$), якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $|x-x_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$.

1) ***Існування границі функції при $x \to x_0$ не вимагає існування значення функції $f(x_0)$ , тобто пов’язане з поведінкою функції поблизу цієї точки.***

2) ***Якщо при прямуванні $x$ до $x_0$ змінна $x$ приймає лише значення менші (більші) за $x_0$, то кажуть про прямування $x$ до $x_0$ знизу $(x \to x_0 - 0)$ або зверху $(x \to x_0 + 0)$ , і , відповідно, про*** **однобічні границі функції.**



Y
$y = \frac{|x|}{x}$
1
X
0
-1

**Властивості функцій, що мають границю, відповідають властивостям збіжних послідовностей.**

1) Якщо функція f(x) має границю при $x \to x_0$, то ця **границя єдина**.

2) Якщо границя функції дорівнює 0, то така функція називається **нескінченно малою**.

3) Функція тоді і тільки тоді має границею число A (при x, що прямує до числа $x_0$ або ж нескінченності), коли її можна представити у вигляді $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина.

# Приклад

$\lim\limits_{x \to 1}(x+2)=3$, оскільки x+2=3+(x-1), x-1 в цьому випадку є нескінченно малою

4) Функція f(x) тоді і тільки тоді має границею число А, якщо для довільної послідовності чисел $x_1$, $x_2$,…,$x_n$ з її області визначення послідовність значень функції $f(x_1)$, $f(x_2)$,…,$f(x_n)$ збігається до А. (**означенням границі функції за Гейне )/**

5) Сталий множник виноситься за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left(\alpha f(x)\right)=\alpha A,\ \text{якщо}\ \lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A;$$

*Напр*

$$\lim_{x\to 0}(3\sin x)=3\lim_{x\to 0}\sin x=3\cdot 0=0.$$

6) Границя алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A+B, \text{ якщо } \lim_{x\to x_0(\infty)} f\left(x\right)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} g\left(x\right)=B;$$

*Наприклад*: $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x+\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}2^x+\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1+1=2.$

7) Границя добутку дорівнює добутку границь:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B, \text{ якщо знову } \lim_{x\to x_0(\infty)} f\left(x\right)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} g\left(x\right)=B;$$

*Наприклад*: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2\cdot\log(x+8)\right)=\lim\limits_{x\to 2}x^2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\log(x+8)=4\cdot 1=4.$

8) Границя частки дорівнює частці границь:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B}, \text{ якщо } \lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A,$$
$$\lim_{x\to x_0(\infty)} g(x)=B\neq 0;$$

*Наприклад*: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}=\frac{0}{1}=0$

9) Якщо $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \varphi(x)=u_0$, то **границя складеної функції**

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(g(x))=A$$

*Наприклад*: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} 4^{\sin x}=4^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x}=4^{\frac{1}{2}}=2.$

10) Якщо в деякому околі точки $x_0$ (або при достатньо великих x) виконується нерівність f(x)<g(x) , то за умови існування границь

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x) \leq \lim_{x\to x_0(\infty)} g(x).$$

Для нескінченно малих величин характерні наступні властивості:

а) Алгебраїчна **сума** скінченної кількості **нескінченно малих** величин є величина **нескінченно мала.**

б) **Добуток нескінченно малої** величини на **обмежену** (в тому числі на сталу або ж іншу нескінченно малу) є величина **нескінченно мала.**

в) **Частка** від ділення **нескінченно малої** величини на величину, яка має **відмінну від нуля** границю, є величина **нескінченно мала.**

г) Величина, **обернена до нескінченно малої** є **нескінченно велика** і навпаки – величина, **обернена до нескінченно великої** є **нескінченно мала.**

# Примітні (важливі) границі

**Першою примітною границею** називається границя

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Її наслідками є границі:

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1;$$

$$3. \lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1;$$

$$4. \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{X^2} = \frac{1}{2}.$$

# Приклади

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 * tg 3x}{3 * 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{tg 3x}{3x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(4x - \pi)}{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = t, \\ x \to \frac{\pi}{4}, t \to 0 \end{array} \right| = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 4t}{(2t)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 4t}{(4t)^2} \cdot 16 = 4 \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 4t}{(4t)^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(4x - \pi)}{(2x - \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 sin^2 (2x - \frac{\pi}{2})}{(2x - \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{sin(2x - \frac{\pi}{2}) * sin(2x - \frac{\pi}{2})}{(2x - \frac{\pi}{2}) * (2x - \frac{\pi}{2})} = 2$$

**Другою примітною границею** називається границя:

$$\lim_{x \to \infty}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Наслідки такої границі

$$\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a};$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{a^x - 1}{x} = a;$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a.$$

# Приклад

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{x}}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Нескінченно малі величини називаються **еквівалентними** (α~β), якщо $\lim\limits_{x\to 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ **або одного порядку малості,** якщо $\lim\limits_{x\to 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$

Якщо $\lim\limits_{x\to 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ то α(x)*називається* ***нескінченно малою вищого порядку малості*** в порівнянні з β**.**

У випадку, коли маємо добуток, або частку нескінченно малих величин, то при знаходженні границь кожна з них може бути замінена **на еквівалентну**.

З першої та другої примітних границь випливають наступні еквівалентності:

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} u(x) = 0$, то:

1) $\sin u(x) \sim u(x)$;

2) $\mathrm{tg}\, u(x) \sim u(x)$;

3) $\arcsin u(x) \sim u(x)$;

4) $\mathrm{arctg}\, u(x) \sim u(x)$;

5) $1 - \cos u(x) \sim \frac{1}{2} u^2(x)$;

6) $\log_a (1 + u(x)) \sim \frac{u(x)}{\ln a}$;

7) $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$;

8) $a^{u(x)} - 1 \sim u(x) \cdot \ln a$;

9) $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$;

10) $(1 + u(x))^a - 1 \sim a \cdot u(x)$.

Для *нескінченно великих функцій корисно використовувати еквівалентність:*

$$P_n(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1} +\dots + a_n \sim a_0x^n \text{ при } x \to\infty$$

# Неперервність та розриви функцій

**Неперервною** в точці $x=x_0$ є функція $y=f(x)$, якщо вона:

а) визначена в деякому околі цієї точки;

б) має скінченну границю $A=\lim\limits_{x=x_0} f(x)$

в) $A=f(x_0)$ (границя співпадає зі значенням функції);

**неперервною на інтервалі (a; b),** якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу;

**неперервною на відрізку [a; b],** якщо вона:

г) неперервна на інтервалі (a; b);

д) має скінченні значення $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$;

е) мають місце рівності: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\alpha,\ \lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\beta.$

***1) неперервність функції*** означає неперервність її графіка, тобто можливість зобразити його не відриваючи олівця від паперу;

***2) функція неперервна*** тоді і тільки тоді, коли її приріст $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ прямує до нуля при $\Delta x \to 0$.

Якщо функція не є неперервною в точці $x_0$, то точка $x_0$ *називається* ***точкою розриву функції.***

Розрізняють наступні типи точок розриву:

1) **Усувний розрив, коли існує границя** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, проте її значення не співпадає зі значенням $f(x_0)$ або ж останнє не існує;

2) **Розрив першого роду** (розрив типу «стрибок»), якщо границі та $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)$ уют $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)$ е не рівні між собою;

3) **Розрив другого роду,** якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)$ нескінченна або не існує.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

***Розв'язання.*** Оскільки f(1) не існує, то x=1 - точка розриву функції.

Обчислимо границі зліва і справа в точці x=1:

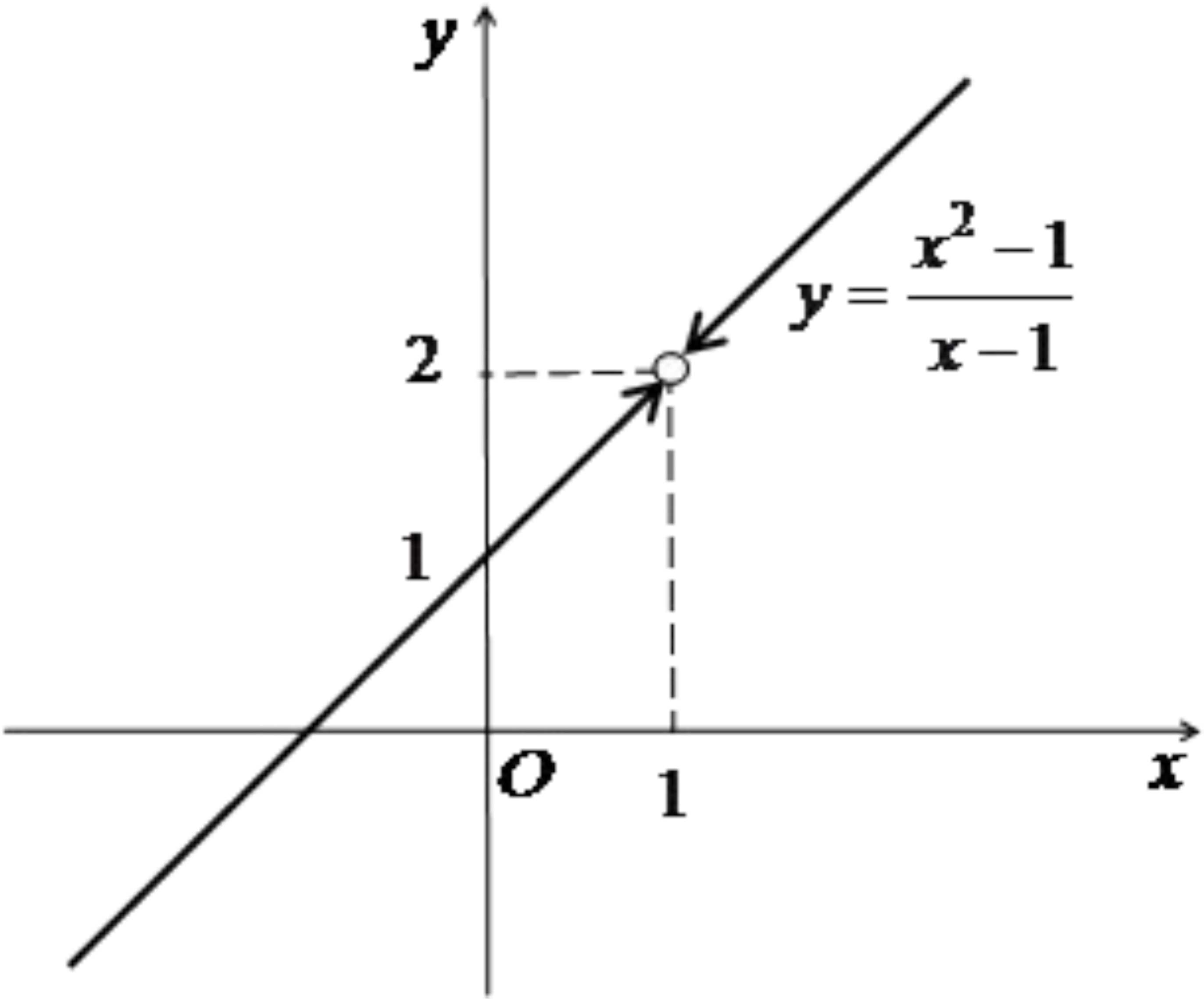
$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2$$

Оскільки $\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=2$, то точка x=1 є точкою усувного розриву.

Отже маємо: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+1\\ x\neq 1\end{cases}$.

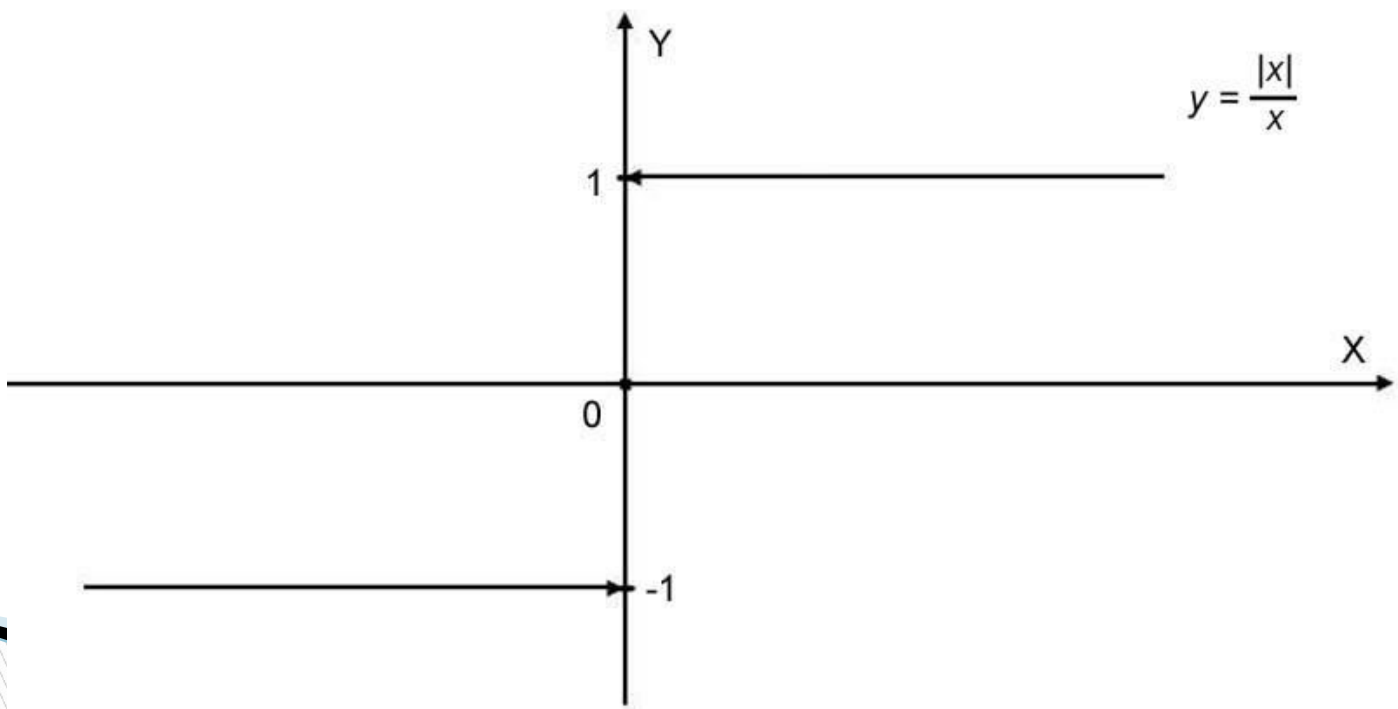
Схематичний графік зображено на наступному слайді.



y
$y=\frac{x^2-1}{x-1}$
2
1
O
1
x

# Приклад

Функція $y=\frac{|x|}{x}$ має в точці x = 0 розрив першого роду («стрибок»), оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} y=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1$ а значення самої функції в цій точці не визначене.



# Приклад

Дослідити на розрив функцію $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$

***Розв'язання.*** Оскільки f(1) не існує, то x=1 - точка розриву функції.

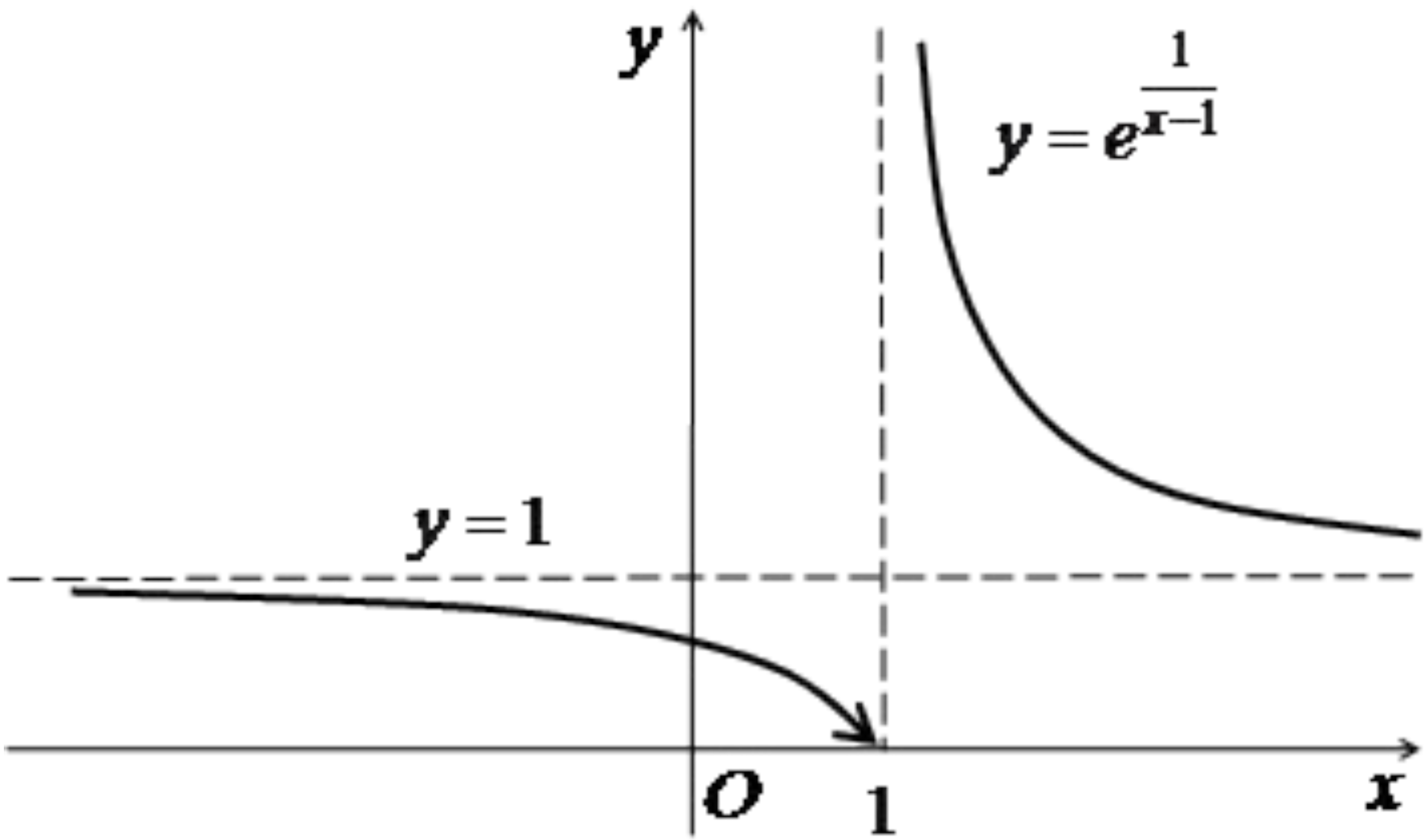
Обчислимо односторонні границі функції в точці x=1:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}=0, \text{ (оскільки } x\to 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1}\to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}}\to 0);$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty, \text{ (оскільки } x\to 1+0 \Rightarrow \frac{1}{x-1}\to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}}\to +\infty).$$

Оскільки друга границя дорівнює -∞ то точка x=1 точка розриву другого роду.

Графік наведено на наступному слайді.



$y$
$y = e^{\frac{1}{x-1}}$
$y = 1$
$O$
1
$x$

**Функції , неперервні в точці, мають наступні властивості:**

1) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці $x=x_0$, то їх алгебраїчна сума $f(x)+g(x)$, добуток $f(x)*g(x)$ та частка $f(x)/g(x)$ (при $g(x)\neq 0$) також неперервні в точці $x=x_0$.

2) Якщо $f(x)$ неперервна в точці $x=x_0$ та $f(x_0)>(<)0$, то існує такий окіл точки $x_0$, в якому $f(x)>(<)0$.

3) Якщо функція $y=f(u)$ неперервна в точці $u_0$, а функція $\phi(x)$ неперервна в точці $x=x_0$, $\phi(x_0) = u_0$ то складна функція $y=f(\phi(x))$ неперервна в точці $x=x_0$.

**Всі елементарні функції неперервні в усіх точках своїх областей визначення.**

**Функції, неперервні на проміжку [a; b], мають наступні властивості:**

1) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку, то вона обмежена на цьому проміжку.

2) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку, то існують точки $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ в яких функція досягає своїх найменшого $m$ та найбільшого $M$ значень на цьому проміжку:

$$f(x_1)=m, \quad f(x_2)=M.$$

3) Якщо функція неперервна на відрізку [a; b] і її значення на кінцях цього відрізку мають різні знаки, то на відрізку знайдеться точка $x_0$ така, що $f(x_0)=0$.

# Біном Ньютона

Формулою бінома Ньютона *називають рівність:*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

де, a, b – дійсні числа.

n=1, 2, 3,... - натуральне число.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ - біноміальний коефіцієнт.

n! – факторіал числа n.

# Справедливі такі співвідношення

1) $0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, \ldots;$

2) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!;$

3) $C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = n;$

4) $C_n^k = C_n^{n-k};$

5) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n;$

6) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$

# Приклади вирішення задач

Приклад 1. Знайти границі послідовностей.

1.1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}$$

1.2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$$

**Розв'язок задачі 1.1.**

Для розкриття заданої невизначеності типу $\{\infty/\infty\}$ виносимо в чисельнику та знаменнику вищу ступінь n . Після скорочення та врахування того, що , а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ стей арифметичних дій над збіжними послідовностями, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

Розв'язання буде простішим, якщо врахувати, що

$$a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n \sim a_0 n^k \quad \text{при } n \to \infty,$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n}{a_0 n^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{a_1}{a_0 n} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_0 n^k}\right) = 1.$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 5n + 7} = \left| \begin{array}{c} 3n^2 + 4n + 1 \sim 3n^2 \\ 2n^2 - 5n + 7 \sim 2n^2 \\ n \to \infty \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}.$$

## Розв'язок задачі 1.2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}}{\sqrt[3]{n^3\left(1-\frac{3}{n}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{n\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}=1\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left|\begin{array}{c} n^2+4n\sim n^2 \\ n^3-3n^2\sim n^3 \\ n\to\infty \end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1\,.$$

# Приклади по розкриттю невизначеностей

Приклад 1.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

**Розв'язок прикладу 1.а.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}.$$

Підстановка граничного значення x = 1 призводить до невизначеності типу {0/0}. Розкладемо чисельник та знаменник на множники використовуючи **теорему Безу**: *якщо а - корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0$, т о $P_n(x)$ ділиться на двочлен (х-а) без залишку :*

$$P_n(x)=(x-a)P_{n-1}(x)$$

$$
\begin{array}{rl}
\tilde{o}^{2}-1 & \big|\, \tilde{o}-1 \\
-\;\underline{\tilde{o}^{2}-\tilde{o}} & \big|\, \overline{\tilde{o}+1} \\
\tilde{o}-1 & \\
-\;\underline{x-1} & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\tilde{o}^{2}+5\tilde{o}-6 & \big|\, \tilde{o}-1 \\
-\;\underline{\tilde{o}^{2}-\tilde{o}} & \big|\, \overline{\tilde{o}+6} \\
6\tilde{o}-6 & \\
-\;\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+6}=\frac{2}{7}.$$

# Розв'язок прикладу 1.в.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$

Позбудемось ірраціональності в чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2+5}+3$.

Далі в чисельнику скористаємось формулою

*$a^2$ -$b^2$ =(a-b)(a+b),в знаменнику множник* зам $\sqrt{x^2+5}+3$ його значенням при x = 2 . Отже, маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(3+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)\cdot 6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\cdot 6}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{6}=\frac{2}{3}.$$

**Розв'язок прикладу 1.г.**

Домножимо чисельник і знаменник на вирази, спряжені до чисельника і знаменника. Скориставшись відповідними формулами $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, *маємо*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\cdot 3}{(1+x-1)\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3}{x\cdot 2}=\frac{3}{2}.$$

**Розв'язок прикладу 1.г.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c}1+x=t^6\\ x\to 0,\, t\to 1\\ \sqrt{1+x}=t^3\\ \sqrt[3]{1+x}=t^2\end{array}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

**Приклад 2.** Знайти границі заданих функцій.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + x + 1}{5x^2 - x - 4}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x - 3}{2x^3 + 4x^3 + 3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5 + 3x^3 - 4x}{3x^2 - 4x + 2}$;   г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{\sqrt[3]{x^6 + 1}}$;

## Розв'язок прикладу 2.а.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{2+0+0}{5-0-0}=\frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{array}{c}2x^2+x+1\sim 2x^2\\ 5x^2-x-4\sim 5x^2\\ x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}.$$

## Розв'язок прикладу 2.б.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}=\left|\begin{array}{l}10x-3\sim 10x\\ 2x^3+4x+3\sim 2x^3\\ \quad x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{\infty}=0\,.$$

## Розв’язок прикладу 2.в.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{array}{c}2x^5+3x^3-4x\sim 2x^5\\ 3x^2-4x+2\sim 3x^2\\ x\to-\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

**Розв’язок прикладу 2.г.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{x^2+1}\sim\sqrt{x^2}=x\\ \sqrt[3]{x^6+1}\sim\sqrt[3]{x^6}=x^2\\ x\to+\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2}{x^2}=4$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!