

Иррациональные уравнения

Алгебра 10

*ГОУ СОШ № 413 Петродворцового района
Санкт-Петербурга
Учитель: Оленникова Т.Н.*

План урока

1. Историческая справка

2. Определение иррационального уравнения

3. Уравнения, содержащие корень нечетной степени.

4. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

5. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

6. Замена переменных

7. Задания для самостоятельной работы

8. Домножение на сопряженное выражение

Историческая справка

- Название **«радикал»** происходит от латинских слов **radix** – «корень», **radicalis** – «коренной». Начиная с XIII в. европейские математики обозначали корень этим словом, или, сокращенно, **r**.
- В 1525г в книге **К. Рудольфа «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс»** появилось обозначение **V** для знака квадратного корня, корень кубический обозначался там, как **▼ ▼ ▼**.

Историческая справка (продолжение)

- В 1626г голландский математик А.Жирар ввел обозначение $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$ и т.д., которое стало быстро вытеснять знак **Г**; при этом над подкоренным выражением ставилась **горизонтальная черта**.

Тогда писали $\sqrt{x + y}$ вместо $\sqrt{x + y}$ современного.

- Современное обозначение корня впервые появилось в книге Р. Декарта «Геометрия», изданной в 1637г.

Иррациональные уравнения

- **Иррациональным** называется уравнение, в котором переменная **входит под знаком корня (радикала)**.

- **Например:**

$$x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3$$

$$\sqrt[4]{4x^3 + 8x^2 - 5x} = 2x - 1$$

$$\sqrt[3]{x - 1} = x - 1$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$$

Уравнения, содержащие корень нечетной степени.

- Решая уравнения, содержащие корень нечетной степени, чтобы «избавиться от радикала», надо возвести обе части уравнения в соответствующую степень.
- Примеры. Решить уравнение.

$$\sqrt[3]{x+3} = 2$$

Возведём обе части в куб, получим

$$x+3 = 8, \quad x = 5$$

Ответ: $x = 5$

Уравнения, содержащие корень нечетной степени (продолжение)

Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-1} = x-1$

Возведём обе части в куб, получим:

$$x-1 = (x-1)^3$$

$$(x-1)^3 - (x-1) = 0$$

$$(x-1)((x-1)^2 - 1) = 0$$

$$(x-1)(x-2)x = 0$$

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 0$$

Ответ: 0, 1, 2

I. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- В **ОДЗ** левая часть уравнения всегда **неотрицательна** – поэтому решение может существовать только тогда, когда $g(x) \geq 0$.
- В этом случае **обе части уравнения неотрицательны**, возведение в квадрат даёт **равносильное** в **ОДЗ** уравнение. Мы получаем,

что

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

ПРИМЕРЫ

1) Решить уравнение

$$x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3$$

Воспользуемся условием равносильности (*):

$$x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 5 = x^2 - 6x + 9 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4$

ПРИМЕРЫ

2) Решить уравнение

$$\sqrt{4x^3 + 8x^2 - 5x} = 2x - 1$$

Воспользуемся условием равносильности (*):

$$\sqrt{4x^3 + 8x^2 - 5x} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 8x^2 - 5x = (2x - 1)^2 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(4x^2 - 1) = 0 \\ x \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 0,5 \\ x = -1 \\ x \geq 0,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ответ } x : = 0,5$$

II. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

- В ОДЗ обе части неотрицательны и при возведении в квадрат дает **равносильное уравнение**

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

- При таком способе решения **достаточно проверить неотрицательность одной из функций** – можно выбрать более простую.

ПРИМЕРЫ

1) Решить уравнение $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + x - 1}$

□ Воспользуемся условием равносильности (1):

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 1 = 2x^3 - 4x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ 2x^3 - 5x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 2,5 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2,5$$

Ответ: $x = 2,5$

2) Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{x^3 + x^2 - 3x + 2} = \sqrt{8 + 2x - x^2}$$

□ Воспользуемся условием равносильности (1):

$$\sqrt{x^3 + x^2 - 3x + 2} = \sqrt{8 + 2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 2x - x^2 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - 3x + 2 = 8 + 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) \leq 0 \\ (x+1)(x^2 + x - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) \leq 0 \\ (x+1)(x+3)(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: Произведение корней равно - 2

III. Замена переменных.

Решить уравнение 1. $\frac{3}{1 + \sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x+1} = 5$

□ Пусть $\sqrt{x+1} = t \geq 0$ (*)
получим уравнение $\frac{3}{1+t} + 2t = 5$

$$3 + 2t^2 + 2t = 5t + 5, \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0,$$
$$t = 2, \quad t = -0,5$$

Значит $\sqrt{x+1} = 2, \quad x = 2^2 - 1 = 3$

$\sqrt{x+1} = -0,5,$ решений нет.

Ответ: $x = 3$.

Замена переменных

Решить уравнение 2. $\sqrt{x+3-\sqrt{x+1}}-1 = \sqrt{x-4+\sqrt{x+1}}$

□ **Замена:** $\sqrt{x+1} = t \geq 0 (*)$, тогда $x = t^2 - 1$

$$\sqrt{t^2 - 1 + 3 - t} - 1 = \sqrt{t^2 - 1 - 4 + t}, \text{ т.е. } \sqrt{t^2 - t + 2} = \sqrt{t^2 + t - 5} + 1$$

Обе части неотрицательны, возведём в квадрат
и получим равносильное уравнение

$$t^2 - t + 2 = t^2 + t - 5 + 2\sqrt{t^2 + t - 5} + 1$$

$$6 - 2t = 2\sqrt{t^2 + t - 5} \quad | :2$$

$$3 - t = \sqrt{t^2 + t - 5}, \quad 3 - t \geq 0 \quad \text{и учитывая } (*): \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$9 - 6t + t^2 = t^2 + t - 5, \quad t = 2$$

$$\sqrt{x+1} = 2, \quad x+1 = 4, \quad x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Решить самостоятельно уравнения

-
- 1. $\sqrt[3]{x(x+2)} = x$ **Ответы:** - 1, 0, 2
- 2. $\sqrt{3x-2} = 4-x$ 2
- 3. $\sqrt[6]{4-4x-x^2} = 2$ - 6, 10
- 4. $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{6-3x}$ - 2
- 5. $\sqrt{3x+1} = x-1$ 5
- 6. $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$ 1
- 7. $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$ 4

Решить самостоятельно уравнения

□ 8. $\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} = 1$

Замена :

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} = t \geq 0 \quad (*)$$

тогда

$$2x^2 - 4x = 2t^2 + 2$$

Ответ : $x = 1 \pm \sqrt{2}, \quad x = 1 \pm \sqrt{6}$

□ 9. $\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{4}{3}$

Замена : $x = \sin \alpha, \text{ где } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

тогда

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$$

Ответ: $x = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$

Домножение на сопряженное выражение

□ Решить уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+10} - 4 \quad (1) \quad \text{ОДЗ: } x \geq -1$$

а) $\sqrt{x+1} - 1 = 0$

$$\sqrt{x+1} = 1$$

$x = 0$ - не является корнем иск. ур-я (1)

Домножение на сопряженное выражение (продолжение)

б) Домножим числитель и знаменатель
дроби на $\sqrt{x+1}-1$, получим

$$\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} = \sqrt{x+10}-4$$

$$\sqrt{x+1}-1 = \sqrt{x+10}-4$$

$$\sqrt{x+1}+3 = \sqrt{x+10}$$

Обе части неотрицательны, возведём в
квадрат и получим равносильное уравнение

$$x+1+9+6\sqrt{x+1} = x+10 \quad 6\sqrt{x+1} = 0 \quad x = -1$$

Ответ: $x = -1$