Методы решения тригонометрических уравнений

Содержание

- *Метод замены переменной*
- *Метод разложения на множители*
- *Однородные тригонометрические уравнения*
- *С помощью тригонометрических формул:*
  - *Формул сложения*
  - *Формул приведения*
  - *Формул двойного аргумента*

Метод замены переменной

С помощью замены $t = \sin x$ *или* $t = \cos x$, *где* $t \in [-1;1]$ *решение исходного уравнения сводится к решению квадратного или другого алгебраического уравнения.*

См. примеры 1 – 3

Иногда используют универсальную тригонометрическую подстановку: $t = tg\,\dfrac{x}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin\alpha = \frac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Пример 1

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, *где* $t \in [-1; 1]$, *тогда*

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2, -\text{не удовлетвор яет условию } t \in [-1; 1] \\ t_2 = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$$

Ответ : $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 2

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

Поскольку $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, *то*

$$\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Пусть $\cos x = t$, *где* $t \in [-1; 1]$, *тогда*

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ : $2\pi k,\ k \in Z;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 3

$$tg\frac{x}{2}+3ctg\frac{x}{2}=4$$

Поскольку $ctg\frac{x}{2}=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}$, *то*

$$tg\frac{x}{2}+\frac{3}{tg\frac{x}{2}}=4$$

Пусть $tg\frac{x}{2}=t$, *где* $t\neq 0$, *тогда*

$$t+\frac{3}{t}=4 \quad \Big|\times t$$

$$t^2-4t+3=0$$

$$\left[\begin{aligned} &t_1=1\\ &t_2=3\end{aligned}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{aligned} &tg\frac{x}{2}=1,\\ &tg\frac{x}{2}=3;\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{x}{2}=arctg\,1+\pi n,\ n\in Z\\ &\frac{x}{2}=arctg\,3+\pi k,\ k\in Z\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x}{2}=arctg\,1+\pi n,\ n\in Z\\ &\frac{x}{2}=arctg\,3+\pi k,\ k\in Z\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\\ &x=2arctg\,3+\pi k,\ k\in Z\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\\ &x=2arctg\,3+2\pi k,\ k\in Z\end{aligned}\right.$$

Ответ : $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \ 2arctg\,3+2\pi k;\ \ n,k\in Z.$

Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в том, что произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысл:

$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot \ldots = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$ *или* $g(x) = 0$ *или* $h(x) = 0$

и т.д. при условии существования каждого из сомножителей

См. примеры 4 – 5

Пример 4

$$\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\cos x+\frac{2}{5}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x-\dfrac{1}{3}=0,\\[2ex] \cos x+\dfrac{2}{5}=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{3},\\[2ex] \cos x=-\dfrac{2}{5};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z\\[2ex] x=\pm\arccos\left(-\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z\\[2ex] x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n;\ \pm\left(\pi-\arccos\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k;\ n,k\in Z.$

Пример 5

$$2\sin x\boxed{\cos 5x}-\boxed{\cos 5x}=0$$

$$\boxed{\cos 5x}(2\sin x-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x-1=0, \\ \cos 5x=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos 5x=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z \\ 5x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z \\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi k}{5},\ k\in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;\ \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi k}{5},\ k\in Z.$

Однородные тригонометрические уравнения

*Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени.***

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

<u>Замечание.</u>

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

*Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением второй степени.***

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad \Big| : \cos^2 x$$

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\mathrm{tg}\, x = t$ и решаем методом замены переменной.

<u>Замечание.</u> Если в данном уравнении $a = 0$ или $c = 0$ то, уравнение решается методом разложения на множители.

Пример 6

$$2\sin x - 3\cos x = 0 \quad \Big|: \cos x$$

$$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2tgx - 3 = 0$$

$$tgx = \frac{3}{2}$$

$$x = arctg\,\frac{3}{2} + \pi n,\quad n \in Z$$

$$Ответ: \ arctg\,\frac{3}{2} + \pi n,\quad n \in Z.$$

Пример 7

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad \Big|: \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x}$$

$$tg 2x + 1 = 0$$

$$tg 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in Z$$

$$Ответ: \ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in Z.$$

Пример 8

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \qquad \Big| : \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$$

Пусть $tgx = t$, *тогда*

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \\ x = arctg\,2 + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ : $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ arctg\,2 + \pi k;\ n, k \in Z.$

Пример 9

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

$$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\sin x+\cos x=0, \qquad \Big|:\sin x\\ \cos x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}+ctgx=0,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}ctgx=-\sqrt{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi-arcrcc\sqrt{3}+\pi k,\ \ k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z.\end{array}\right.$$

$$Ответ:\ \frac{5\pi}{6}+\pi k;\quad \frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ n,k\in Z.$$

Пример 10

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x - 3\cos^3 x = 0 \qquad \Big| : \cos^3 x$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^3 x} - \frac{3\sin x \cos^2 x}{\cos^3 x} - \frac{3\cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$$tg^3 x + tg^2 x - 3tgx - 3 = 0$$

$$tg^2 x(tgx + 1) - 3(tgx + 1) = 0$$

$$(tg^2 x - 3)(tgx + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2 x - 3 = 0, \\ tgx + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg^2 x = 3, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = \pm\sqrt{3}, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm arctg\sqrt{3} + \pi k, \quad k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ : $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \quad \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k; \quad n, k \in Z.$

Пример 11

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2 \quad \Big| \times \left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)$$

$$\underline{\underline{3\sin^2 3x}} - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x \underline{+5\cos^2 3x} \underline{-2\cos^2 3x} \underline{\underline{-2\sin^2 3x}} = 0$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 \quad \Big| : \cos^2 3x$$

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - \frac{2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} + \frac{3\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0$$

$$tg^2 3x - 2\sqrt{3}tg 3x + 3 = 0$$

Пусть $tg 3x = t$, *тогда*

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$\left(t - \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$t - \sqrt{3} = 0$$

$$t = \sqrt{3}$$

Вернемся к исходной переменной

$$tg 3x = \sqrt{3}$$

$$3x = arctg\sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

С помощью тригонометрических формул

1. Формулы сложения:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y - 1}{\operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}x}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y + 1}{\operatorname{ctg}y - \operatorname{ctg}x}$$

Пример 12

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \quad \Big|: 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}, \ \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6},$ *тогда*

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Пример 13

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}\cos x$$

$$\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$$

$$\cos x=1$$

$$x=2\pi n,\ n\in Z$$

Ответ: $2\pi n,\ n\in Z$

С помощью тригонометрических формул

2. Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$$

$$\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t \qquad \cos(\pi \pm t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$$

$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t \qquad \cos(2\pi \pm t) = \cos t$$

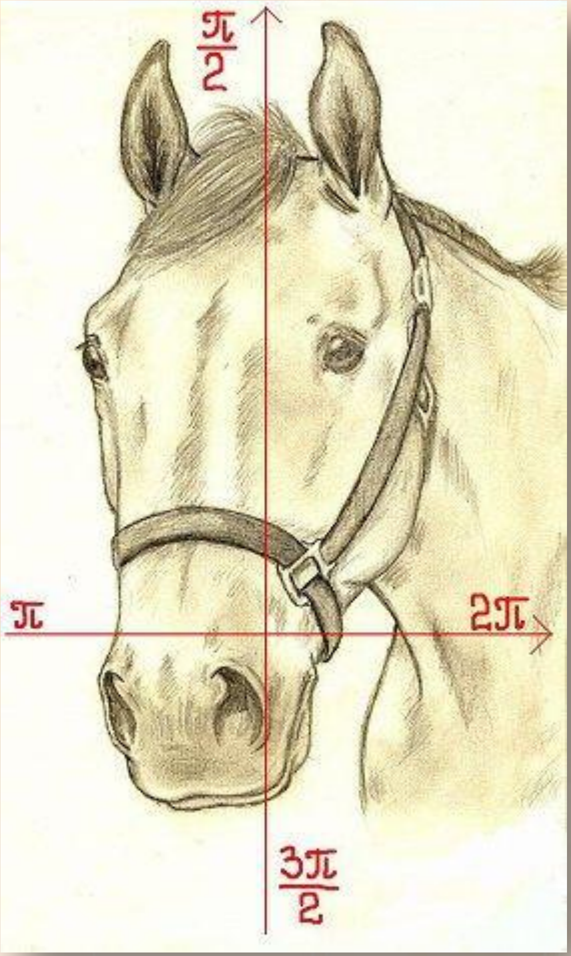
$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp ctg t \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp tg t$$

$$tg(\pi \pm t) = \pm tg t \qquad ctg(\pi \pm t) = \pm ctg t$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp ctg t \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp tg t$$

$$tg(2\pi \pm t) = \pm tg t \qquad ctg(2\pi \pm t) = \pm ctg t$$

Лошадиное правило



В старые добрые времена жил рассеянный математик, который при поиске ответа менять или не менять название функции (*синус* на *косинус*), смотрел на свою умную лошадь, а она кивала головой вдоль той оси координат, которой принадлежала точка, соответствующая первому слагаемому аргумента ***π/2 + a*** или ***π + a***. Если лошадь кивала головой вдоль оси ***ОУ***, то математик считал, что получен ответ ***«да, менять»***, если вдоль оси ***ОХ***, то ***«нет, не менять»***.

С помощью тригонометрических формул

3. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

Пример 14

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2\sin 2x \boxed{\cos 2x} - \boxed{\cos 2x} = 0$$

$$\boxed{\cos 2x}(2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ 2\sin 2x - 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ 2x = (-1)^k \arcsin \dfrac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z \\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\text{Ответ}: \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z; \quad (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

С помощью тригонометрических формул

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\sin 2\alpha$$

5. Формулы половинного угла:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

С помощью тригонометрических формул

6. Формулы суммы и разности:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$tg\,\alpha+tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$tg\,\alpha-tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$ctg\,\alpha-ctg\,\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

С помощью тригонометрических формул

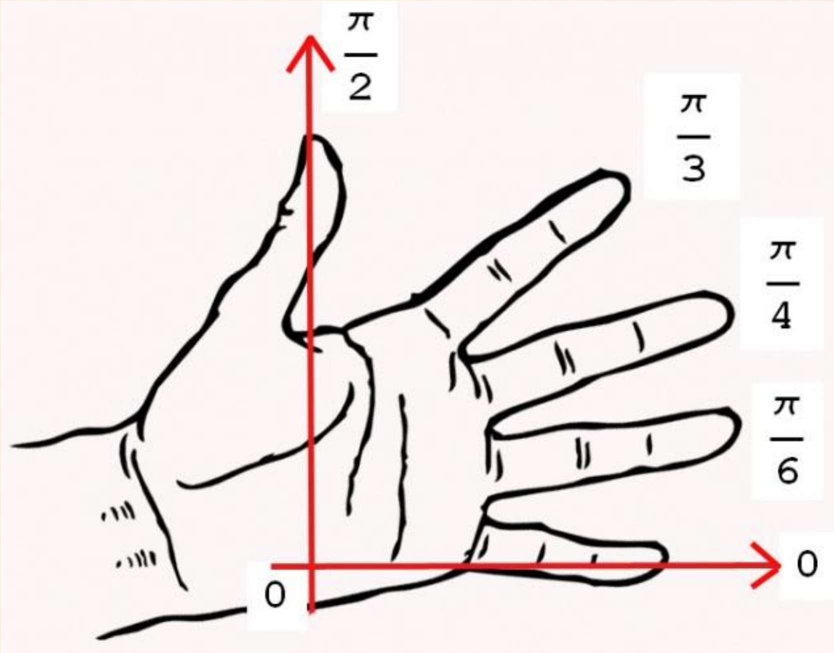
7. Формулы произведения:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

Мнемоническое правило “Тригонометрия на ладони”



Очень часто требуется знать наизусть значения ***cos***, ***sin***, ***tg***, ***ctg*** для углов **0°**, **30°**, **45°**, **60°**, **90°**. Но если вдруг какое-либо значение забудется, то можно воспользоваться правилом руки. ***Правило:*** Если провести линии через мизинец и большой палец, то они пересекутся в точке, называемой “лунный бугор”.

Образуется угол **90°**. Линия мизинца образует угол **0°**.

Проведя лучи из “лунного бугра” через безымянный, средний, указательный пальцы, получаем углы соответственно **30°**, **45°**, **60°**.

Подставляя вместо ***n***: **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, получаем значения ***sin***, для углов **0°**, **30°**, **45°**, **60°**, **90°**.

Для ***cos*** отсчет происходит в обратном порядке.