ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

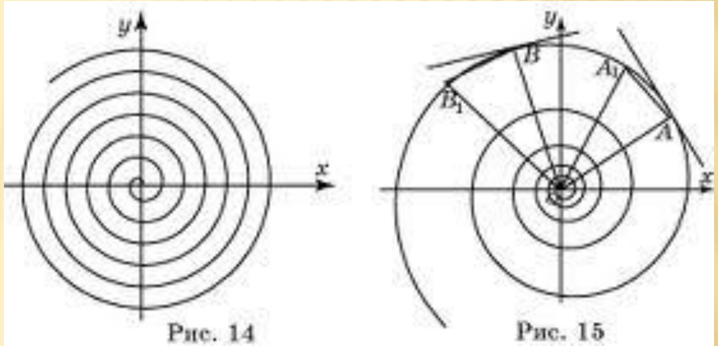
- История термина «производная»
- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции
- Исследование функций с помощью производной

Раздел математики, который изучает производные функций и их применение, называется

дифференциальным исчислением.

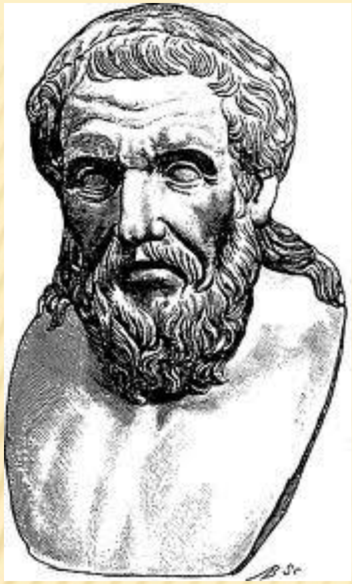
Это исчисление возникло из решений задач на проведение касательных к кривым, на вычисление скорости движения, на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

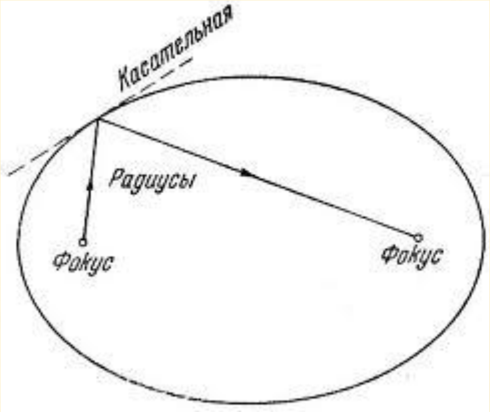
РЯД ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ БЫЛ РЕШЕН ЕЩЕ В ДРЕВНОСТИ АРХИМЕДОМ, РАЗРАБОТАВШИМ СПОСОБ ПРОВЕДЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ.



Архимед построил касательную к спирали, носящей его имя.

Архимед (ок. 287 – 212 до н.э.) – великий ученый. Первооткрыватель многих фактов и методов математики и механики, блестящий инженер.





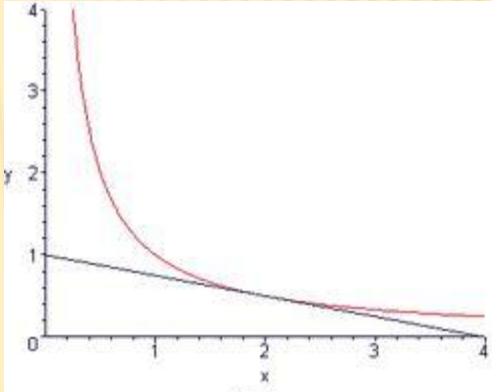


Рис. 8

Аполлоний – к эллипсу, гиперболе и параболе.

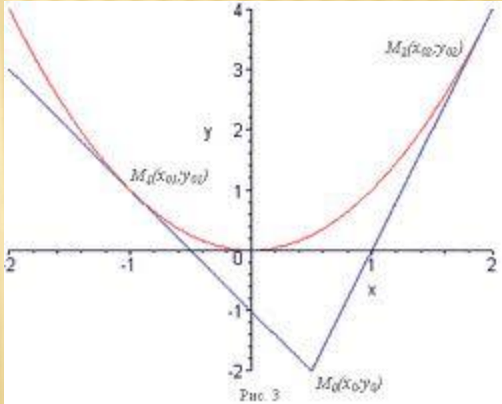


Рис. 3

Но общего метода, пригодного для построения касательной к любой кривой плоскости в произвольной ее точке найдено не было.

БОЛЕЕ ОБЩИМ И ВАЖНЫМ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ БЫЛ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ ФЕРМА.

Пьер Ферма (1601 – 1665 гг.) – французский математик и юрист

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ БЫЛА ВПЕРВЫЕ РЕШЕНА НЬЮТОНОМ.

Функцию он назвал флюэнтой, т.е. текущей величиной. Производную – ф л ю к с и е й.
Ньютон пришел к понятию производной исходя из вопросов механики.

Исаак Ньютон (1643 – 1722 гг.) – английский физик и математик.

Термин «производная» впервые встречается у француза Луи Арбогаста. Этим термином стал пользоваться Лагранж, который и ввел обозначения

У’ и F’(X).

Лагранж, Жозеф (1736–1813), французский математик и механик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

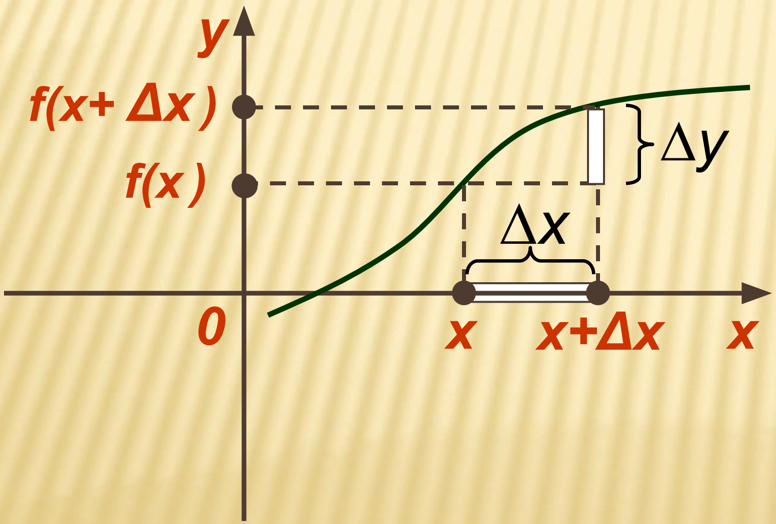
Пусть функция **y = f(x)** определена в некотором интервале **(a; b)**.

Аргументу **x** придадим некоторое приращение Δx:

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции **y = f(x)** и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Итак, **определение**: Производной функции в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю

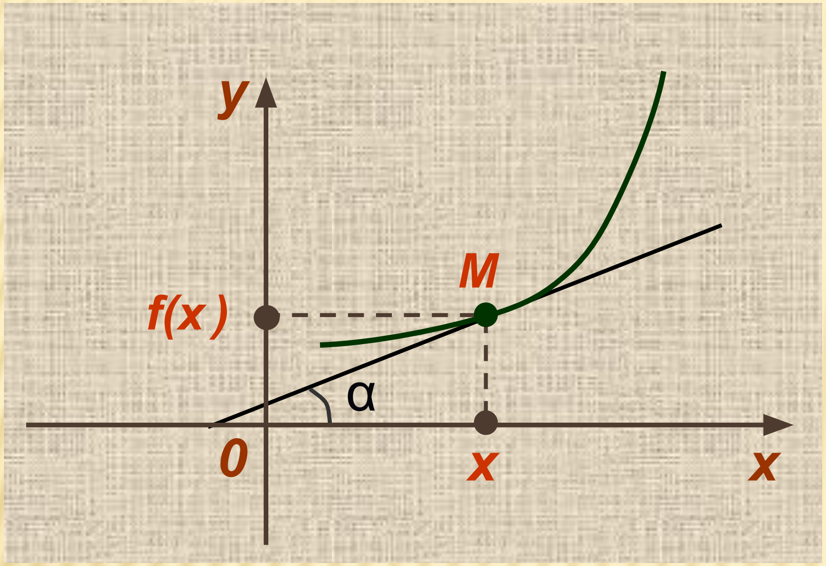
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Если функция ***y = f(x)*** описывает какой – либо физический процесс, то ***f ’(x)*** есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой **L** две точки **M** и **M_1**:



Через точки **M** и **M_1** проведем секущую и обозначим через **φ** угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка **M_1** неограниченно приближается по кривой к точке **M**, а секущая **MM_1** переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \qquad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{\boxed{y'}} = tg\alpha = k \ = y'$$

Производная ***f '(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания ***M*** имеет координаты ***(x_0; y_0)***, угловой коэффициент касательной есть ***k = f '(x_0).***

Уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной

Уравнение нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью*** к кривой.

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция *f(x)* дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение **не верно**: непрерывная функция может не иметь производной.

Пример: $y = |x|$

$y'(0)$ не существует

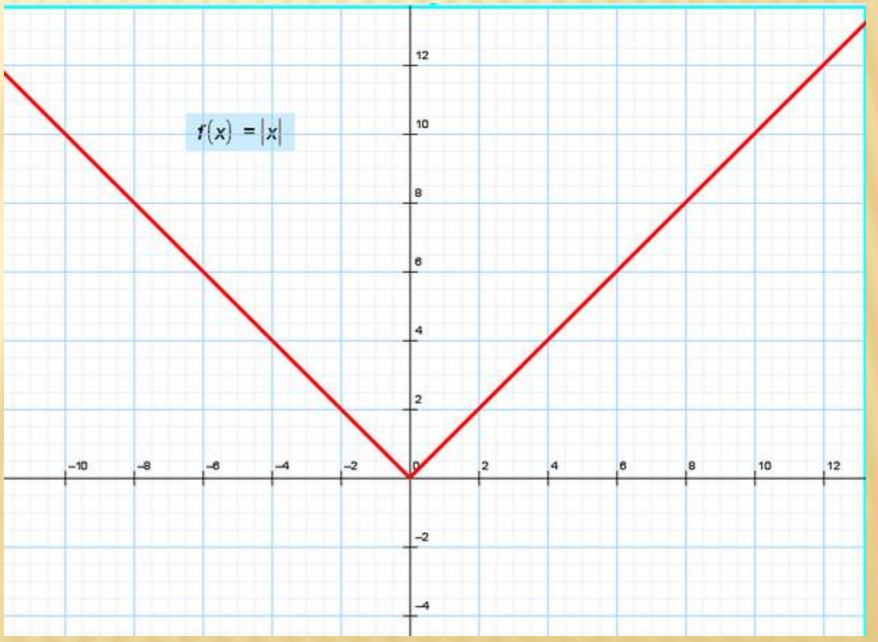


ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$1.\ c' = 0,$

$2.\ (x^n)' = nx^{n-1},$

$(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$

$3.\ (a^x) = a^x \ln a,$

$(e^x) = e^x,$

$4.\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$

$(\ln x)' = \frac{1}{x},$

$5.\ (\sin x)' = \cos x,$

$(\cos x)' = -\sin x,$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x},$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$

$6.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};\quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Выведем формулы некоторых производных, применяя определение производной:

1 $y = x^2$ имеет производную

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x\ ;$$

Производные основных элементарных функций

2 Логарифмическая функция: $y = \ln x$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x} \quad при\ \Delta x \to 0}$$

Аналогично выводятся правила дифференцирования других основных элементарных функций.

Правила дифференцирования

Пусть **u(x)** , **v(x)**– дифференцируемые в некотором интервале **(a; b)** функции, **C** – постоянная.

- $(C)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2}$

Теорема о производной сложной функции

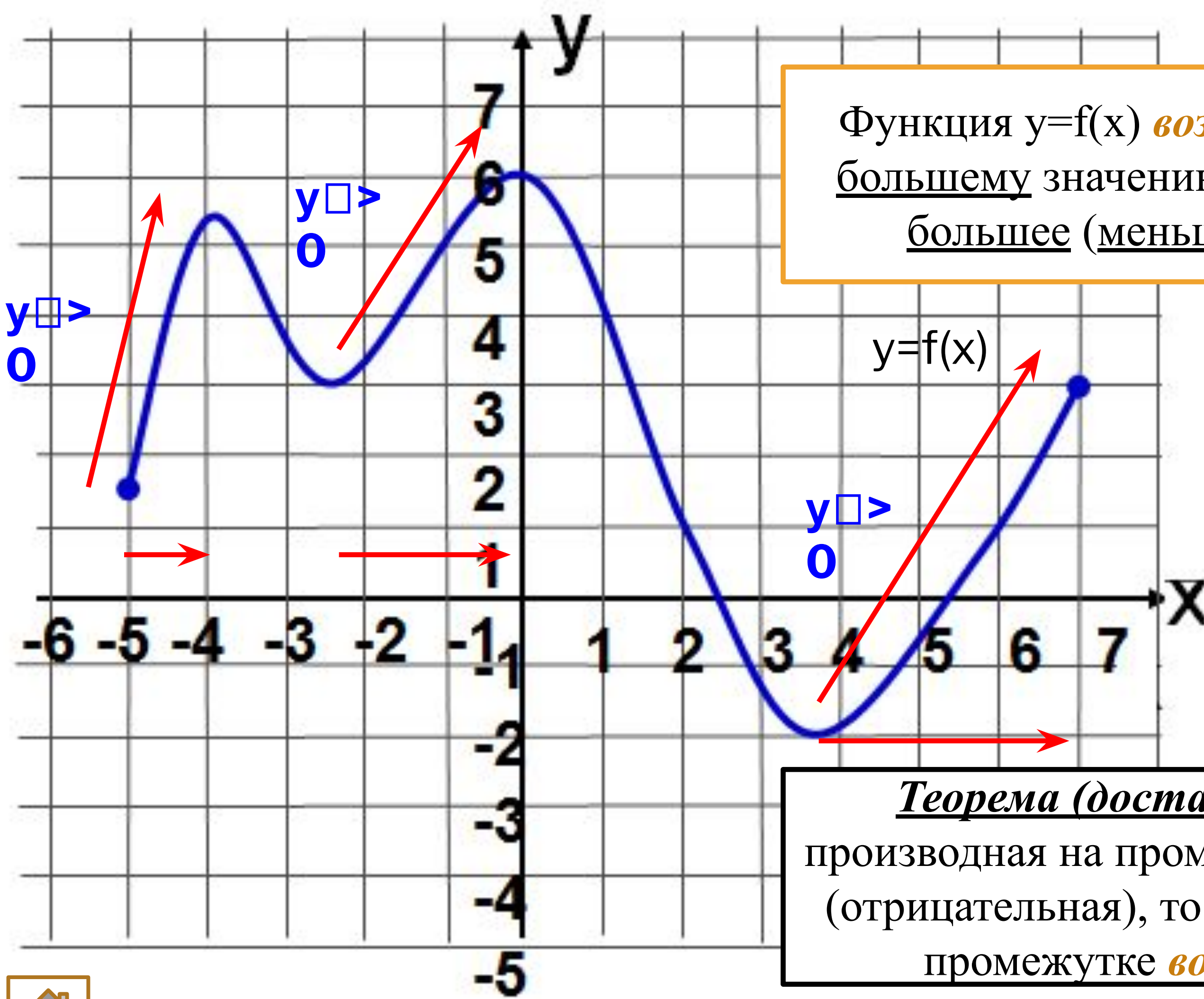
Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную в точке x_0, причем $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Схема

- 1. Найти о.о.ф.
- 2. Найти (если возможно) точки пересечения графика с осями координат
- 3. Найти промежутки знакопостоянства функции
- 4. Исследовать на четность
- 5. Найти асимптоты графика функции
- 6. Найти промежутки монотонности, точки экстремума функции
- 7. Найти промежутки выпуклости, точки перегиба графика функции
- 8. Построить график функции

1. Монотонность функции



Функция y=f(x) ***возрастает (убывает),*** если <u>большему</u> значению аргумента соответствует <u>большее</u> (<u>меньшее</u>) значение функции

<u>Теорема (достаточное условие):</u> Если производная на промежутке (a,b) положительная (отрицательная), то функция y=f(x) на данном промежутке ***возрастает (убывает).***

Точки экстремума

Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 $\mathbf{f(x)>f(x_0)}$ / $\mathbf{f(x)<f(x_0)}$

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если дифференцируемая функция имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Опр. Точка x_0, в которой производная равна нулю или не существует, называется критической.

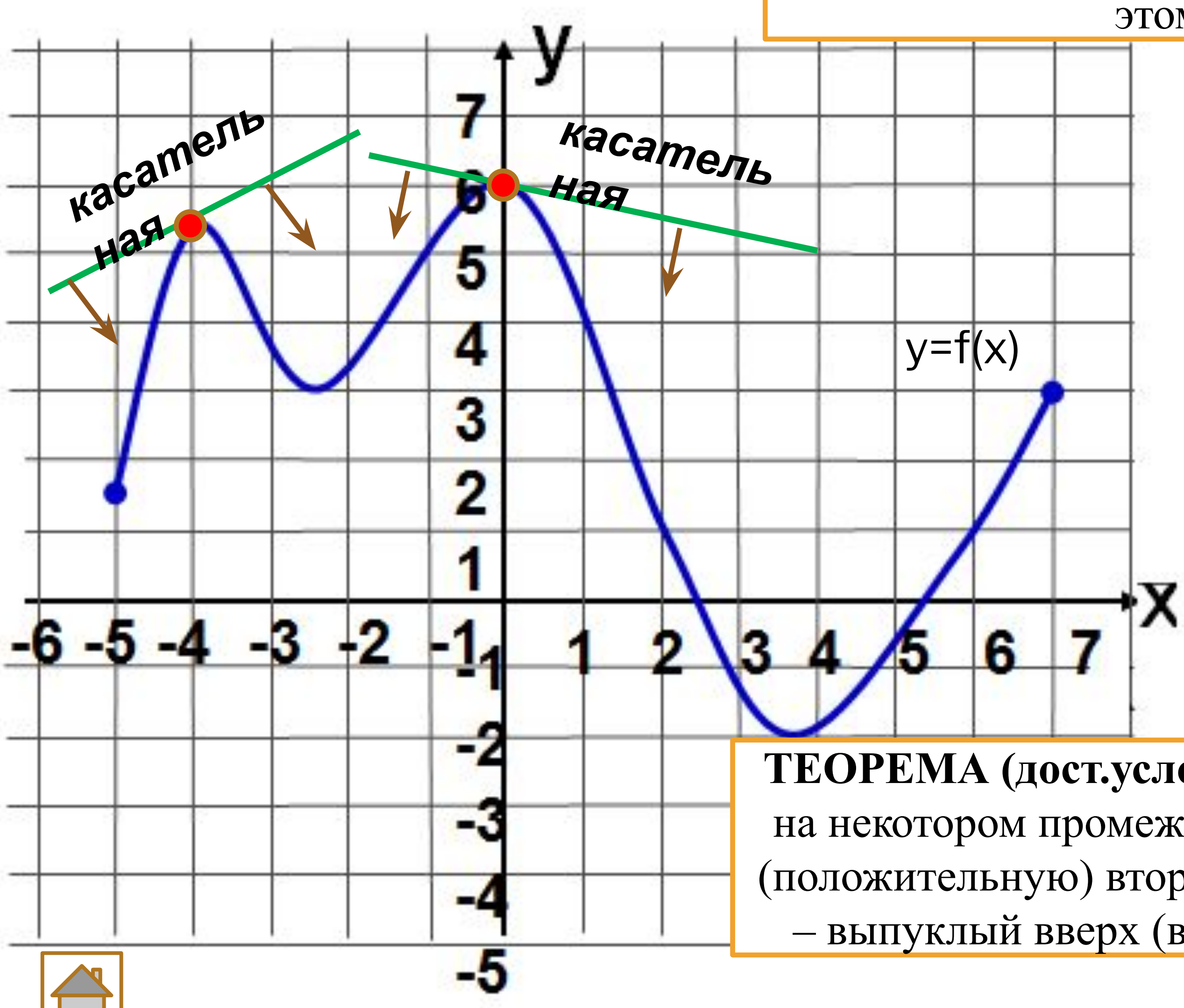
Теорема (достаточное условие экстремума)

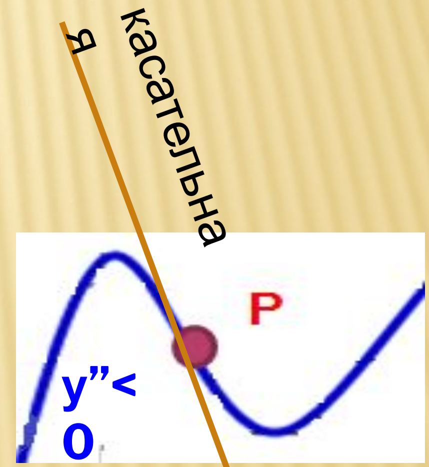
Если при переходе через критическую точку x_0, производная меняет свой знак с "+" на " − " , то x_0 − точка max,

если с "-" на "+", x_0 − точка min

2. Выпуклость функции

График функции y=f(x) называется ***выпуклым вверх (вниз)*** на промежутке (a,b), если он расположен ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале.



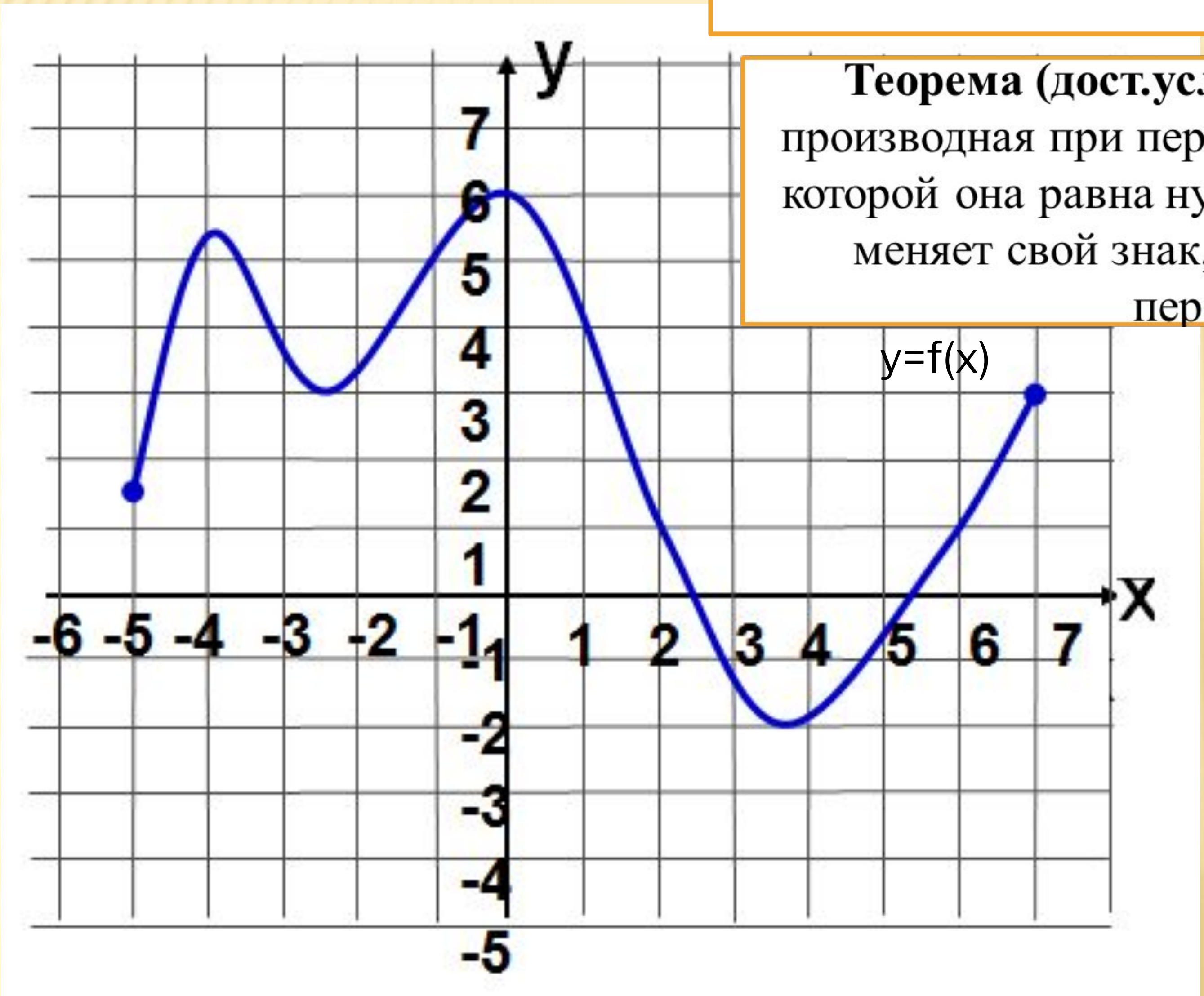


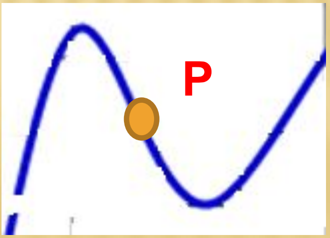
ТЕОРЕМА (дост.условие): Если функция y=f(x) на некотором промежутке имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график – выпуклый вверх (вниз) на этом промежутке.

Точки перегиба

Опр. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба .

Теорема (дост.условие). Если вторая производная при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет свой знак, то точка x_0 - точка перегиба





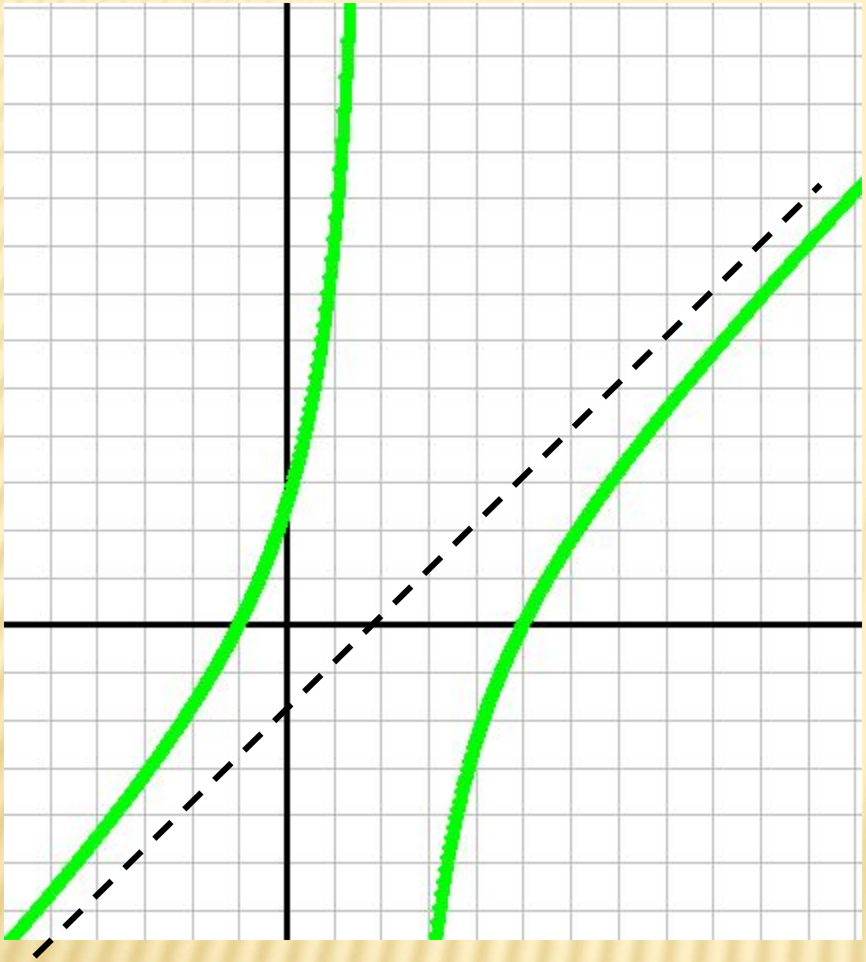
АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

- **Опр**. Прямая называется ***асимптотой*** графика функции, если расстояние от точек графика до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Опр. Прямая **x=a** называется **вертикальной асимптотой** для y=f(x), если $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$

Опр. Прямая y=b называется горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$



Опр. Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ является прямая $y=kx+b$, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Спасибо за внимание!