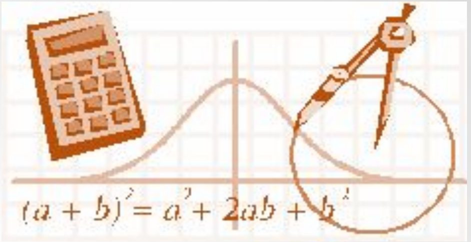
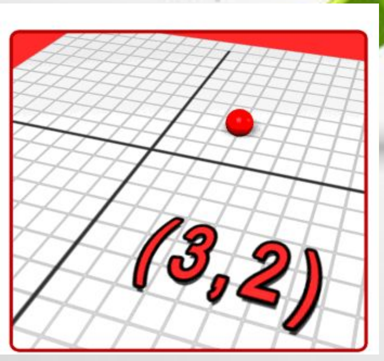
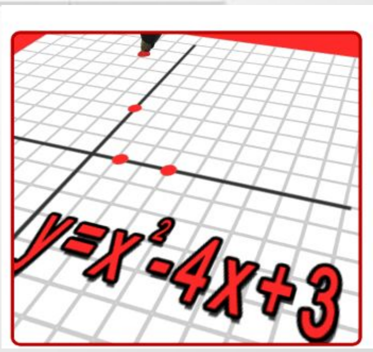
Функции, их свойства и графики



Автор: Кудина Любовь Васильевна
Преподаватель математики





Цели урока:

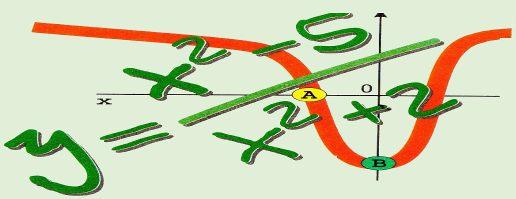
Ознакомиться с понятием «функция», закрепить его на примерах

Усвоить новые термины

Узнать методы исследования функции

Закрепить знания по теме при решении задач

Научиться строить графики функций



Немного истории

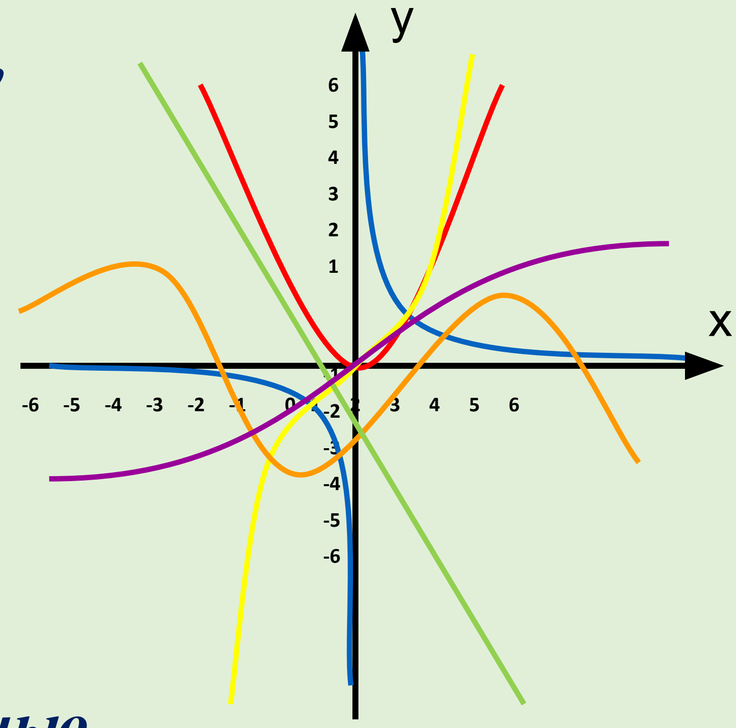
Слово "функция" (от латинского functio — совершение, выполнение) впервые употребил в 1673 г. немецкий математик Лейбниц.

В главном математическом труде "Геометрия" (1637) Рене Декарта впервые введено понятие переменной величины, создан метод координат, введены значки для переменных величин (x, y, z, ...)

Определения функции «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств» сделал в 1748 г. немецкий и российский математик Леонард Эйлер

Определение.

«Зависимость переменной у от переменной х, при которой каждому значению переменной х соответствует единственное значение переменной у, называют функцией».



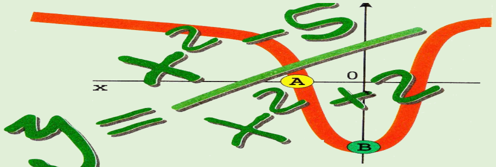
Символически функциональная зависимость между переменной у (функцией) и переменной х (аргументом) записывается с помощью равенства $y = f(x)$

Способы задания функций: табличный (таблица), графический(график), аналитический (формула).

Коломина Н.Н.

Общая схема исследования функции

1. Область определения функции. 2. Исследование области значений функции.
3. Исследование функции на четность.
4.Исследование промежутков возрастания и убывания функции.
5. Исследование функции на монотонность.
5. Исследование функции на экстремум.
6. Исследование функции на периодичность.
7. Определение промежутков знакопостоянства. 8. Определение точек пересечения графика функции с осями координат.
9. Построение графика функции.



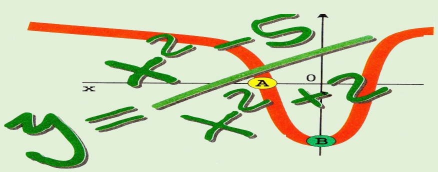
Коломина Н.Н.

$\frac{1}{x}$

Область определения функции

Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.

Например, для функции $y=x$ областью определения является множество всех действительных значений чисел R ; для функции $y=1/x$ областью определения является множество R кроме $x=0$.



Коломина Н.Н.

Найдите область определения функции, график которой изображен на рисунке.

П

Верно!

1 [-

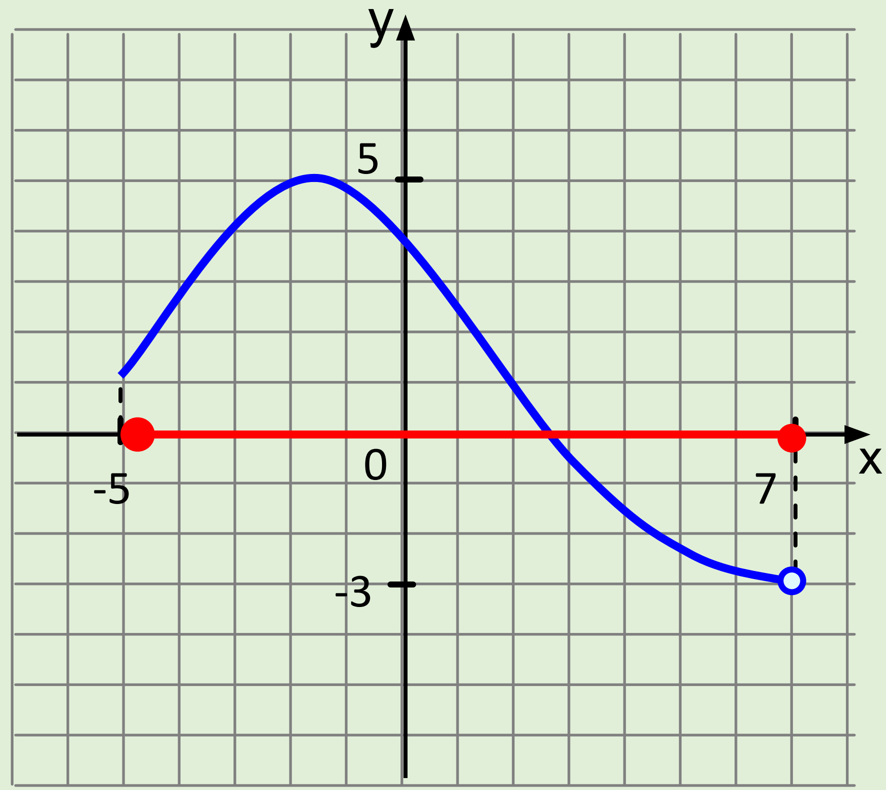
2 [

Подумай!

3 [-

Подумай!

4 (-3;5]



Проверка (1)

Область определения функции – значения, которые принимает независимая переменная х.

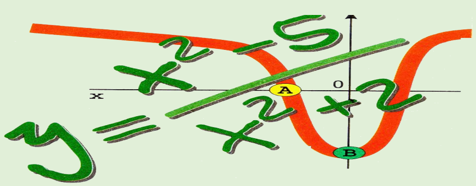
Коломина Н.Н.

Множество значений функции.

Множеством значений функции называется множество всех действительных значений функции y, которые она может принимать.

Например, множеством значений функции $y = x+1$ является множество R,

множеством значений функции $y = X^2 + 1$ является множество действительных чисел, больше или равных 1.



Коломина Н.Н.

Найдите множество значений функции,
к которой изображен на рисунке.

Подумай!

1 [-6;6

Подумай!

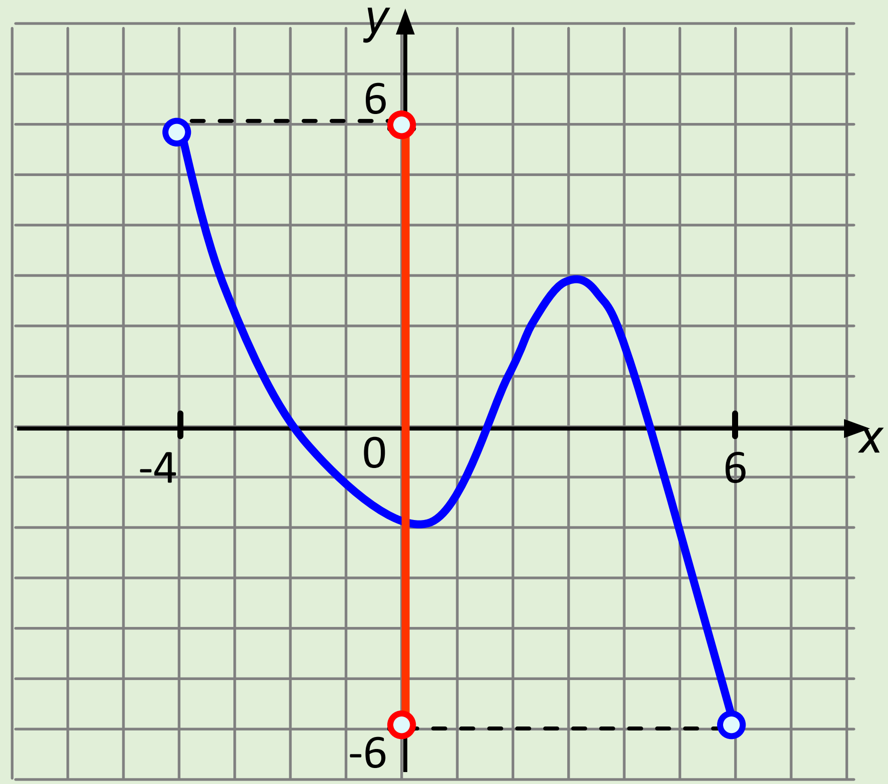
2 [-

Верно!

3 (-6;

Подумай!

4 (-4;6)



Проверка (1)

Множество значений функции – значения, которые принимает зависимая переменная у.

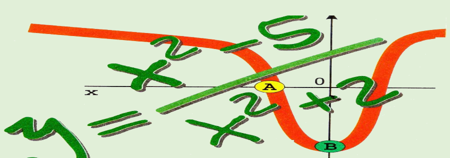
Коломина Н.Н.

Исследование функции на четность.

Функция $y = f(x)$ называется четной , если при всех значений x в области определения этой функции при изменения знака аргумента на противоположный значение функции не изменяется, т.е. $f(-x) = f(x)$.

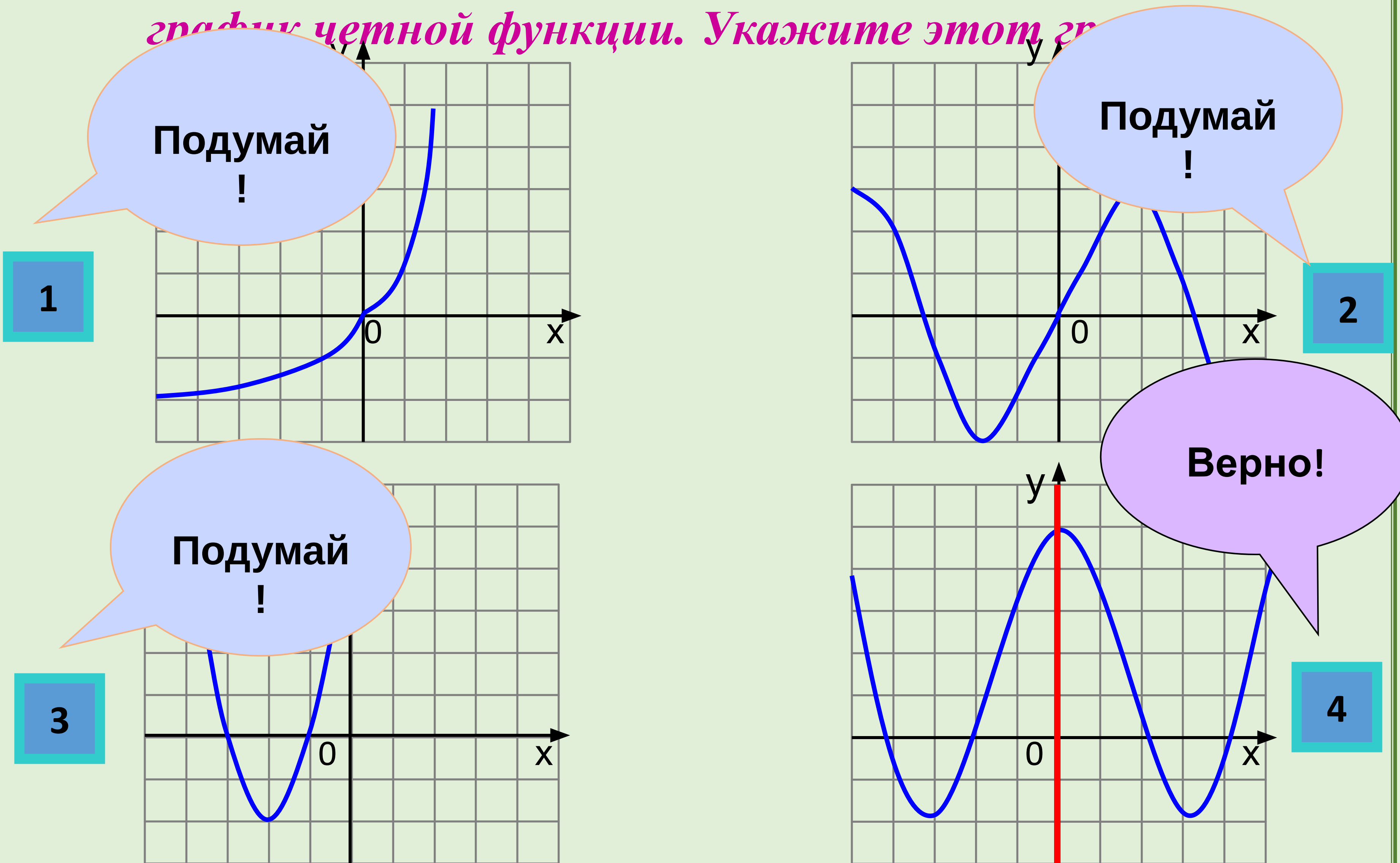
Например, парабола $y = x^2$ является четной функцией, т.к. $(-x^2) = x^2$.

График четной функции симметричен относительно оси Оу.



Коломина Н.Н.

На одном из следующих рисунков изображен график четной функции. Укажите этот гр



Проверка (1)

График симметричен относительно оси Оу

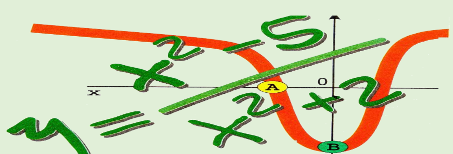
Функция $y = f(x)$ ***называется нечетной, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный функция изменяется только по знаку, т.е.*** $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = x^3$ ***– нечетная, т.к.*** $(-x)^3 = -x^3$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

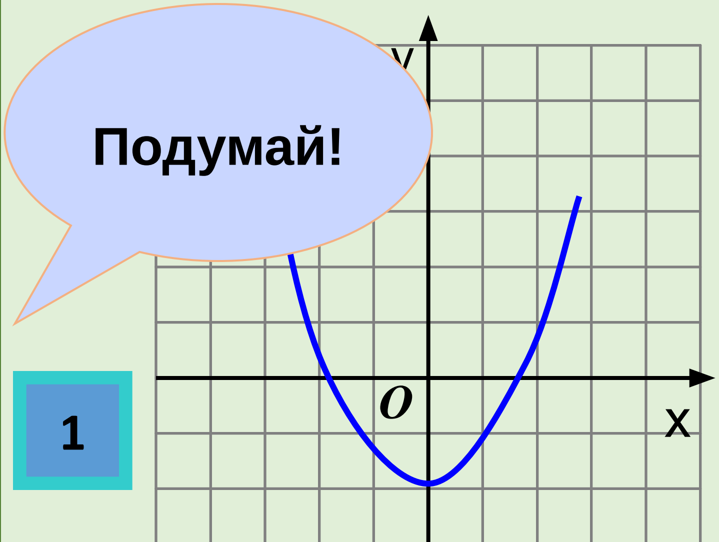
Свойством четности или нечетности обладает не всякая функция. Например, функция $f(x) = x^2 + x^3$ ***не является ни четной, ни нечетной:***

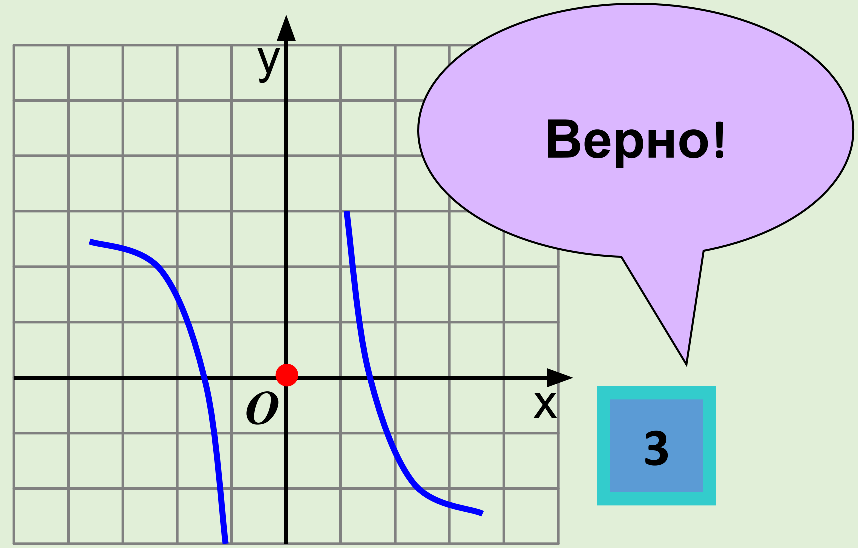
$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3; \qquad x^2 + x^3 \neq x^2 - x^3;$$

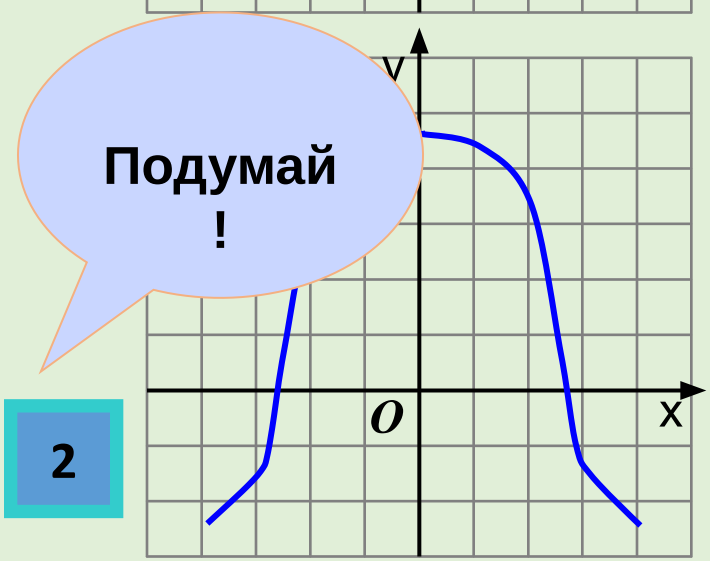


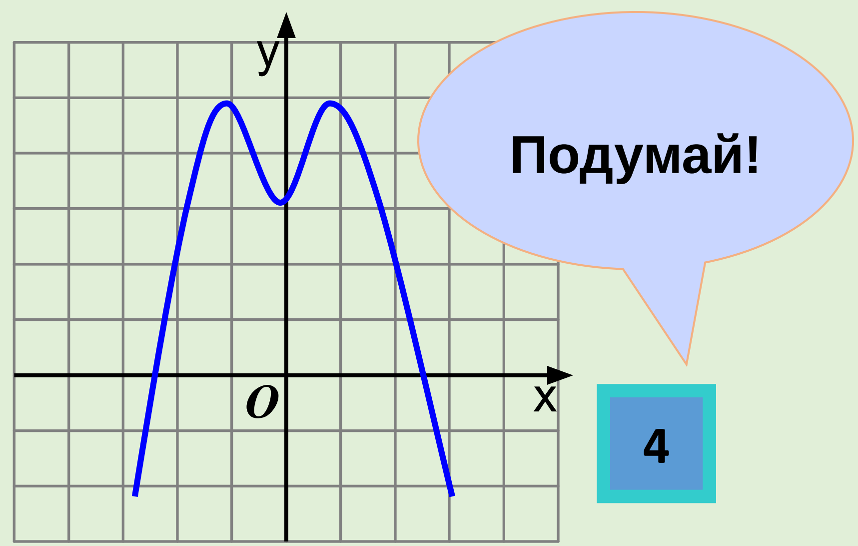
Коломина Н.Н.

На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот график.









Проверка (1)

График симметричен относительно точки О.

<

Определение промежутков возрастания и убывания

Среди множества функций есть функции, значения которых с увеличением аргумента только возрастают или только убывают. Такие функции называются возрастающими или убывающими.

Функция называется возрастающей в промежутке а $<$ х $<$ в, если для любых X_1 и X_2, принадлежащих этому промежутку, при $X_1 < X_2$ имеет место неравенство

$_1 < \quad _2$

Функция называется убывающей в промежутке а $<$ х $<$ в, если для любых X_1 и X_2, принадлежащих этому промежутку, при $X_1 < X_2$ имеет место неравенство

$_1 > \quad _2$

На рисунке изображен график функции y = f(x), заданной на промежутке (-5;6). Укажите промежутки, где функция возрастает.

Подумай !

1 [-6

Подумай!

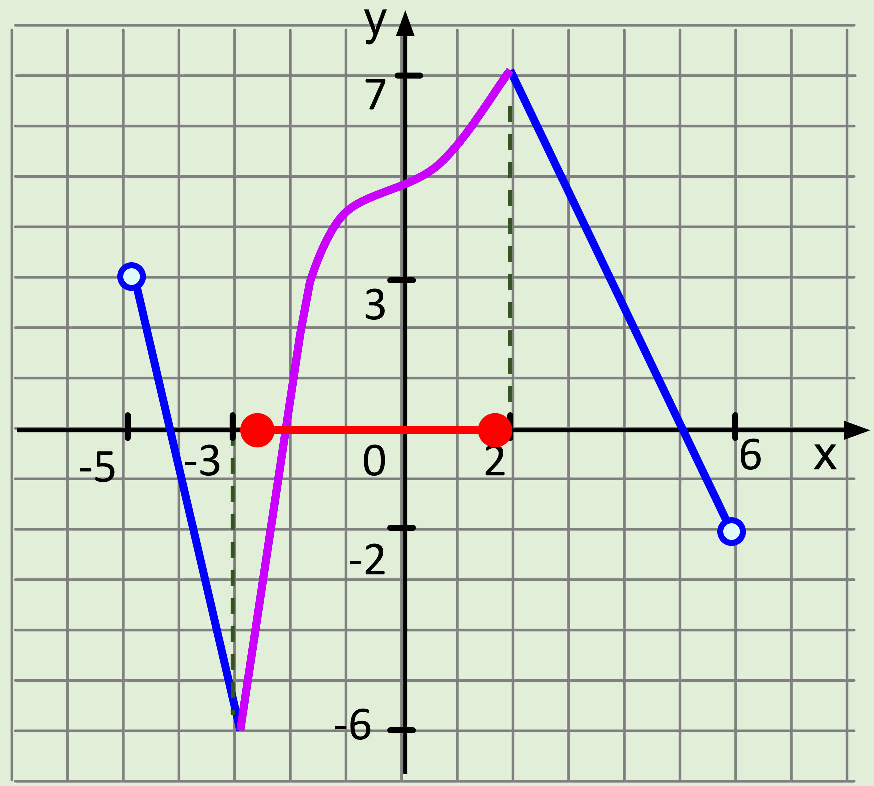
2 [-5

Подумай!

3

Верно!

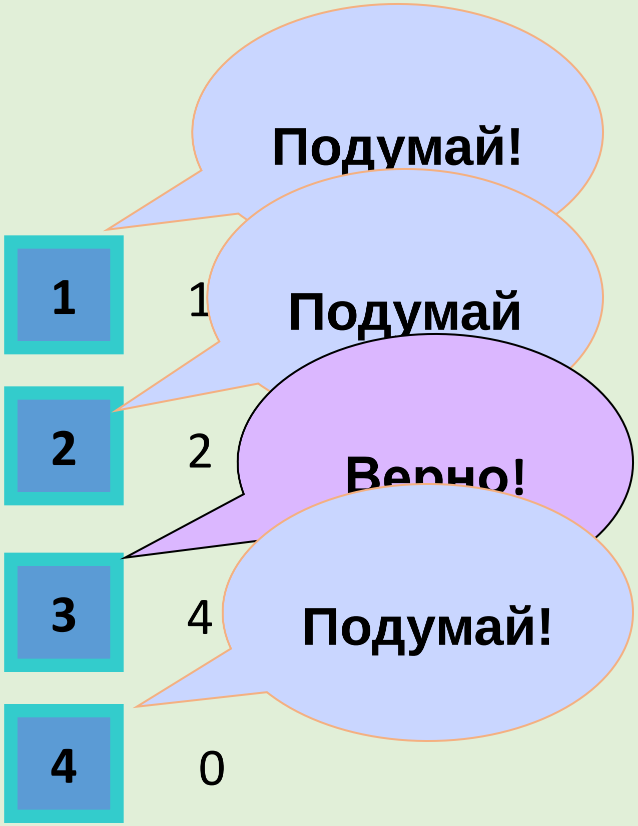
4 [-3;2]

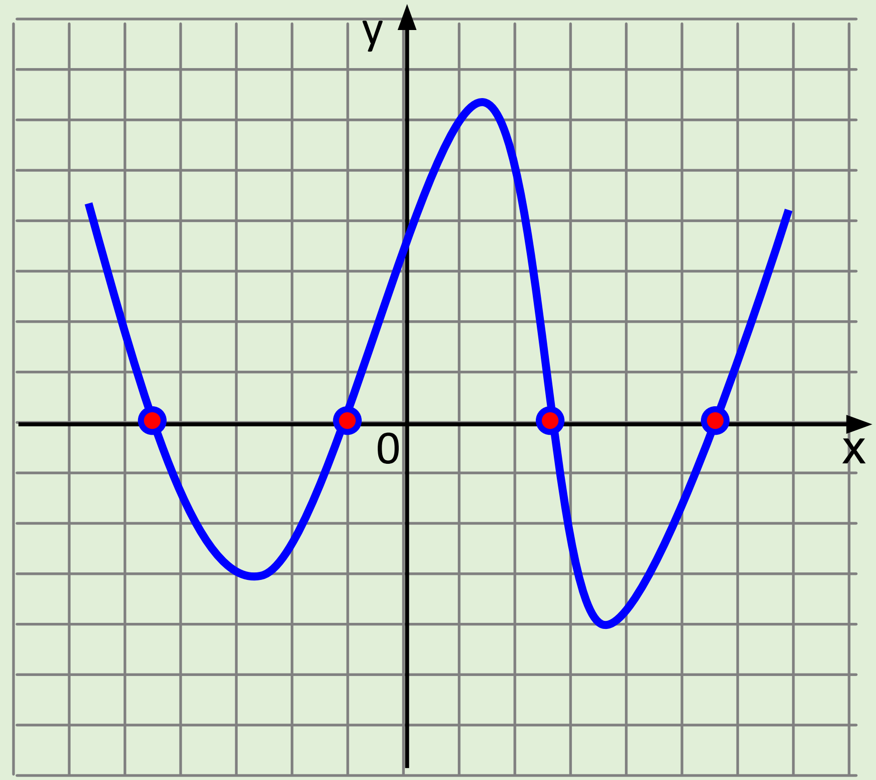


Проверка (1)

Коломина Н.Н.

На рисунке изображен график функции y = f(x). Укажите количество нулей функции.





Проверка (1)

Нуль функции – значение x, при котором y = 0. На рисунке – это точки пересечения графика с осью Ox.

Какие из функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$1)\, y = 5^x$ $\quad$ $возрастающая, т.к. 5 > 1$

$2)\, y = 0{,}5^x$ $\quad$ $убывающая, т.к. 0 < 0{,}5 < 1$

$3)\, y = 10^x$ $\quad$ $возрастающая, т.к. 10 > 1$

$4)\, y = \pi^x$ $\quad$ $возрастающая, т.к. \pi > 1$

$5)\, y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad$ $убывающая, т.к. 0 < \frac{2}{3} < 1$

$6)\, y = 49^{-x}$ $\quad$ $убывающая, т.к. 49^{-1} = \frac{1}{49} и\, 0 < \frac{1}{49} < 1$

Коломина Н.Н.

Исследование функции на монотонность.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - промежутками монотонности.

Например, функция $y = x^2$ при $x < 0$ монотонно возрастает.

Функция $y = x^3$ на всей числовой оси монотонно возрастает, а

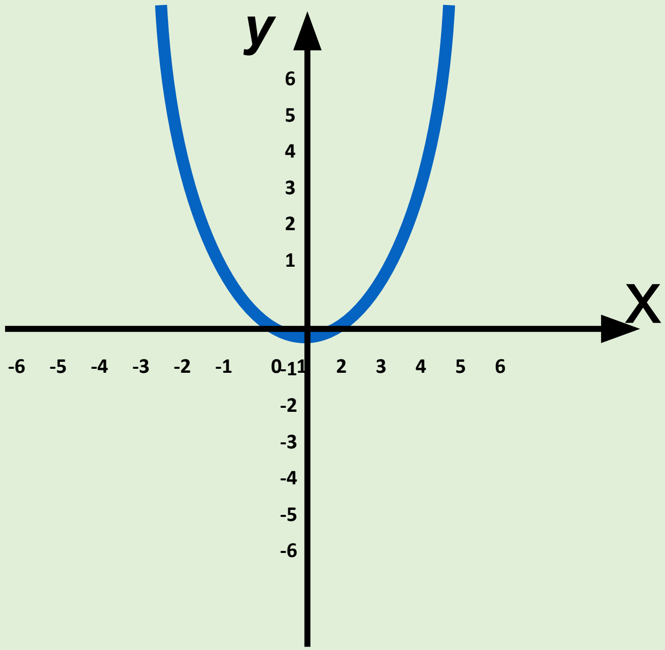
функция $y = -x^3$ на всей числовой оси монотонно убывает.

Коломина Н.Н.

Исследовать функцию на монотонность

Функция $y=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Функция $y=x^2$
при $x<0$ монотонно убывает,
при $x>0$ монотонно возрастает

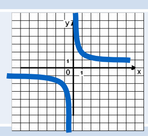
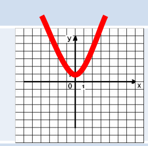
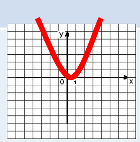
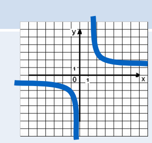
Обратная функция

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при единственном значении x, то такую функцию называют обратимой.

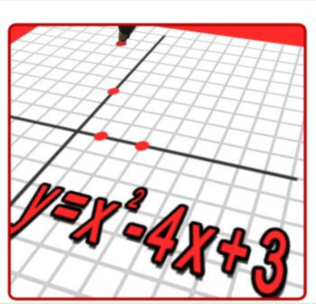
Например, функция $y=3x+5$ является обратимой, т.к. каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Напротив, функция $y= 3X^2$ не является обратимой, поскольку, например, значение $y=3$ она принимает и при $x=1$, и при $x=-1$.

Для всякой непрерывной функции (такой, которая не имеет точек разрыва) существует монотонная однозначная и непрерывная обратная функция.

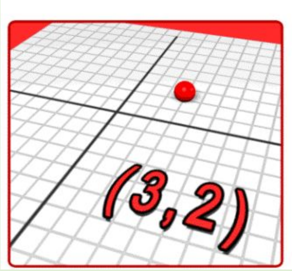
Диктант

№	Вариант-1	№	Вариант-2
Найти область определения функции			
1	$y=\sqrt{x^2-1}$	1	$y=\dfrac{x+1}{x^2+2}$
Найти область значений			
2	$y=\dfrac{x+1}{x^2+2}$	2	$y=\sqrt{x^2-1}$
Указать способ задания функции			
3	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline \boldsymbol{x} & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \boldsymbol{y} & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \hline\end{array}$	3	$h(x)=\begin{cases} x+3, x<-3; \\ x^2+3, x\geq -3. \end{cases}$
Исследовать функцию на четность			
4		4	
Исследовать промежутки возрастания и убывания функции.			
5		5	

Функции.



1. Линейная функция
2. Квадратичная функция
3. Степенная функция
4. Показательная функция
5. Догарифмическая функция
6. Тригонометрическая функция



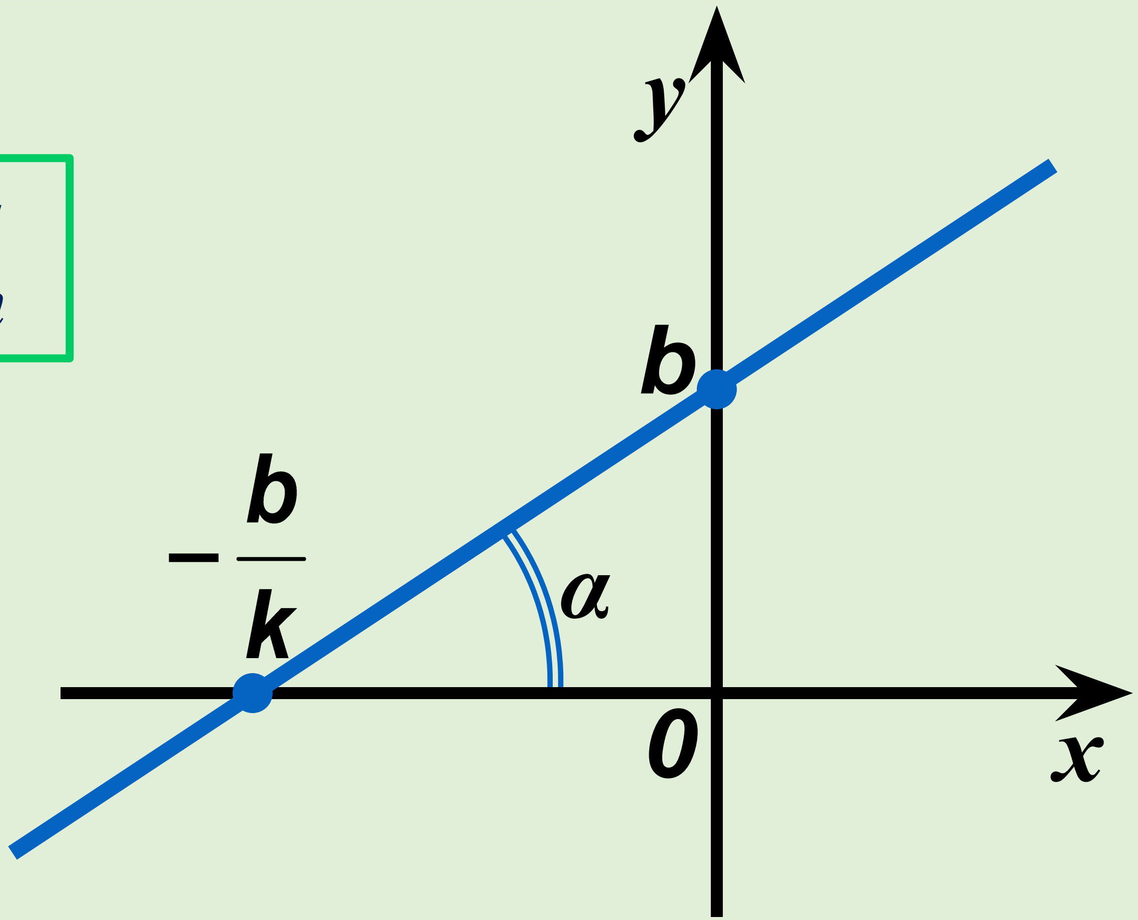
Линейная функция

$$y = kx + b$$

b – свободный коэффициент

k – угловой коэффициент

$$k = \mathrm{tg}\,\alpha$$



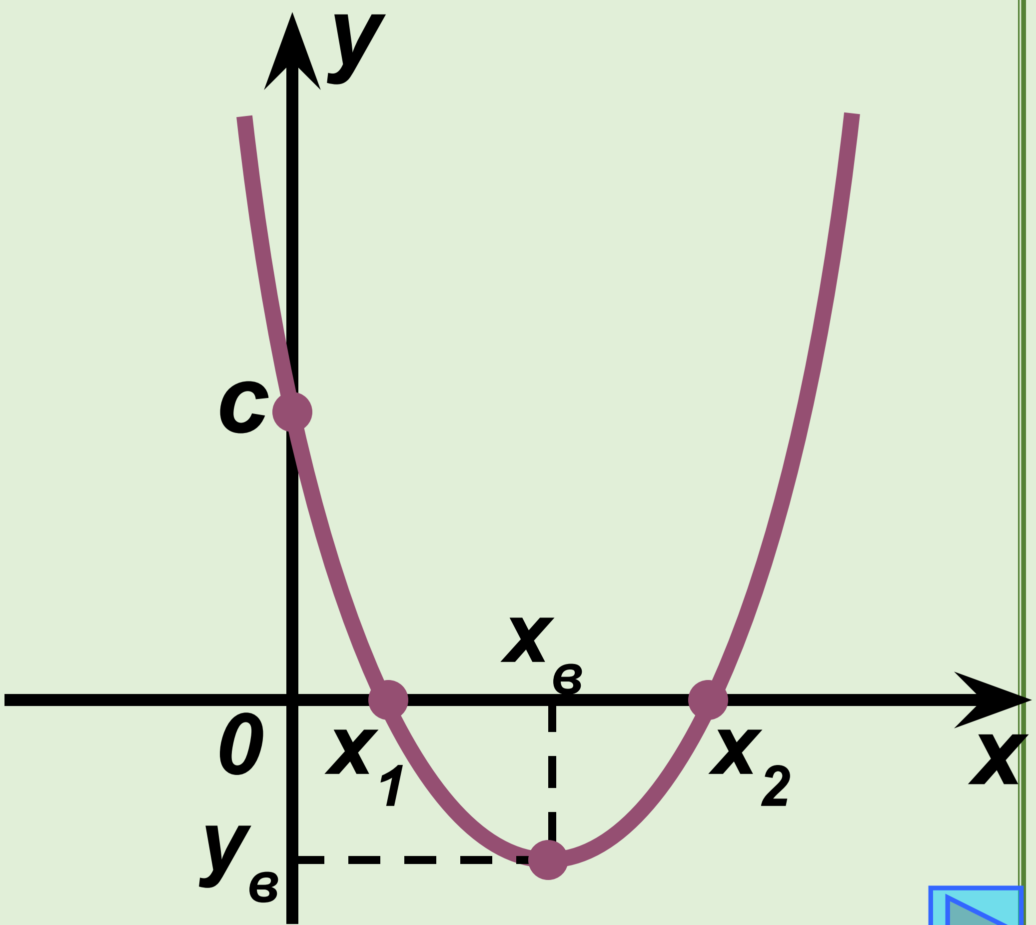
Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_в = -\frac{b}{2a}$$

$$y_в = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

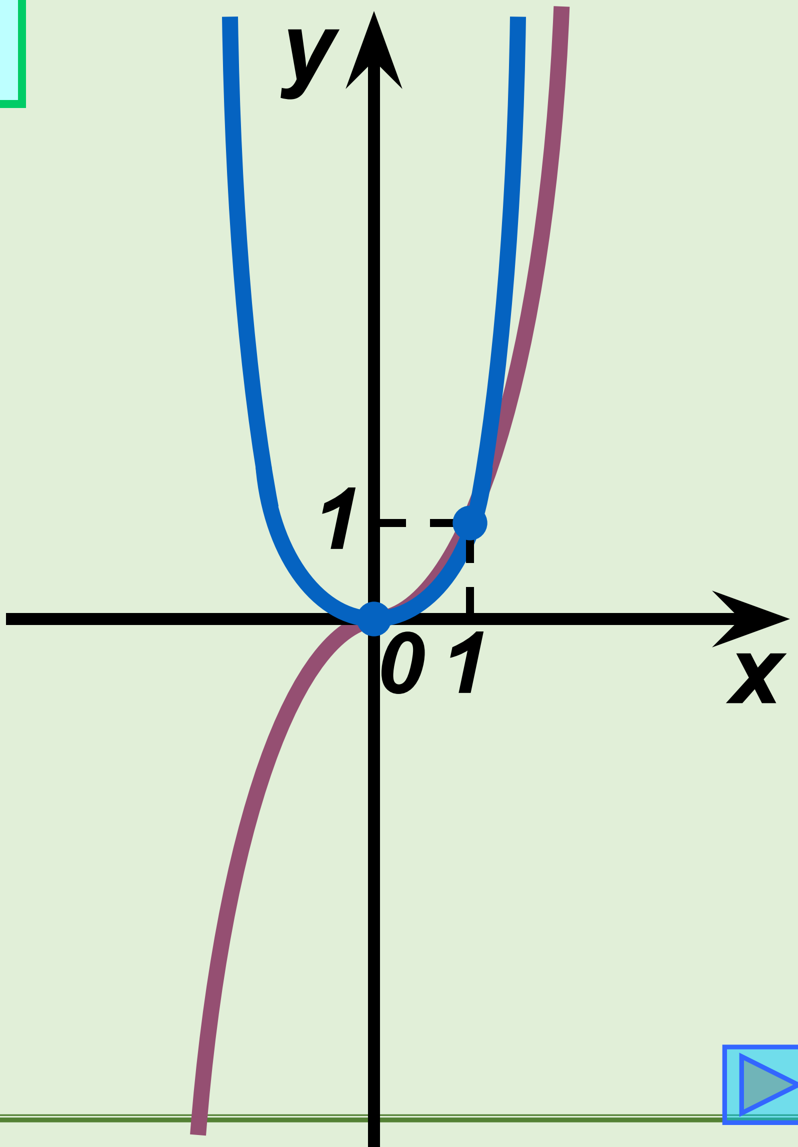


Степенная функция

$$y = x^n$$

$y = x^n$, где $n = 2k$, k □ Z

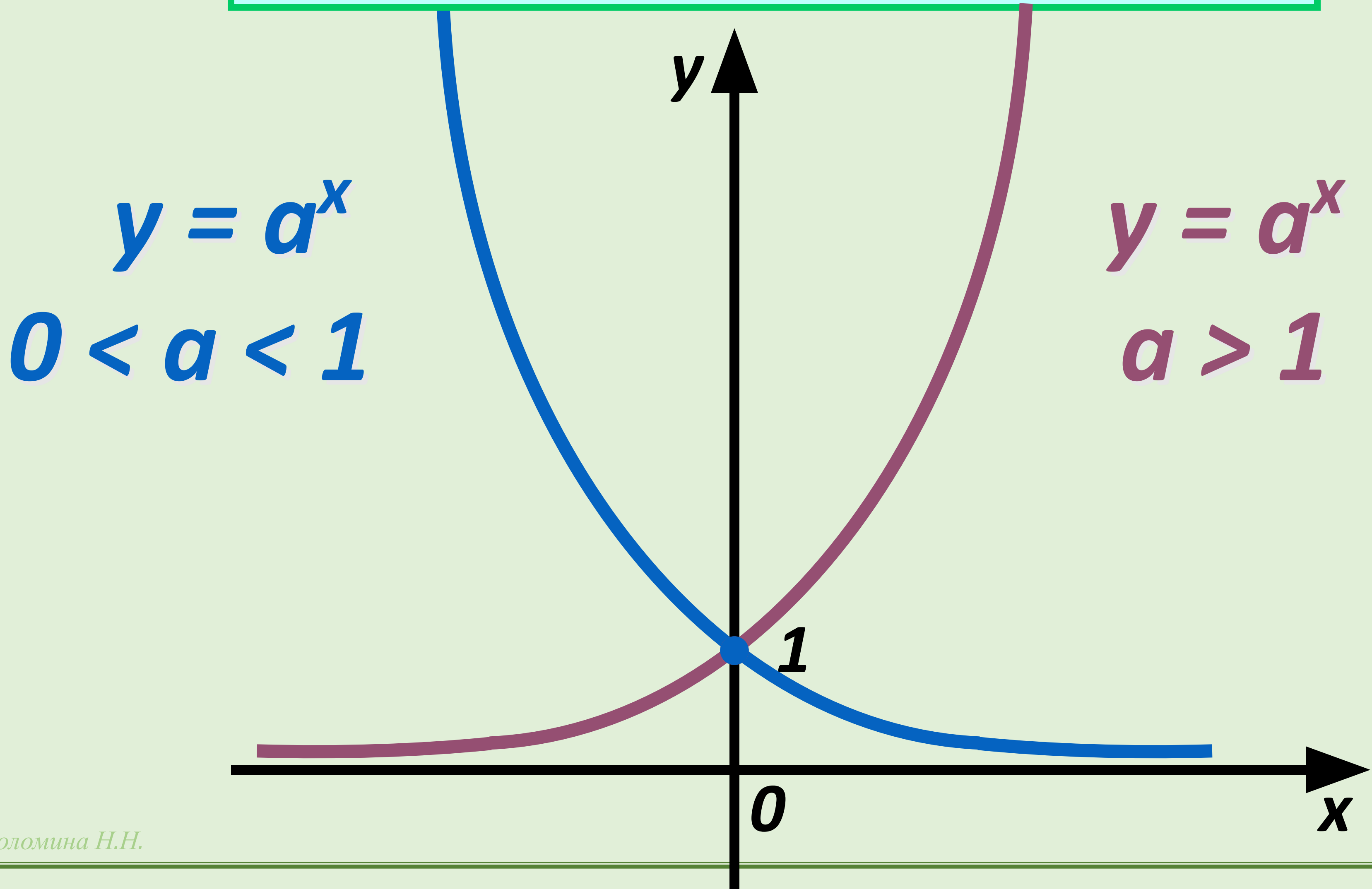
$y = x^n$, где $n = 2k+1$, k □ Z



Коломина Н.Н.

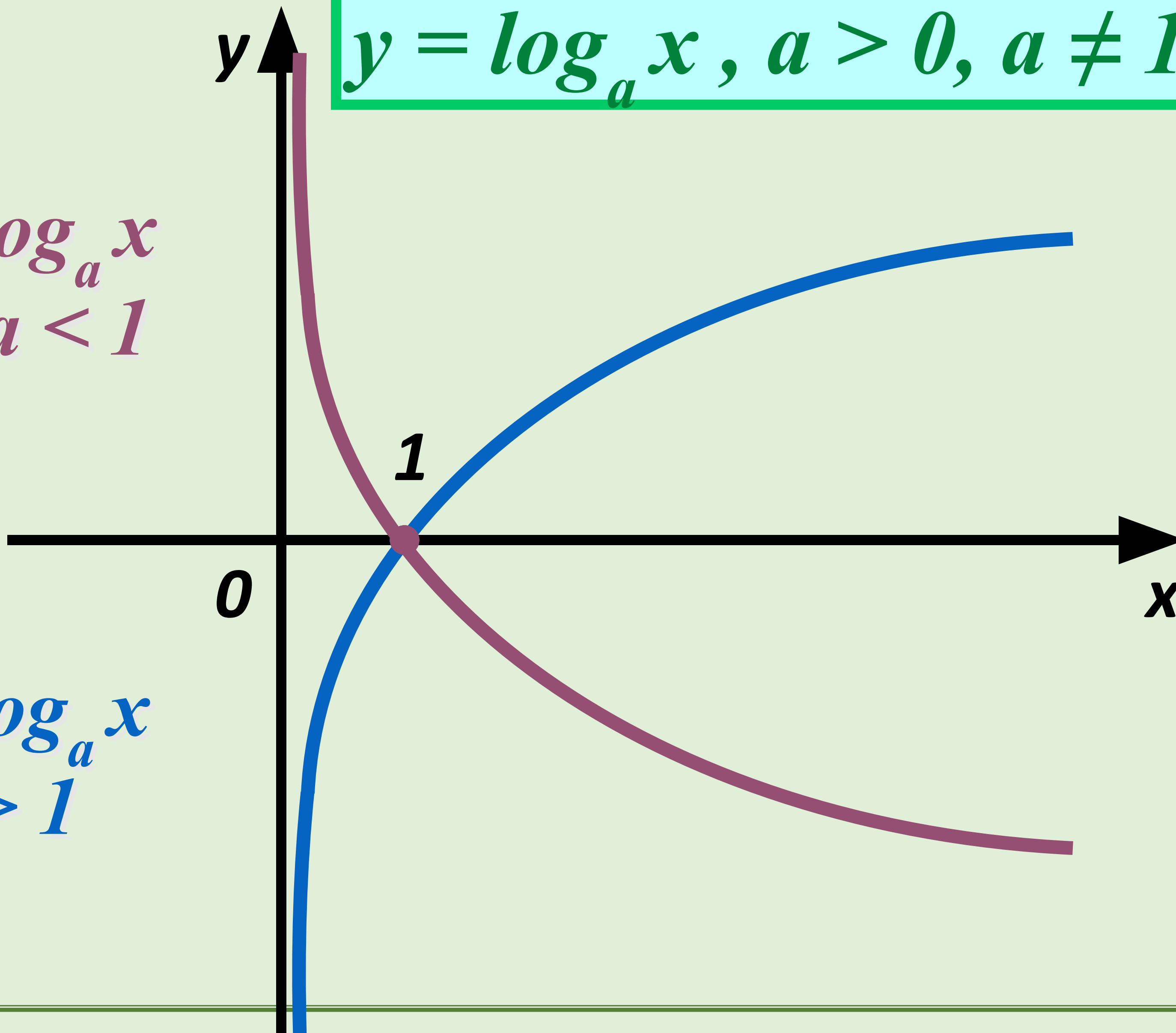
Показательная функция

$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$



Логарифмическая функция

$y = \log_a x\ ,\ a > 0,\ a \neq 1$



$y = \log_a x$

$0 < a < 1$

$y = \log_a x$

$a > 1$

Самостоятельная работа

Построить графики функций и найти:

1. D(y)-область определения;
2. E(y)-множество её значений;
3. Проверить на чётность (нечётность);
4. Найти промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства;
5. Определить точки пересечения с осями

Вариант-1

1. $y = 2x^2 - 4x + 5$
2. $y = \frac{1}{4x - 2}$
3. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
4. $y = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$
5. $y = x^3$

Вариант-2

1. $y = (x - 5)^2 + 3$
2. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 9x + 20}$
3. $y = \log_2 x$
4. $y = 2x^2 + 4x - 8$
5. $y = x^3 + 1$

Вопросы для повторения

1.Сформулируйте определение функции.
2.Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью изменения функции?
4.Какими способами может быть задана функция?
5.Как находится область определения функции?
6.Какие функции называются четными и как они исследуются на четность?
7.Какие функции называются нечетными и как они исследуются на нечетность?
8.Приведите примеры функций, которые не являются ни четными, ни нечетными.
9.Какие функции называются возрастающими? Приведите примеры.
10.Какие функции называются убывающими? Приведите примеры.
11.Какие функции называются обратными?
12.Как расположены графики прямой и обратной функций?