

Кривые второго порядка

Повторение

- Какие линии на плоскости вы можете построить?
- Какими уравнениями эти линии можно задать?
- Выделить среди приведенных уравнений уравнения первого порядка, уравнения второго порядка.

$$y = kx + b$$

Кубическую параболу

$$y = ax^2 + bx + c$$

прямую

$$y = \sqrt[n]{x}$$

параболу

$$y = \frac{k}{x}$$

гиперболу

Определение

- Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Γ , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты A , B и C равны одновременно нулю.

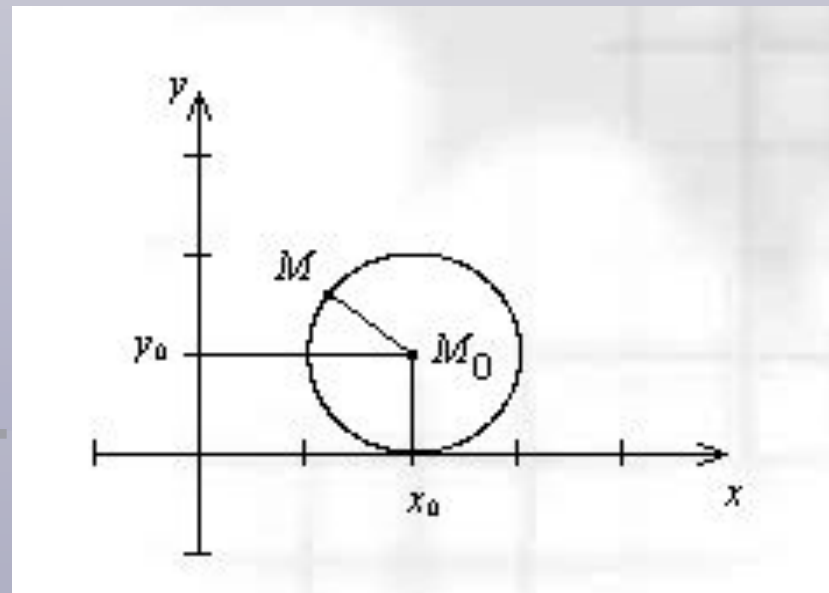
Виды кривых второго порядка

1. Окружность.

Определение:

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от одной точки, называемой центром.

M_0 – центр окружности,
 M_0M - радиус



Уравнение окружности

- Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиуса R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

- Пример 1: Написать уравнение окружности с центром в точке $C(3;5)$ и радиусом $R=3$.
- Если центр окружности в начале системы координат, то уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Решение : $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$



Вывод уравнения окружности

$$M(x; y), M_0(x_0; y_0) \Rightarrow$$

$$|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$|M_0M| = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



Окружность

- Пример 2: Найти центр и радиус окружности и построить ее

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

- Решение:

$$R=10, M_0(-3;2)$$

Окружность

- Пример 3: Доказать, что уравнение задает окружность, найти координаты центра и радиус, построить окружность

$$x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$$

- Решение:

$$R=5, M_0(1;-2)$$

Окружность

- Пример 4.

Дана окружность $x^2+y^2-4x+2y-15=0$ и хорда $x+y-7=0$. Найти длину этой хорды.

Решение:

1. Найти уравнение окружности.
2. Построить чертеж
3. Решить систему, найти точки пересечения линий
4. Найти расстояние между двумя точками

Окружность

- Пример 5.

Дана окружность $(x+2)^2+(y+3)^2=13$ и точка на ней с ординатой, равной нулю. Найти ее абсциссу.

- Пример 6.

Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2,-2)$.

Окружность

- Пример 7.

Окружность касается обеих осей координат и проходит через точку $A(2;9)$. Написать уравнение этой окружности.

- Пример 8.

Окружность касается оси Oy в точке $A(0;-3)$ и имеет радиус $r=2$. Написать уравнение этой окружности.

Домашнее задание

- Построить окружности:
 $(x+3)^2+(y-2)^2=16$ и $x^2+(y-4)^2=25$
- Найти координаты центра и длину радиуса окружности $x^2+y^2-6x-8y=0$.
- Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и проходящей через точку $A(0;-8)$.

Виды кривых второго порядка

2. **Эллипс**

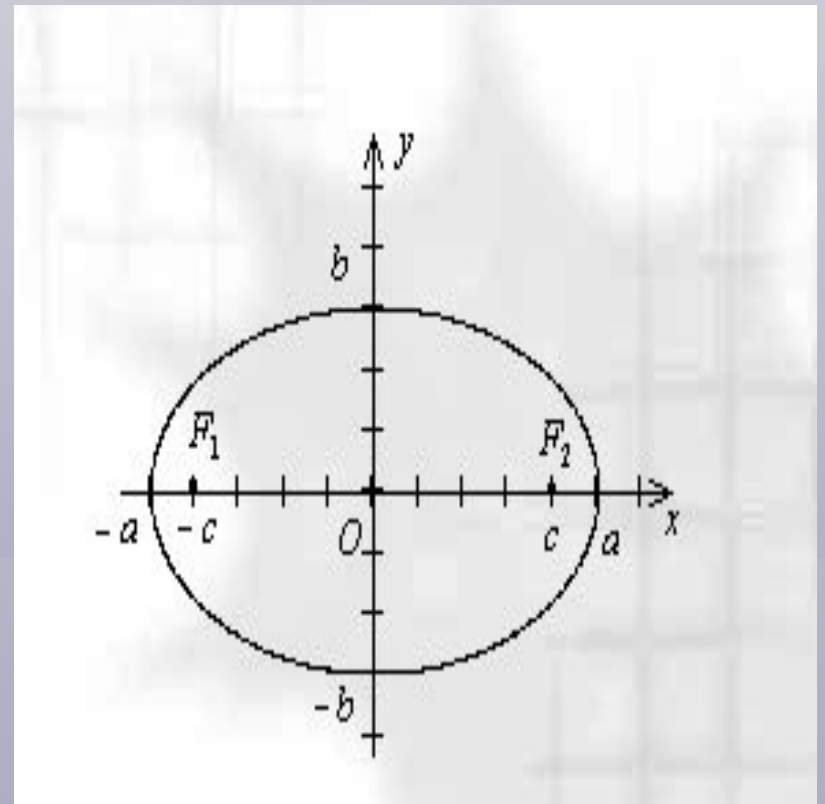
Определение:

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и больше расстояния между фокусами

Эллипс

- F_1 и F_2 – фокусы,
- $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$
- F_1F_2 – фокальной расстояние
- $|F_1F_2|=2a$

Пусть $M(x;y)$ – точка на эллипсе, то $MF_1=MF_2$



Эллипс

- Вывод уравнения эллипса:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Раскроем скобки, упростим выражение :

Эллипс

- Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

Эллипс

- Число a называется большой полуосью, b – малой полуосью.
- Точки A, A_1, B, B_1 называются вершинами эллипса.
- Точка O – центр эллипса.
- Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между его фокусами к длине большей оси ($a > b$), т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Эллипс

- Располагается симметрично осей.
- Ограничен прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, т.е. вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины, равные $2a$ и $2b$, а диагонали пересекаются в начале координат.

Эллипс

- Пример 1.

Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$. Определить длину его осей, координаты вершин и фокусов, а также величину эксцентриситета.

- Пример 2.

Написать каноническое уравнение эллипса, если фокальное расстояние равно 8, и эллипс проходит через точку $M(0,-3)$

Эллипс

- Пример 3

Определить длину осей и координаты фокусов эллипса $49x^2+24y^2=1176$

- Пример 4

Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A(8;0)$ и $A_1(-8;0)$, а фокусы имеют координаты $(\pm 5;0)$

Эллипс

- Пример 5

Написать уравнение эллипса, координаты фокусов которого $(\pm 3; 0)$, а длина большей оси равна 12.

- Пример 6

Найти эксцентриситет эллипса
 $4x^2 + 9y^2 = 180$

Эллипс

- Если координаты центра эллипса смещены относительно центра, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Эллипс

Пример 7

- Найти координаты центра, длины осей и эксцентриситет эллипса:

$$\frac{(x-5)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

- Построить эллипс

Домашнее задание

- Написать каноническое уравнение эллипса, если даны длины его полуоси $a=5$ и $b=4$.
- Дан эллипс, определить его оси и расстояние между фокусами:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

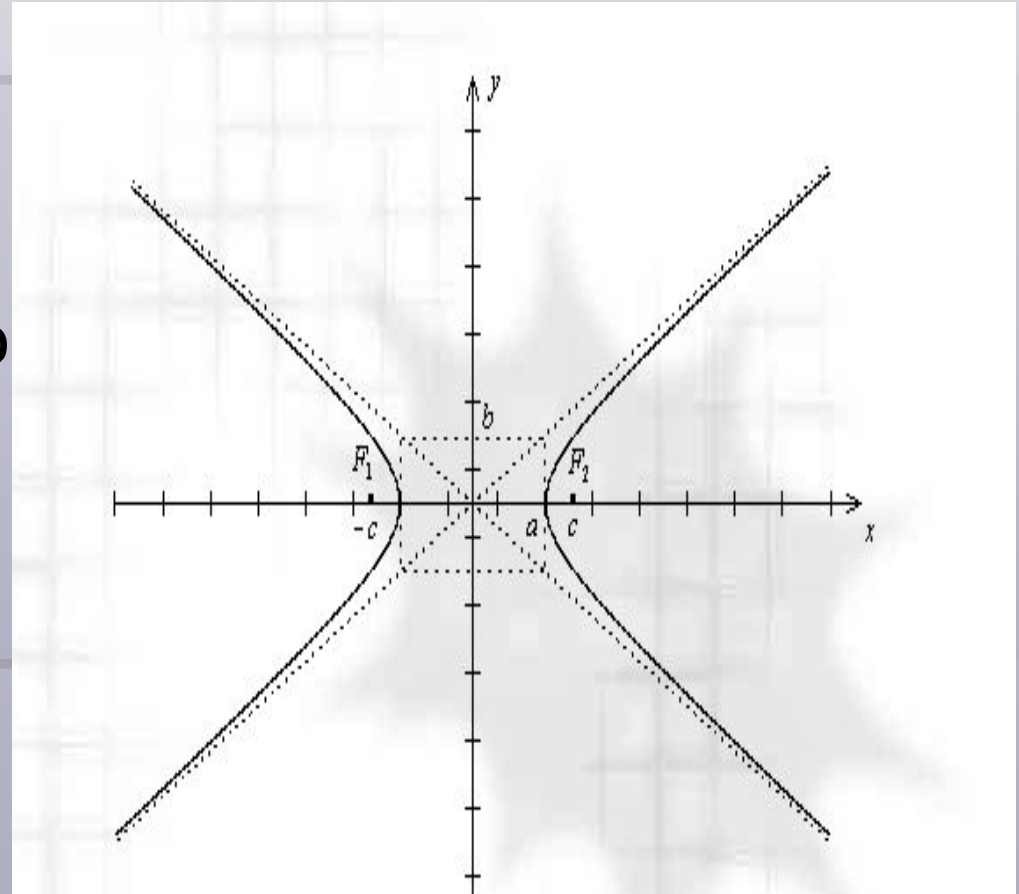
Виды кривых второго порядка

3. Гипербола.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Гипербола

- F_1, F_2 – фокусы гиперболы
- F_1F_2 – фокально расстояние
- $F_1(-c,0), F_2(c,0)$



Вывод формулы уравнения гиперболы

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Раскроем скобки, упростим выражение :

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гипербола

- Гипербола симметрична относительно оси OX , оси OY
- Пересекает ось OX в точках $A1(-a,0), A2(a,0)$ – вершинах гиперболы.
- $O(0,0)$ – центр гиперболы
- $A1A2$ – вещественная ось, $B1B2$ – мнимая ось
- $F1M, F2M$ – фокальные радиусы гиперболы

Гипербола

- Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине вещественной оси, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Гипербола

- Прямые $y = \pm b/a x$ называются асимптотами гиперболы.
- Если длины полуосей гиперболы равны, т.е. $a=b$, то гипербола называется равнобочной.
- Асимптоты равнобочной гиперболы имеют вид: $y = \pm x$

Гипербола

- Пример 1.

Дана гипербола. Узнать, лежит ли точка $A(2; 1,5)$ на какой-либо ее асимптоте.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- Пример 2.

Определить координаты фокусов, длину осей и эксцентриситет гиперболы:

$$24x^2 - 25y^2 = 600$$

Гипербола

- Гипербола называется сопряженной, если ее уравнение имеет вид:
- Гипербола называется равносторонней, если $a=b$, т.е.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

$$\text{ò .} \dot{a}. \quad x^2 - y^2 = 1$$

Гипербола

- Пример 3

Написать уравнение гиперболы, если $b=6$, $c=13$.

- Пример 4.

Написать уравнение гиперболы, у которой вещественная ось равна 8, а расстояние между фокусами, лежащими на оси OX , равно 10.

Гипербола

- Пример 5.

Найти острый угол между асимптотами гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 100$.

Пример 6.

Написать уравнения асимптот, а также найти величину эксцентриситета гиперболы $x^2 - 2y^2 = 6$.

Гипербола

- Уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Домашнее задание

- 1) Написать каноническое уравнение гиперболы, если $a=6$, $b=2$.
- 2) Определить координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы $16y^2-9x^2=144$.

Виды кривых второго порядка

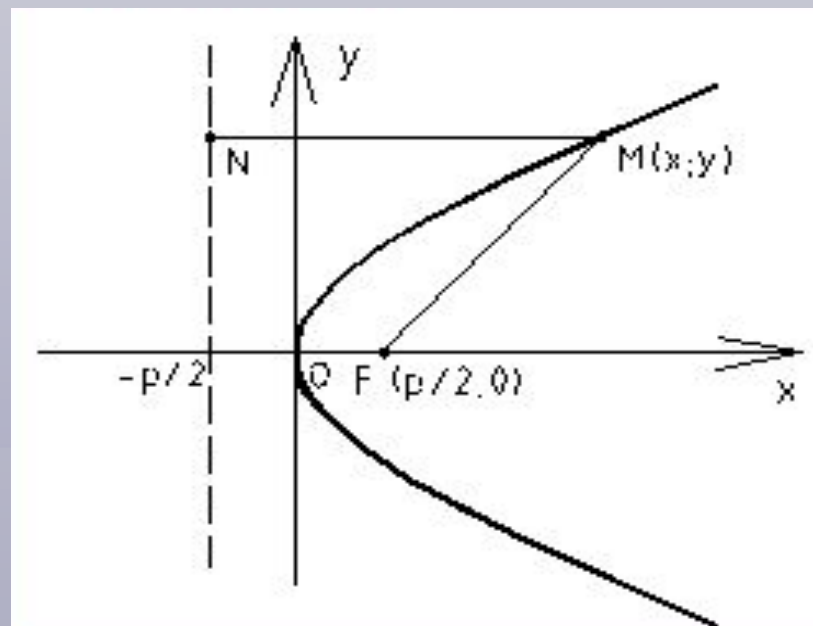
- 4. **Парабола**

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой.

Парабола

- $F(p/2, 0)$ – фокус
- $X=-p/2$ – уравнение директрисы
- $O(0,0)$ - вершина
- Уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$



Парабола

- Парабола проходит через начало координат
- Располагается справа от оси OY если $p > 0$
- Парабола симметрична относительно оси OX
- Если уравнение имеет вид $x^2 = 2py$, то ветви параболы будут направлены вверх.

Парабола

- Пример 1

Построить параболу $y^2=6x$

- Пример 2

Дана парабола $y^2=12x$. Найти координаты ее фокуса и написать уравнение директрисы.

- Пример 3.

Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная, что фокус имеет координаты $F(4,0)$

Парабола

- Пример 4.

Найти точки пересечения параболы $y^2=9x$ с прямой $y=2x+1$

- Пример 5.

Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OY и проходящей через точку $A(-4;-2)$.

Парабола

- Уравнение параболы со смещенным центром задается уравнением:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Парабола

- Пример 6.

Написать уравнение параболы с центром в точке $A(1;1)$, зная что она проходит через точку $M(2;0)$, ее ось симметрии параллельна оси OY .

- Пример 7.

Дана парабола $x^2-6x+8y-15=0$. Найти координаты вершин и фокуса, а также уравнения ее оси симметрии и директрисы.

Домашнее задание

- Выучить лекцию.
- Задача 1.

Построить кривые второго порядка и найти их основные элементы:

$$1) (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

$$2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$3) \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$4) y^2 = 8x$$