ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕДИЦИНСКОЙ ПРАКТИКЕ

План:

1. Основные понятия и определения дифференциального уравнения
2. Методы решения дифференциальных уравнений.
3. Применение дифференциальных уравнений для решения задач.

1. Основные понятия и определения дифференциального уравнения

Уравнения, в которых неизвестными являются не только сами функции, но и их производные называются **дифференциальными уравнениями**.

$$y'+y+3x=0$$

Уравнения, в которых неизвестными являются не только сами функции, но и их производные называются **дифференциальными уравнениями.**

$$y'+y+3x=0$$

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция и её первая производная, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением I порядка**

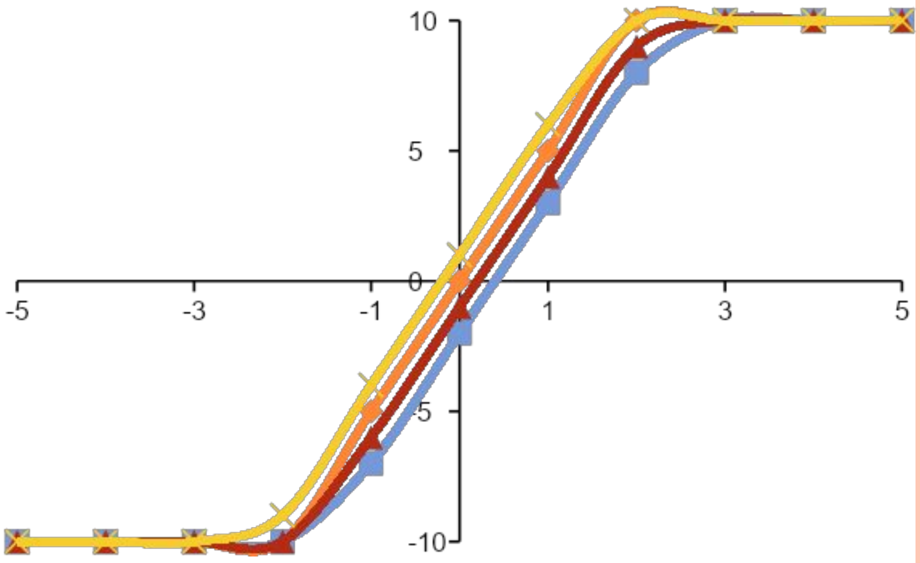
Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция, производные и производная n-го, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением n- порядка.**

Пример: Решить уравнение $y' = 5$

Решение:

$y=5x+C$ – общее решение дифференциального уравнения

Зададим начальные условия : $x_0=0,\ y_0=1$ и подставим в общее решение соответственно вместо x и y. Получаем $y=5x+1$-это частное решение дифференциального уравнения.



Геометрически общее решение $y=5x+C$ представляет собой семейство прямых

Дифференциальное уравнение I порядка

Обыкновенные диф.уравнения
y'=f(x)

диф.уравнения с разделяющимися переменными
y'=f(x)g(y)

Линейные диф. уравнения I порядка
y'+p(x)y=f(x)

Однородные
Если f(x)=0
У'+p(x)y=0
-это уравнение с разделяющимися переменными.

Неоднородные
Если f(x) не равно 0.

2.Метоы решения дифференциального уравнения

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' = f(x)$$

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Пример: Решить дифференциальное уравнение

$y' = 5x + 2$

Решение:

$$y = \int (5x+2)dx = \frac{5x^2}{2} + 2x + C$$

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = f(x)g(y)$$

Решается это уравнение по шагам:

1. $dy/dx=f(x)g(y)$
2. $dy/g(y)=f(x)dx$
3. Интегрируем обе части выражения.
4. Находим первообразные.
5. Выражаем функцию у через х.

Пример: Решить дифференциальное уравнение:

$$y' = x^2 \cdot y$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln y + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2$$

Выражаем функцию y через x:

$$\ln y = \frac{x^3}{3} + C, \text{где} \qquad C = C_2 - C_1$$

$$\ln y = \ln e^{\frac{x^3}{3} + C}$$

$$y = e^{\frac{x^3}{3} + C} = C_0 e^{\frac{x^3}{3}}, \text{где} \qquad C_0 = e^C$$

Линейное дифференциальное уравнение I порядка

y'+p(x)y=f(x)

Если f(x)=0, то уравнение называется ***линейным однородным уравнением:***

y'+p(x)y=0

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx$$

$$\ln|x|=-\int p(x)dx+\ln C \Rightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения: y’+y2cosx=0

Решение:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$ - формула общего решение уравнения

$$\int p(x)dx = \int 2cosxdx = 2\sin x$$

Подставляем в формулу общего решения и получаем:

$$y = Ce^{-2\sin x}$$ - общее решение уравнения

Линейное дифференциальное уравнение I порядка

$y' + p(x)y = f(x)$

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется ***линейным неоднородным уравнением***.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения: y'+yx=3x

Решение:

Формула общего решения уравнения:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}(C+\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

Обозначим: $p(x)=x,\ f(x)=3x$

$$e^{-\int p(x)dx}=e^{-\int xdx}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int 3xe^{\int xdx}dx=\int 3xe^{\frac{x^2}{2}}dx=3\int e^{\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right)=3e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(C+3e^{\frac{x^2}{2}})=Ce^{-\frac{x^2}{2}}+3$$

3. Применение дифференциальных уравнений для решения задач.

Составление и применение дифференциальных уравнений

Решение любой задачи с помощью математического анализа можно разбить на три этапа:

1. **перевод условий задачи на язык математики;**
2. **решение задачи;**
3. **оценка результатов.**

Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке.
Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.
Обозначим через **m** количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения **t**.

Тогда $dm/dt = -km$,

где **k**-постоянная скорости растворения. Минус в уравнении означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

Закон размножения бактерий с течением времени

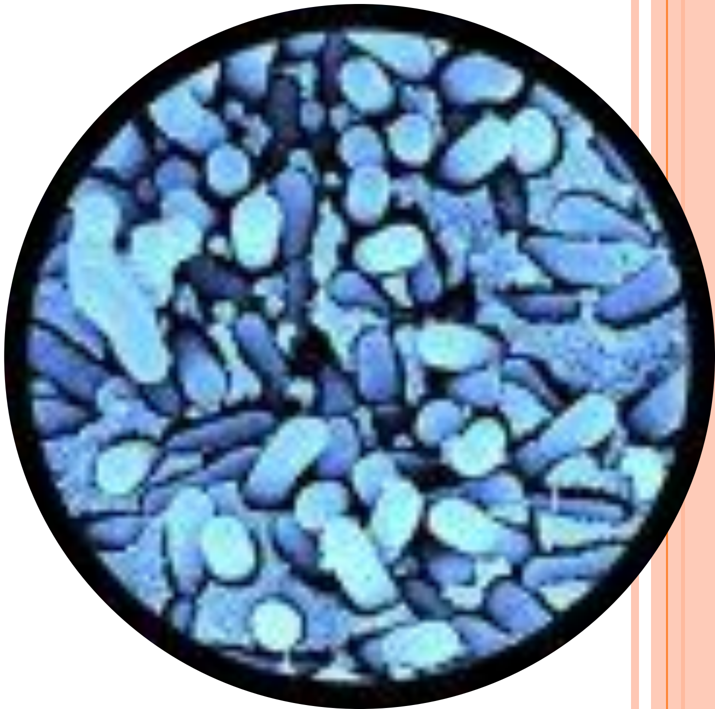
Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент.

Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через **x**.

Тогда $dx/dt=kx$,

где **k** – коэффициент пропорциональности.

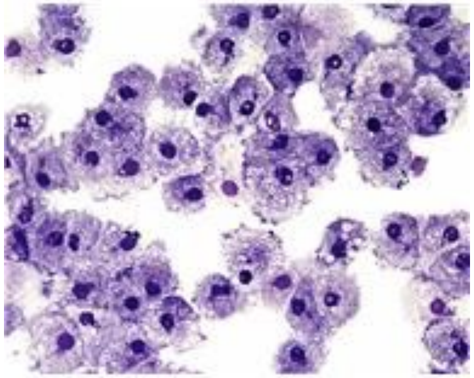


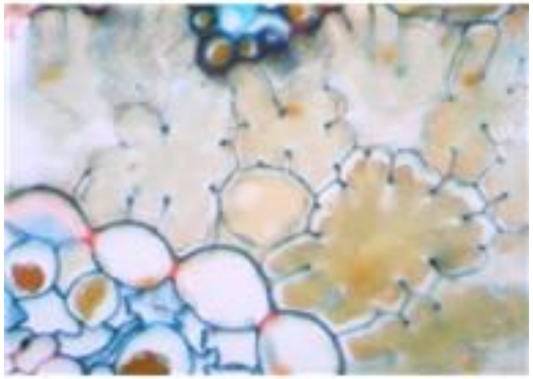
Закон роста клеток с течением времени

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к её объёму сохраняется постоянным, скорость роста клетки ***dl/dt*** пропорциональна длине клетки **l** в данный момент:

$$dl/dt = (\alpha - \beta)\, l$$

где α, β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.





Закон разрушения клеток в звуковом поле

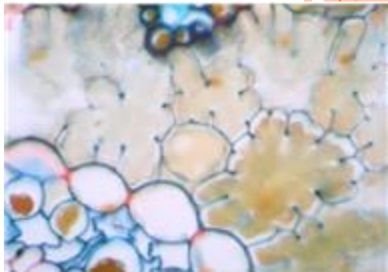
Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие (бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты) могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот. Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов.

Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле.

Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1% популяции остаётся неразрушенным, можно записать:

$$dN/dt = -RN$$

где **N** – концентрация клеток; **t** –время; **R** - постоянная



Внутривенное введение глюкозы

При внутривенном введении глюкозы с помощью капельницы скорость поступления глюкозы в кровь постоянна и равна **С.**

В крови глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Дифференциальное уравнение, описывающее данный процесс:

$$dx/dt = c - \alpha x$$, где

x-количество глюкозы в крови в текущий момент времени;

c-скорость поступления глюкозы в кровь;

α-положительная постоянная

Теория эпидемий

В теории эпидемий при условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер, процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям.

Пусть в начальный момент **t=0**, **a** – число зараженных**,** **b** – число незараженных особей, **x(t)**, **y(t)** – соответственно число зараженных и незараженных особей к моменту времени **t**. В любой момент времени **t** для промежутка, меньшего времени жизни одного поколения, имеет место равенство

$$x+y=a+b \quad (1)$$

Уравнение зомби-апокалипсиса
(bN)(S/N)Z = bSZ,
где N — общее число населения,
S — число людей, восприимчивых к атакам зомби,
Z — общее число самих зомби
b — вероятность заражения вирусом.

Теория эпидемий

При этих условиях нужно установить закон изменения числа незаражённых особей с течением времени, т.е. найти $y=f(x)$.

Так как инфекция передаётся при встречах зараженных особей с незараженными, то число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями.

Для промежутка времени **dt** $dy=-\beta xy$,

откуда $dy/dt= - \beta xy$, где β – коэффициент пропорциональности. Подставив в это уравнение значение **x** из равенства (1), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$dy/dt= - \beta y\,(a+b-y)$$

Пример: Составьте дифференциальное уравнение и найдите частные решения: Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое

Решение:

Уравнение описывающее этот процесс:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

, где $\frac{dm}{dt}$ - скорость выведения вещества из организма,

m - концентрация лекарственного препарата в крови в данный момент времени; k - коэффициент пропорциональности

Решение:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -k\int_{0}^{t} dt$$

где m_0-концентрация вещества в крови в начальный момент времени t=0, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t.

$$\ln m \Big|_{m_0}^{m} = -kt \Big|_{0}^{t}, \ln m - \ln m_0 = -kt \quad , \ln \frac{m}{m_0} = -kt$$

Решение:

Потенцируя, получим:

$$m = m_0 e^{-kt}$$

По условию задачи m_0=0,2 мг/л, $m=m_0/2$ мг/л, t=23 ч.

Подставляем и находим:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -k\int_0^t dt$$

где m_0-концентрация вещества в крови в начальный момент времени t=0, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t.

$$\ln m \Big|_{m_0}^{m} = -kt\Big|_0^t, \ \ln m - \ln m_0 = -kt, \ \ln\frac{m}{m_0} = -kt$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-k23}, \ \frac{1}{2} = e^{-k23}, \ \ln 0{,}5 = \ln e^{-k23}$$

$$, \ln 0{,}5 = -23k, \ k = \frac{\ln 0{,}5}{-23} = \frac{-0{,}693}{-23} = 0{,}03$$

Зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, описывается следующим законом:

$$\boxed{m = m_0 e^{-0{,}03t}}$$

Контрольные вопросы для закрепления:

1. Дайте понятие дифференциальному уравнению, его решению.
2. Назовите методы решения дифференциальных уравнений, охарактеризуйте каждый.
3. Приведете примеры обыкновенного дифференциального уравнения, уравнения с разделяющими переменными, линейного.
4. Приведите примеры дифференциального уравнения первого, второго, третьего порядка.
5. Каково практическое применение дифференциальных уравнений.