Множества
Операции над множествами

ПЛАН

1. МНОЖЕСТВО

2. ВИДЫ МНОЖЕСТВ

3. ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ

4. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

УМЕНИЯ

1. НАХОДИТЬ ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ
2. НАХОДИТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ
3. ИЗОБРАЖАТЬ С ПОМОЩЬЮ КРУГОВ ЭЙЛЕРА
4. РЕШАТЬ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

- <u>Основу теории математики</u> составляют **понятия** и **отношения** между этими понятиями, которые устанавливаются при помощи соответствующих **аксиом и определений**.
- Дальнейшее построение математической теории осуществляется последовательной **системой теорем и новых определений**, устанавливающей свойства изучаемых математических объектов.

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

основатель теории множеств

Георг Кантор (1845-1918)

Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором.

- Одним из фундаментальных, неопределяемых математических понятий является понятие ***множества***
- Множество можно представить себе как *соединение, совокупность, собрание* некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку:

- множество учащихся класса,
- множество букв алфавита,
- множество натуральных чисел,
- множество точек на прямой,
- множество книг на полке и т.д..

- **Величиной** называется все что может быть измерено и выражено числом

- **Множеством** называется совокупность некоторых элементов. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п

Придумай название для предметов и животных, собранных вместе:

Придумай название для предметов и животных, собранных вместе:

КОЛЛЕКЦИЯ МАРОК

НАБОР КАРАНДАШЕЙ

СТАЯ ПТИЦ

ЧАЙНЫЙ СЕРВИЗ

БУКЕТ ЦВЕТОВ

СТАДО КОРОВ

Определение

- Предметы, из которых состоит множество, называются его ***элементами***

- например, буква К – элемент множества букв русского алфавита.

- Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, стая, семья, фрукты).

- Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы.

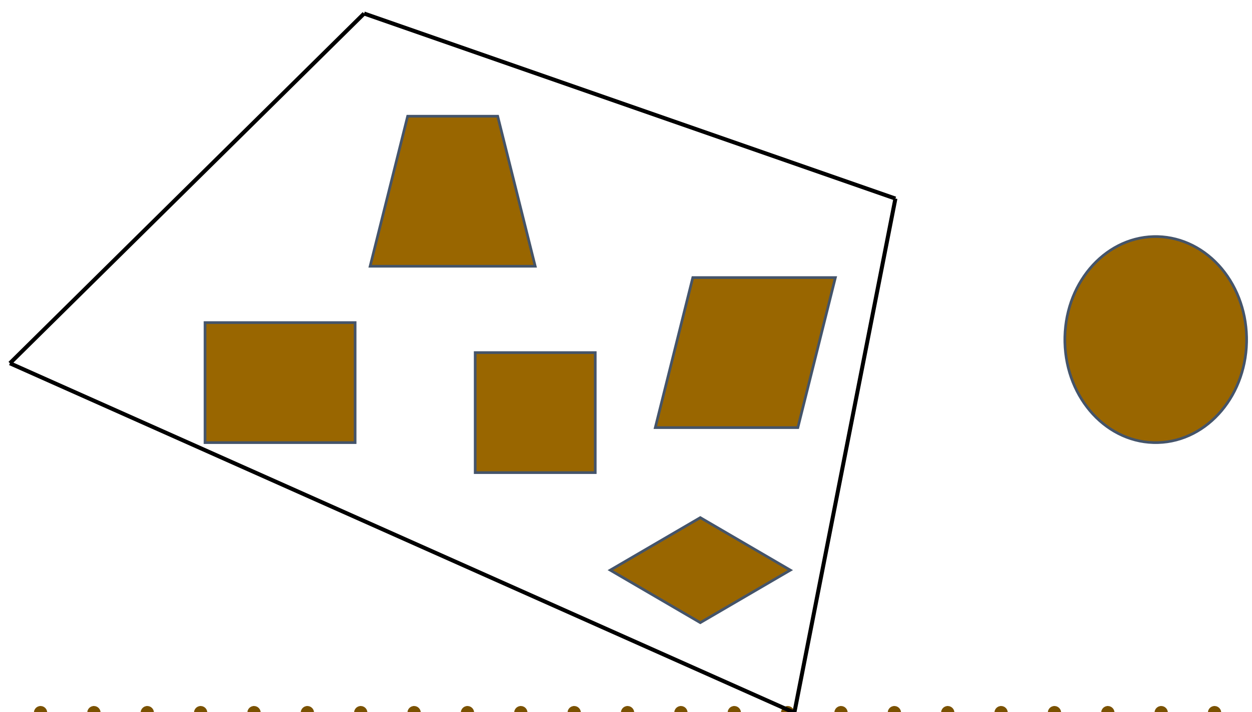
- Сами элементы некоторого множества будем обозначать малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений:

A; {a, b, c}; {*,s,h,g}; **N**={1,2,3,4,5,6,7,8, …}.

Множество – совокупность объектов, объединенных по какому–либо признаку.

Множества обозначают большими буквами латинского алфавита: **A, B, C, D** и т. д.

Объекты, составляющие множество, называются элементами множества.



- Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа $\in$ (в противном случае используется символ $\notin$).
- Запись ***a*** $\in$ ***A*** означает, что *a есть элемент множества А*.
- Аналогично имеем: $\Delta \in \{\Delta, o\}$.
- Запись **$4 \notin \{1,2,3\}$** означает, что 4 *не принадлежит множеству* $\{1,2,3\}$.

- Основными способами задания множества являются:
- 1) перечисление всех его элементов:

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\};$$

- 2) описание (указание характеристического свойства его элементов).

- Этот способ требует указания такого признака, который имеется у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество.

- Например, характеристическим свойством **натуральных чисел** является возможность их использования при счете каких-либо предметов.
- Говоря о множестве **четных чисел**, мы указываем характеристическое свойство его элементов:

$$M=\{x\in N \mid x2:\},$$

т.е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.

множество	элемент
Множество четырехугольников	Трапеция, параллелограмм, ромб, квадрат, прямоугольник
Пространственные тела	Шар, прямоугольный параллелепипед, призма, пирамида, октаэдр
Натуральные числа	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11…
Квадраты чисел	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ..
Цифры десятичной системы счисления	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двузначные четные числа	10, 12, 14, 16 … 96, 98

Определение: **Пустое множество** - множество, не содержащее ни одного элемента

множество прямых углов равностороннего треугольника

множество людей на Солнце

множество точек пересечения двух параллельных прямых

$\emptyset$

Обозначения некоторых числовых множеств:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

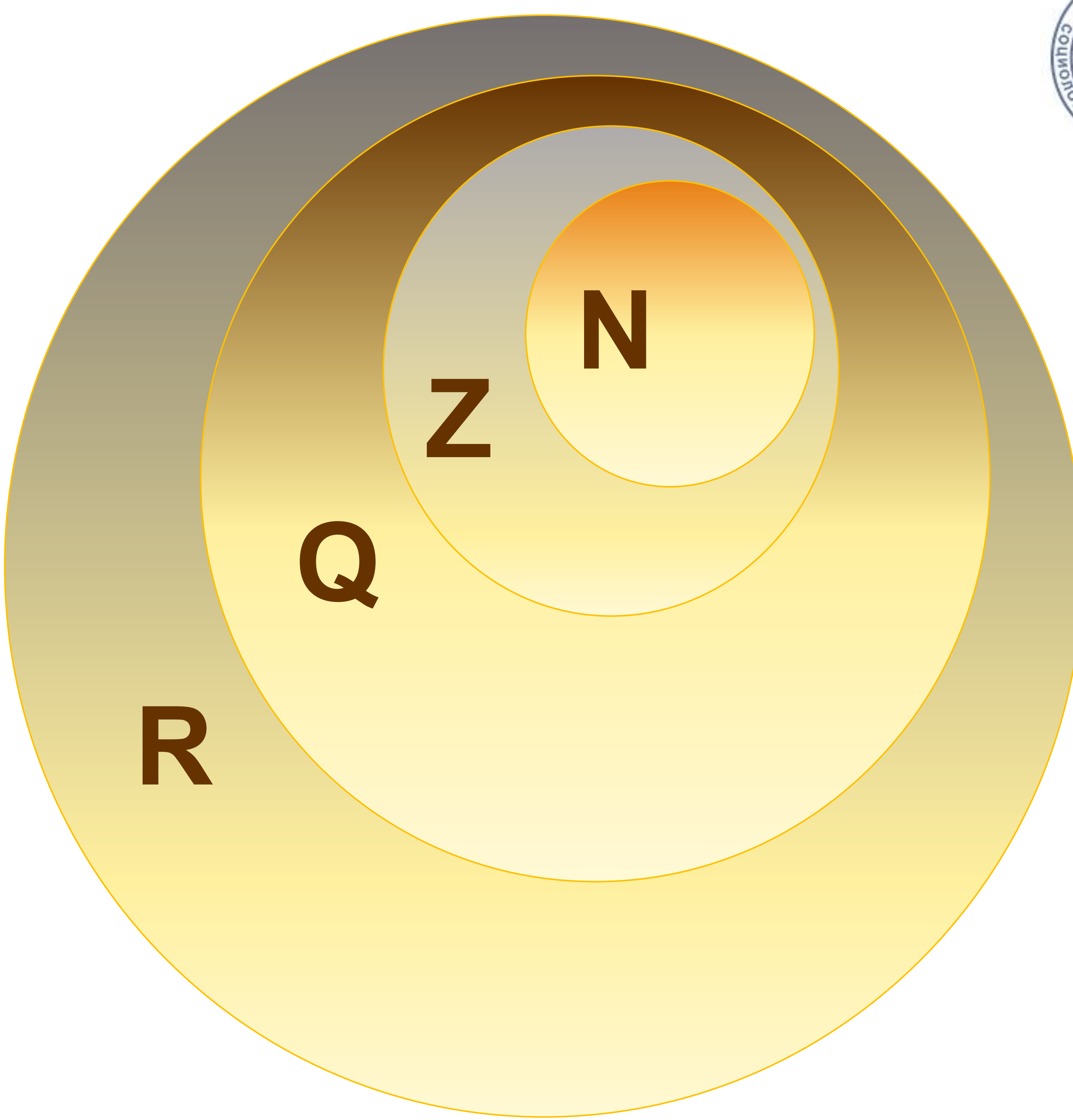
Q – множество рациональных чисел;

I - множество иррациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

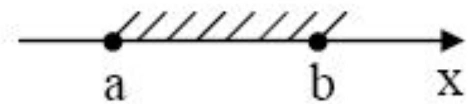
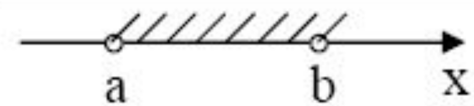
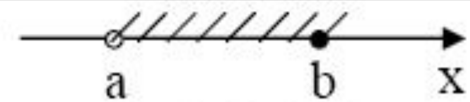
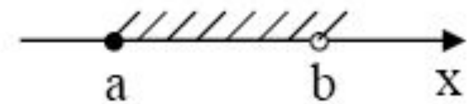
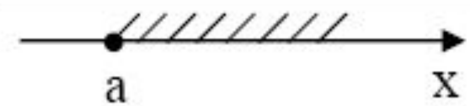
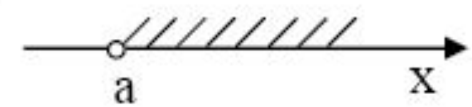
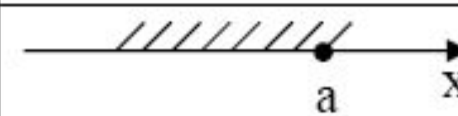
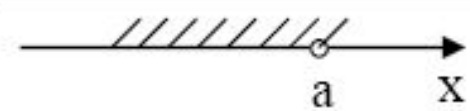
Основные числовые множества:

- **N**={1,2,3,4,…} – множество натуральных чисел;
- **Z**={…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…} – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $N \subset Z$;
- **Q**={x |$x = p/q$, где $p \in Z$, $q \in N$} – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $N \subset Z \subset Q$;
- **R**=(-∞; +∞) – множество действительных чисел, $Q \subset R$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа.


N
Z
Q
R

- Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).
- *Координатная прямая* – это всякая прямая (обычно горизонтальная), на которой указаны положительное направление, начало отсчета и единичный отрезок.

Таблица 1. Правила изображения числовых промежутков.

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a;b]$	
Интервал от a до b	$a < x < b$	$(a;b)$	
Полуинтервалы от a до b	$a < x \le b$ $a \le x < b$	$(a;b]$ $[a;b)$	 
Числовой луч от a до $+\infty$	$a \le x$	$[a;+\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$(a;+\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \le a$	$(-\infty; a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty; a)$	

В последующем, как и в большинстве математических текстов используется ряд специальных символов, многие из которых вводятся по мере надобности. Применяются распространенные символы математической логики $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, которые читаются, соответственно, как "влечет", "равносильно", "существует" ("найдется"), "всякий" ("каждый", "для каждого", "любой", "для любого").

Запись $A \Longrightarrow B$ читают одним из следующих способов: A влечет B, B следует из A, B — необходимое условие A, A — достаточное условие (признак) B.

Запись $A \Longleftrightarrow B$ читают одним из следующих способов: A равносильно B, A необходимо и достаточно для B, A верно тогда и только тогда, когда верно B. Квантор равносильности часто применяется в символьной записи определений и утверждений.

Запись "$\exists x \in X$" означает: существует элемент x из множества X.

Запись "$\forall x \in X$" означает: для любого элемента x из множества X или каков бы ни был элемент x из множества X.

Часто в символьной записи математических утверждений используют символ ":" или эквивалентный ему символ "|", которые читают: "такой, что". В частности, запись "$\exists x \in X : \; x^2 - 1 = 0$" означает: существует такой элемент x в множестве X, что $x^2 - 1 = 0$.

Поставьте вместо звездочки знак так, чтобы получить правильное утверждение:

- $5 * N$;
- $-5 * Q$;
- $3,14 * Q$;
- $2 * R$;
- $0 * N$;
- $-12 * Z$;
- $\pi * Q$;
- $3 * \varnothing$

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел

$\overline{\mathbf{R}}$ — расширенная числовая прямая

$[a, b]$ — отрезок с концами в точках a и b

(a, b) — интервал с концами в точках a и b

$[a, b)$, $(a, b]$ — полуинтервалы с концами в точках a и b

$|x|$ — абсолютное значение числа x

$+\infty$, $-\infty$ — бесконечные точки расширенной числовой прямой

∞ — объединение бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$

$(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ — бесконечные интервалы

$(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$ — бесконечные полуинтервалы

$\mathrm{U}(x_0)$ — окрестность точки x_0

$\mathrm{U}(x_0, \varepsilon)$ — ε-окрестность точки x_0

$A \cup B$ — объединение множеств A и B

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ — разность множеств A и B

$\mathrm{C}_B A$ — дополнение множества A до множества B

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение множества A до универсального множества Ω

$A \triangle B$ — симметрическая разность множеств A и B

$\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ — объединение N множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_N$

$\bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n$ — пересечение N множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_N$

$A \Rightarrow B$	—	из высказывания A следует B (A — необходимое условие B, а B — достаточное условие A)
$A \Leftrightarrow B$	—	высказывания A и B равносильны
$:\Leftrightarrow$	—	утверждение справедливо по определению
$\vee$ и $\wedge$	—	символы дизъюнкции и конъюнкции
$\neg A$	—	отрицание высказывания A
$\exists x : \ldots$	—	существует такое x, что …
$\exists! x : \ldots$	—	существует единственное x , такое, что …
$\nexists x : \ldots$	—	не существует x , такого, что …
$\forall x$	—	для любого x

$f\colon X \to Y$ — отображение f множества X в (на) множество Y

$y = f(x)$ — переменное y — функция переменного x

$f(a)$ — значение функции $f(x)$ в точке a

$D(f)$ — область определения (существования) функции $f(x)$

$R(f)$ — область значений функции $f(x)$

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$

$I_X\colon X \to X$ — тождественное отображение множества X на себя

$g \circ f(x)$, $g(f(x))$ — композиция функций $y = f(x)$ и $g(y)$ (сложная функция аргумента x)

$M(x, y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината)

$X \times Y$ — произведение (декартово) множества X на множество Y

$\mathbf{R}^n$ — произведение (декартово) n множеств действительных чисел

задания:

1. Запишите на символическом языке следующее утверждение:

   а) число 10 – натуральное;

   б) число – 7 не является натуральным;

   в) число – 100 является целым;

   г) число 2,5 – не целое.

2. Верно ли, что:

   а) $-5 \in N$; б) $-5 \in Z$; в) $2{,}45 \notin Q$?

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

Равные множества

Запишите множества букв слов КОНИ и КИНО

{К, О, Н, И} {К, И, Н, О}

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

- Множества, состоящие из одних и тех же Элементов называют равными (одинаковыми). Пишут **А=В**

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

Конечные множества

A = {2; 3; 5; 7; 11; 13};

B = {x | 5< x <12}

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

Бесконечные множества

A = {1; 4; 9; 16; 25; …};

C = {10; 20; 30; 40; 50; …};

Среди перечисленных ниже множеств укажите конечные и бесконечные множества:

а) множество чисел, кратных 13;

б) множество делителей числа 15;

в) множество деревьев в лесу;

г) множество натуральных чисел;

д) множество рек Ростовской области;

е) множество корней уравнения $x + 3 = 11$;

ж) множество решений неравенства x

А). Задайте множество цифр, с помощью которых записывается число:

а) 3254; б) 8797; в) 11000; г) 555555.

В). Охарактеризуйте множество А:

а) А = {1, 3, 5, 7, 9};

б) А = {- 2, - 1, 0, 1, 2};

в) А = {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99};

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

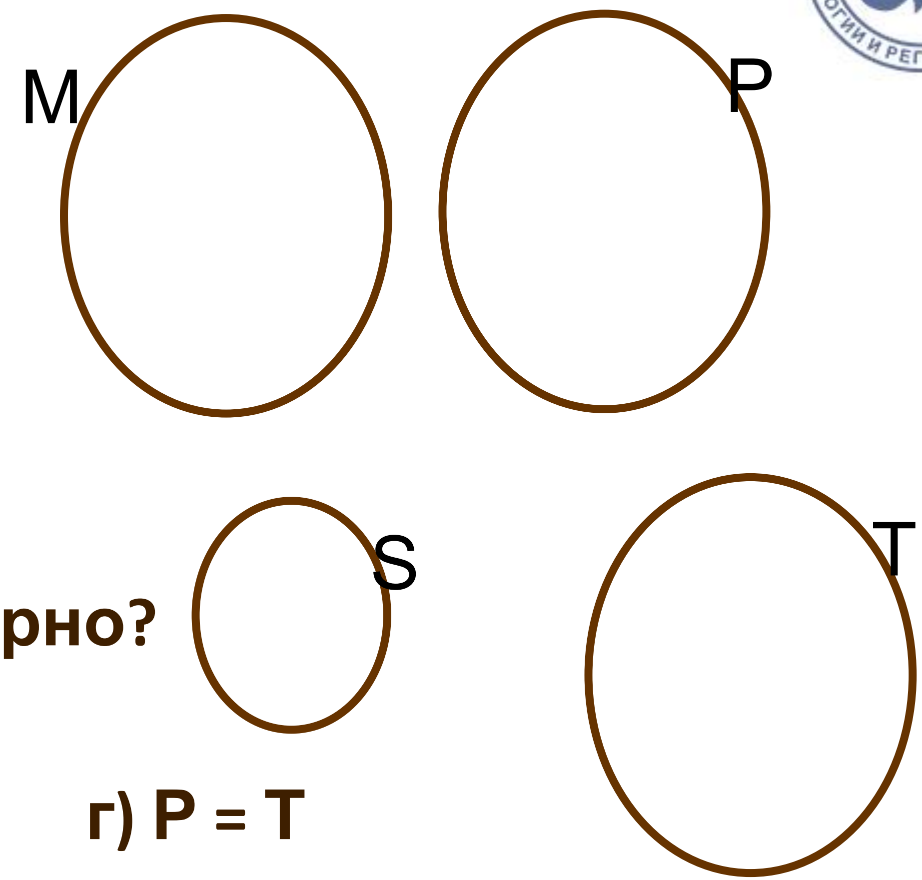
Даны множества:

M = {5, 4, 6},

P = {4, 5, 6},

T = {5, 6, 7},

S = {4, 6}.



Какое из утверждений неверно?

а) M = P　　б) P ≠ S　　в) M ≠ T　　г) P = T

Мощность множества

Определение: **Число элементов конечного множества называют мощностью множества и обозначают символом Card A или |A|.**

- конечное множество можно характеризовать числом его элементов.
- В этом смысле множество чисел {-2, 0, 3,8} и множество букв {с, х, ф, а} эквивалентны, так как они содержат одинаковое число элементов.

- В любой конкретной задаче приходится иметь дело только с подмножествами некоторого, *фиксированного для данной задачи, множества*. Его принято называть универсальным (универсумом) и обозначать символом **U**.

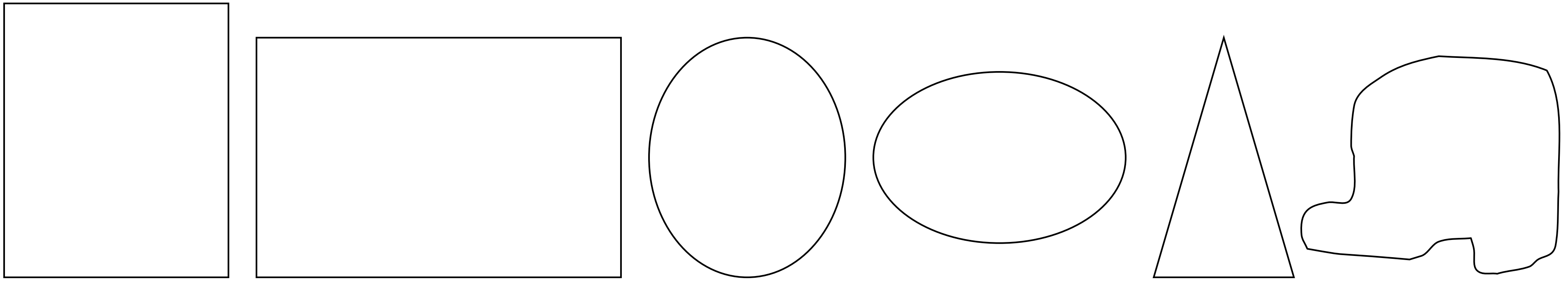
Пример: при сборке некоторого изделия универсальным множеством можно назвать множество всех деталей и сборочных элементов, из которых это изделие состоит.

Если мы рассматриваем множества, связанные с какими-нибудь *фигурами на плоскости*, то в качестве универсального множества можно выбрать *множество всех точек плоскости*.

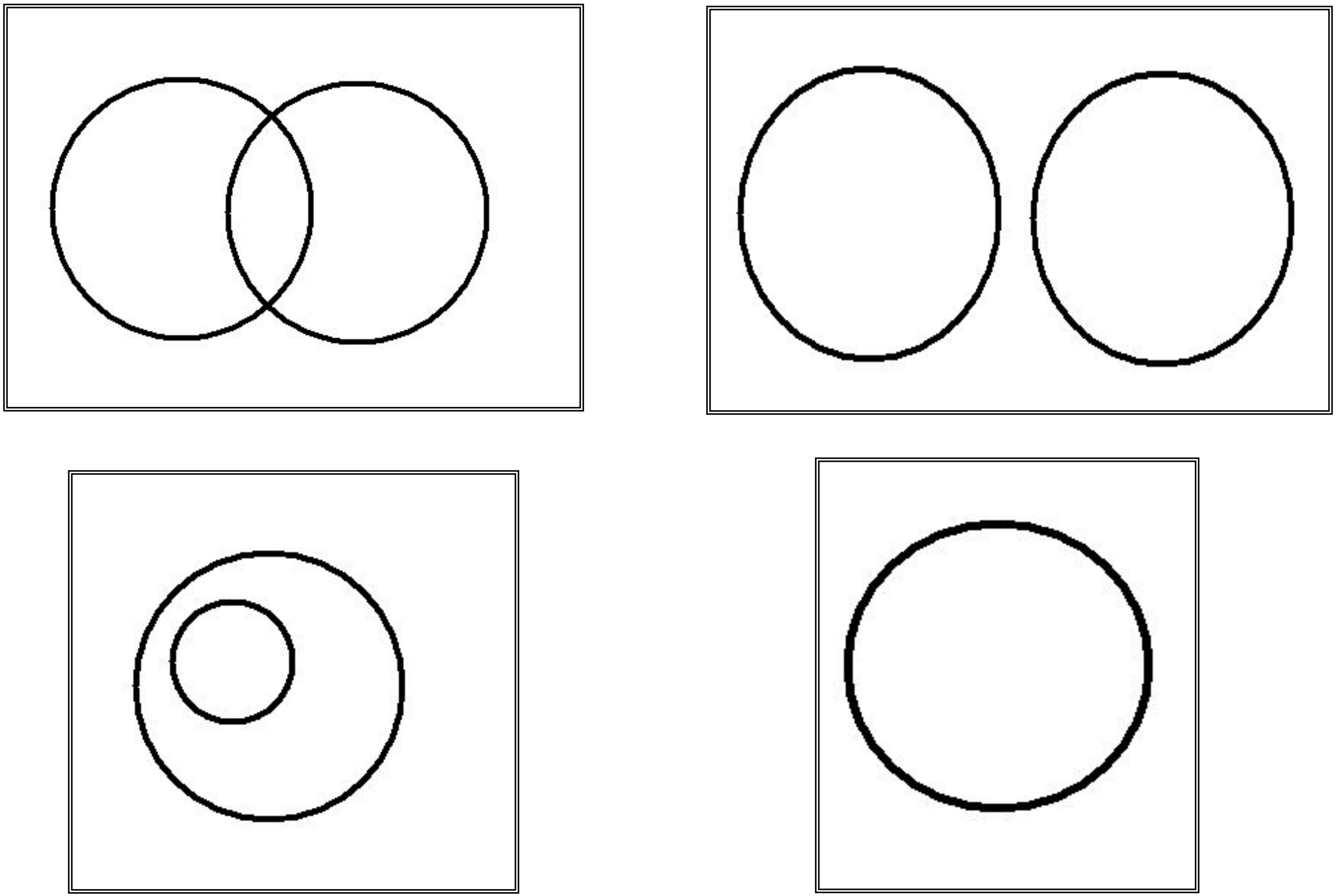
Отношения между множествами

- Наглядно отношения между множествами изображают при помощи особых чертежей, называемых КРУГАМИ ЭЙЛЕРА (или диаграммами Эйлера – Венна).

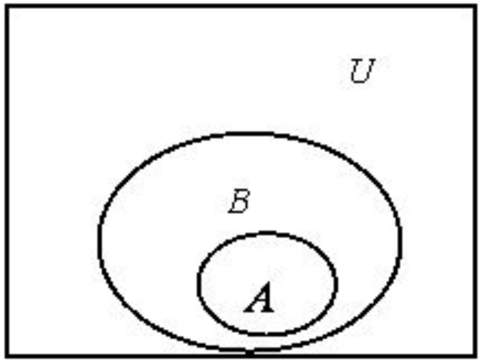
- Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют в виде кругов или любых других замкнутых кривых (фигур)



Отношения между множествами



- При графическом изображении множеств удобно использовать диаграммы Венна, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника

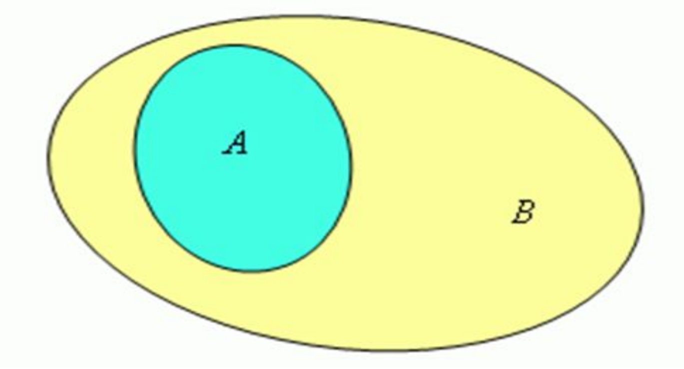


Определение:

Множество A называется подмножеством множества B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B.

При этом пишут $A \subset B$, где $\subset$ есть знак вложения подмножества.

Из определения следует, что для любого множества справедливы, как минимум, два вложения $A \subset A$ и $\varnothing \subset A$.



Задание:

Определить как между собой соотносятся множества A = {1, 2, 3, 5, 7}, и B ={1, 3, 5}?

Количество подмножеств

Определение: Если мощность множества *n*, то у этого множества *2^n* подмножеств.

Пример:

A={1,2}

Подмножества множества А:

{∅}, {1}, {2}, {1,2}.

Определить количество подмножеств

1. B={1,3,5}

2. C={а,и,е,о}

Количество подмножеств

B={1,3,5}

C={а,и,е,о}

Подмножества B:

{∅}, {1}, {3}, {5}, {1,3}, {1,5}, {5,3}, {1,3,5}

Подмножества C:

{∅}, {а}, {и}, {е}, {о}, {а,и}, {а,е}, {а, о}, {и,е}, {и,о}, {е, о}, {а,и,е}, {а,и,о}, {а,е,о}, {и,е,о}, {а, и,е,о}.

Даны множества:

$A = \{10\}$, $B = \{10, 15\}$,
$C = \{5, 10, 15\}$,
$D = \{5, 10, 15, 20\}$.

Поставьте вместо … знак включения ($\subset$ или $\supset$) так, чтобы получилось верное утверждение:

а) A … D;   б) A … B;   в) C … A;   г) C … B.

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

Даны три множества

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 37\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,

$C = \{4, 8, 12, 16, \ldots, 36\}$.

Верно ли, что:

а) $\cancel{A \subset B}$; б) $\cancel{B \subset C}$; в) $\cancel{C \subset A}$; г) $C \subset B$?

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

Пусть **A** — множество простых чисел вида

$7n + 2$, где $n \in N$.

Верна ли запись $-5 \in A$?

Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством

$$A = \{x \mid x \in N,\ x^2 - 2x = 0\}$$

1. ***В множестве {лев; лисица; гиена; слон; ры***
все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством.

а) опишите это свойство;
б) найдите элемент, не обладающий этим свойством;
в) назовите еще два элемента, обладающие этим свойством.

2. Назовите 5 подмножеств в множестве всех цветов радуги.

3. Каким свойством в множестве ромбов выделяется подмножество квадратов?

Операции над множествами

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

<u>Пример:</u>

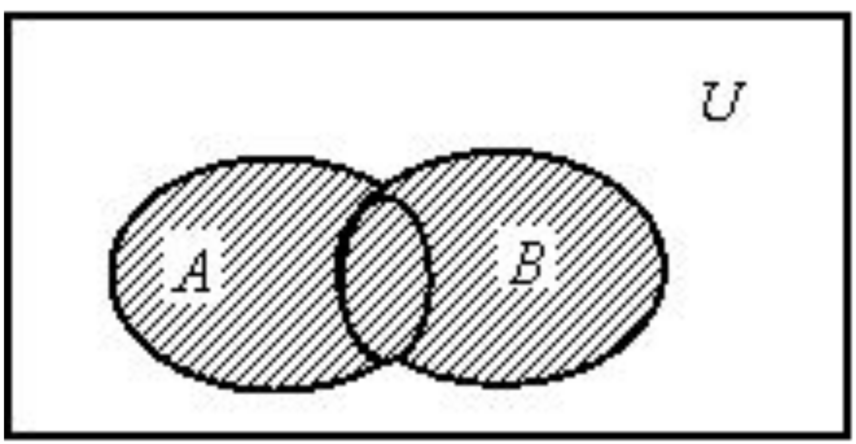
- если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,1,4,2\}$ то $A=B$.
- $\{a,b,c,d\}=\{c,b,a,d\}$.

определение: **Два множества** ***A*** **и** ***B*** **называются** ***равными*** **(** ***A*** **=** ***B*** **), если они состоят из** ***одних и тех же элементов,*** **то есть каждый элемент множества** ***A*** **является элементом множества** ***B*** **и наоборот, каждый элемент множества** ***B*** **является элементом множества** ***A*** **.**

Объединение множеств

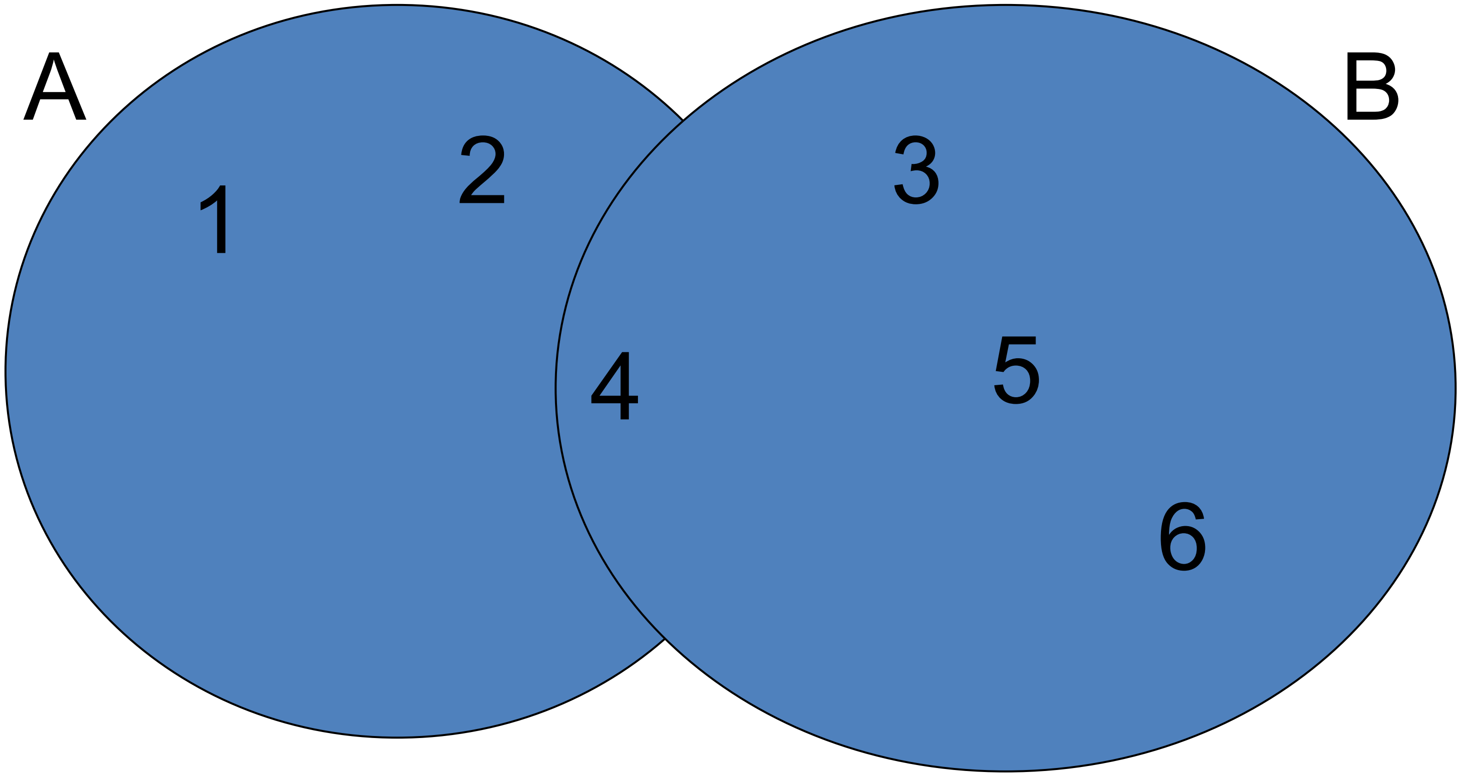
Сумма (объединение) множеств A и B (пишется $A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо A , либо B.

Таким образом, $e \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда либо $e \in A$, либо $e \in B$.



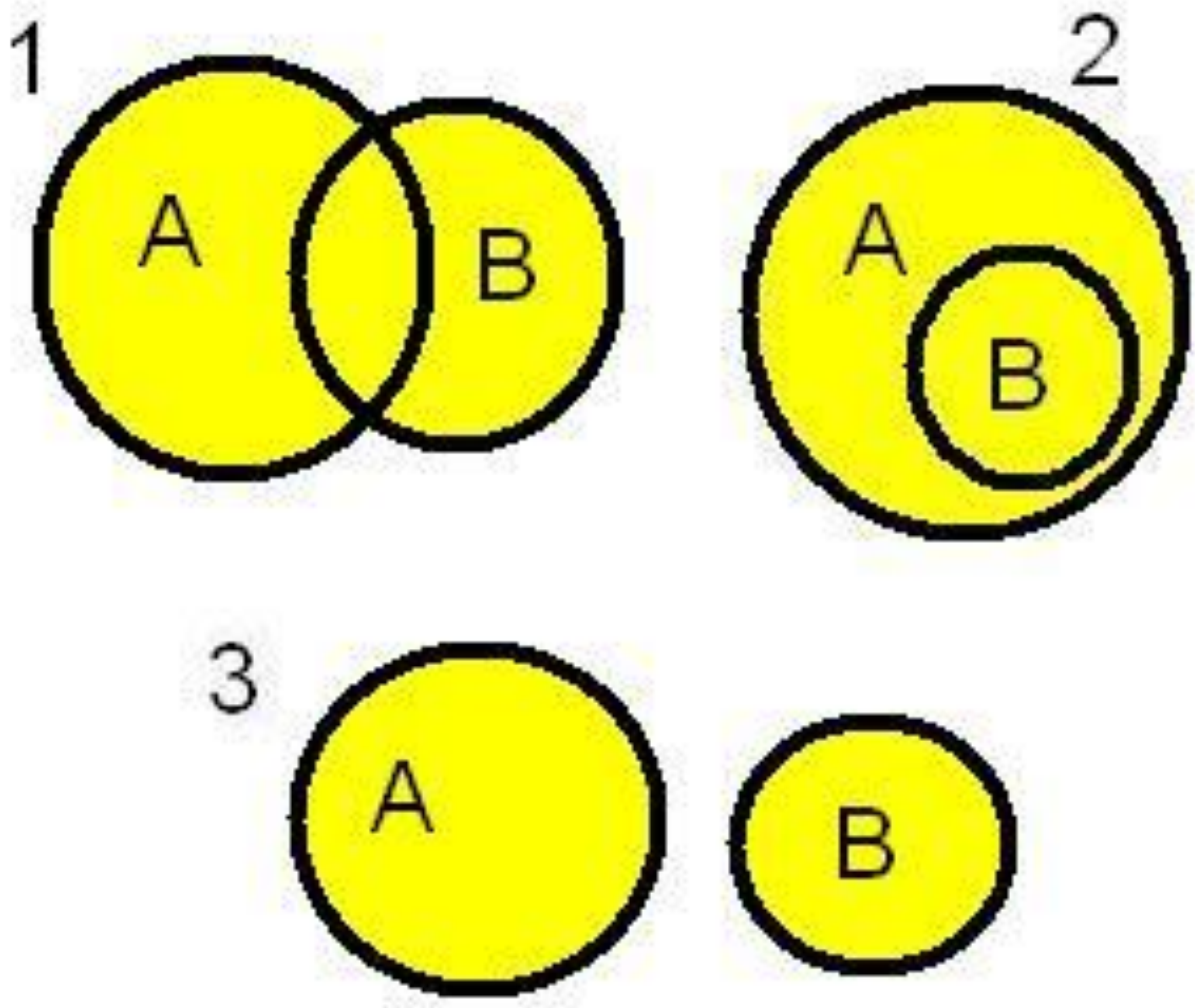
Пример:

если А={1,2,4}, В={3,4,5,6},



то A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

Объединение множеств



Операции над множествами

Определение: Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B

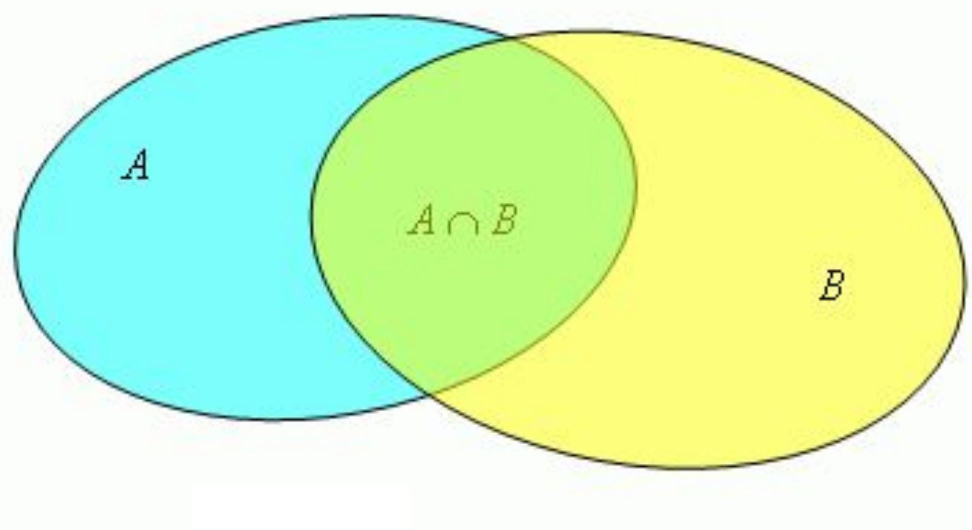
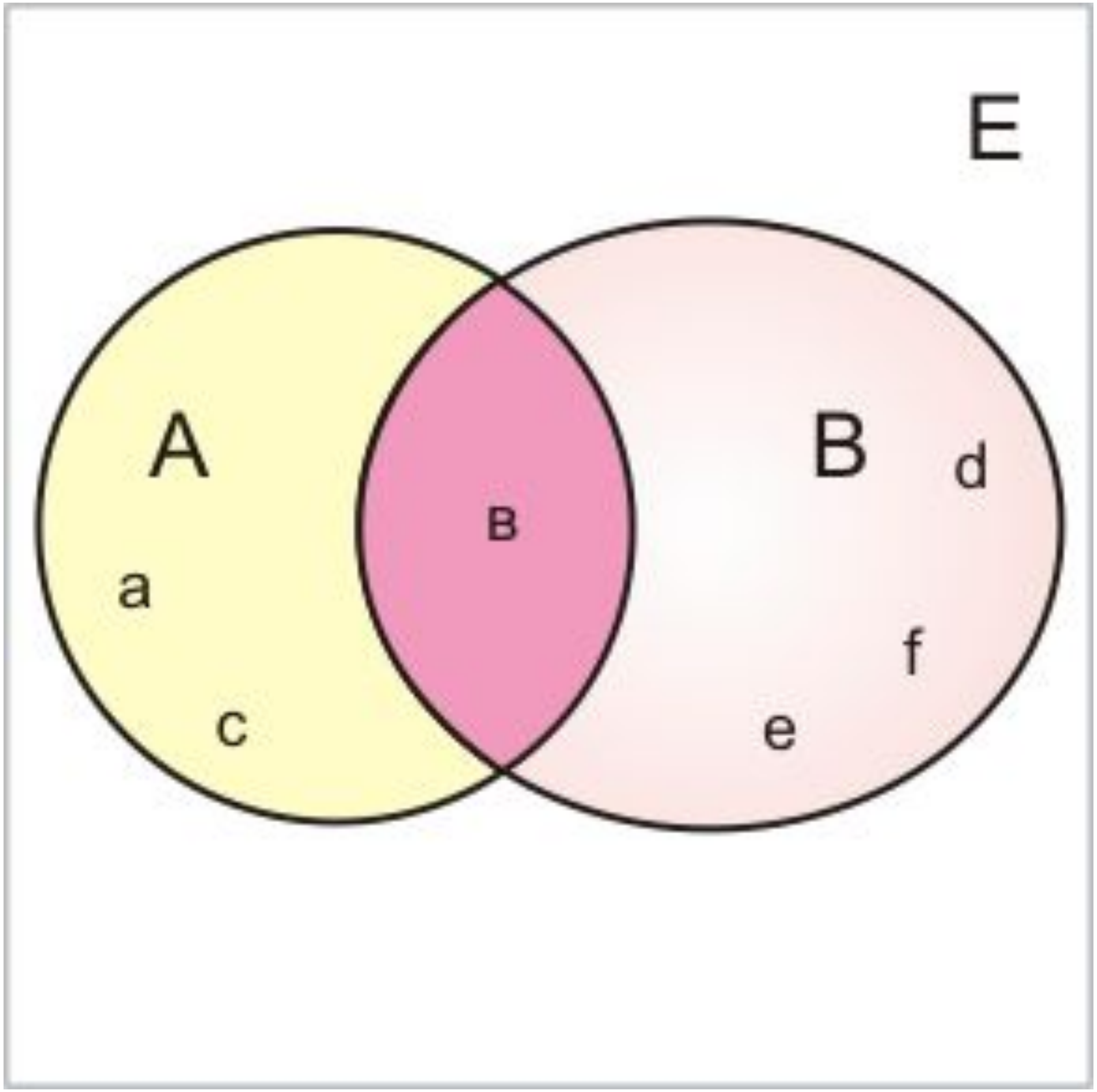


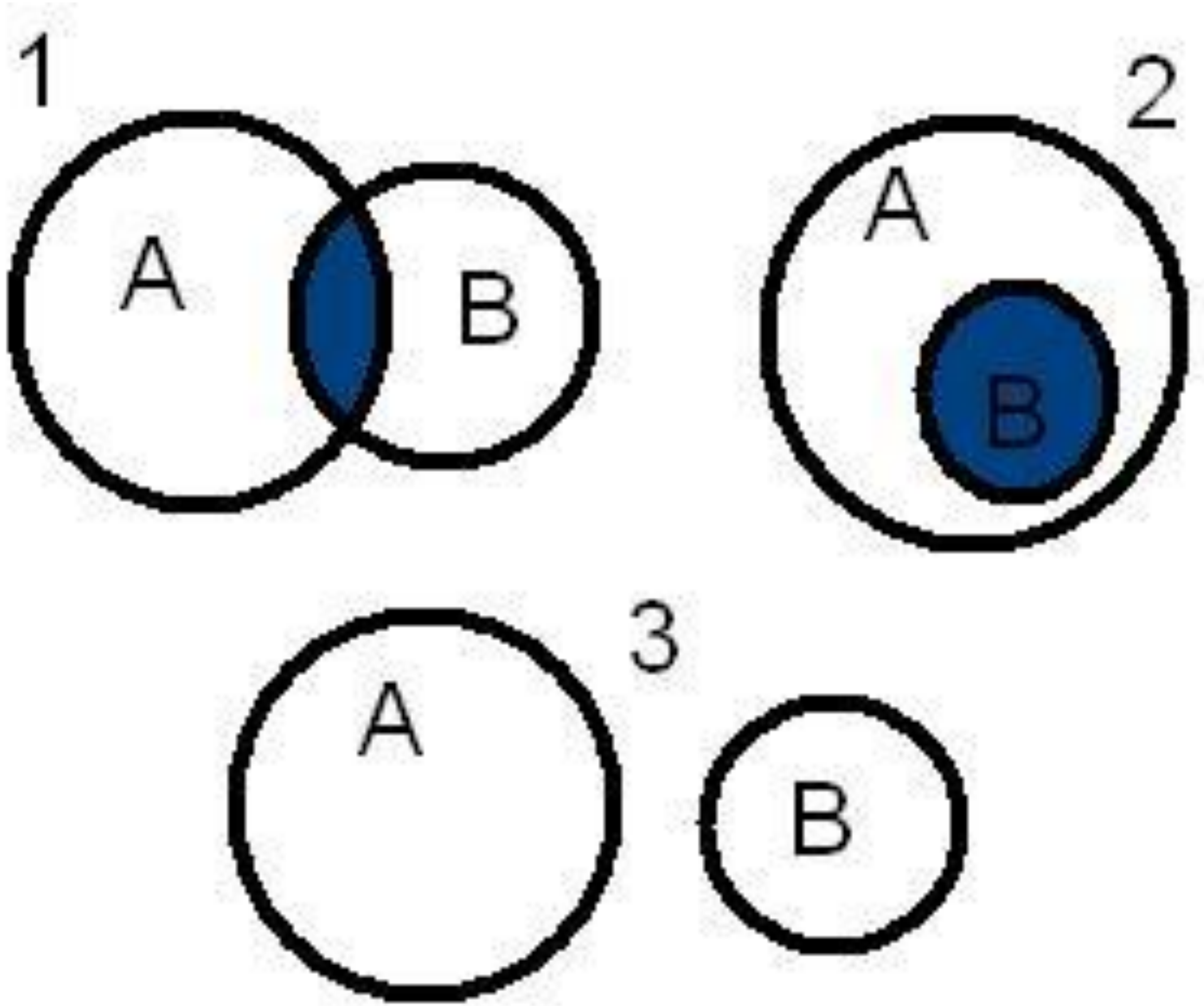
Рис.2

<u>пример:</u> если A={a,b,c}, B={b,c,f,e},



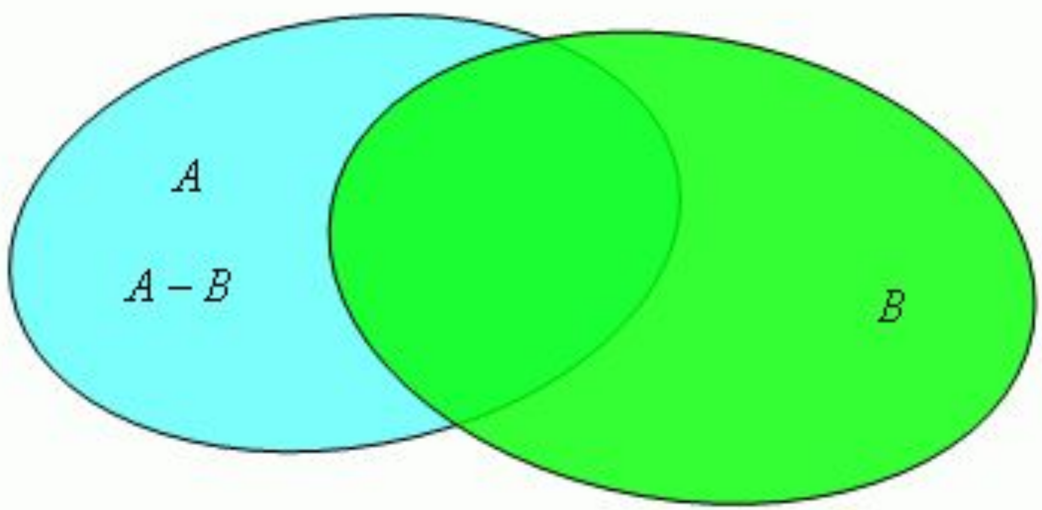
то A ∩ B = {b}

Пересечение множеств

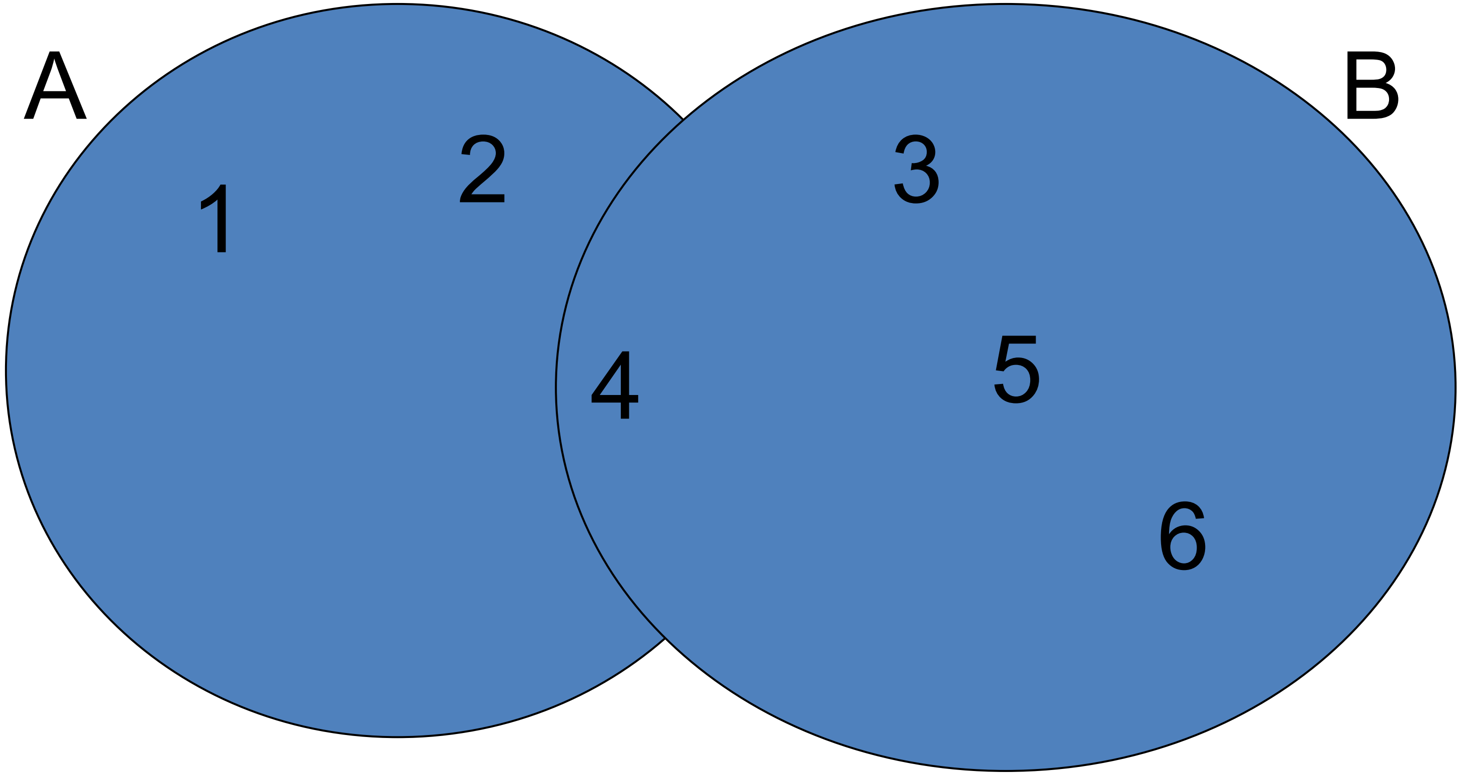


Операции над множествами

Определение: Разностью множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множеству А, но не принадлежат множеству В.

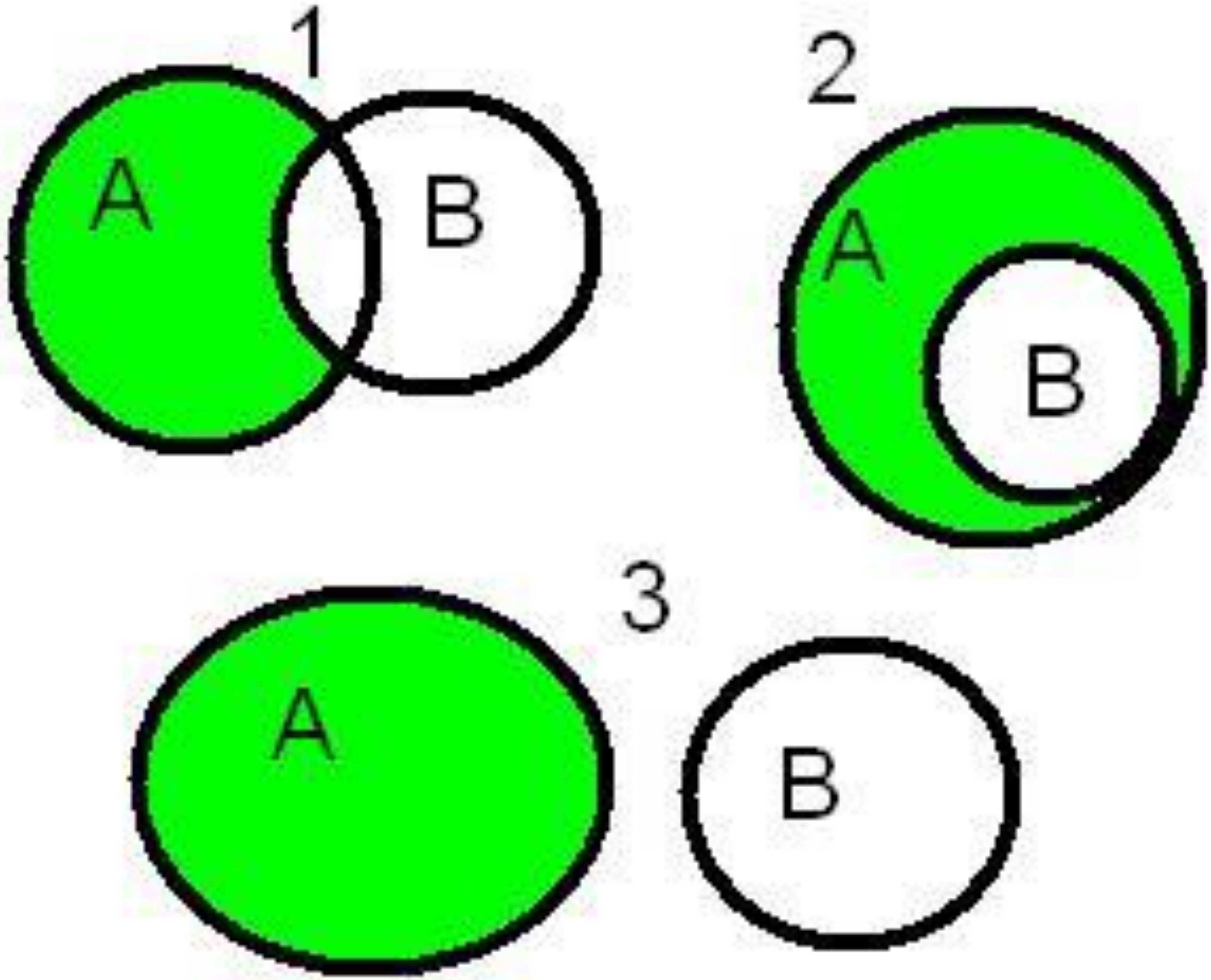


пример: если A={1,2,3,4}, B={3,4,5},

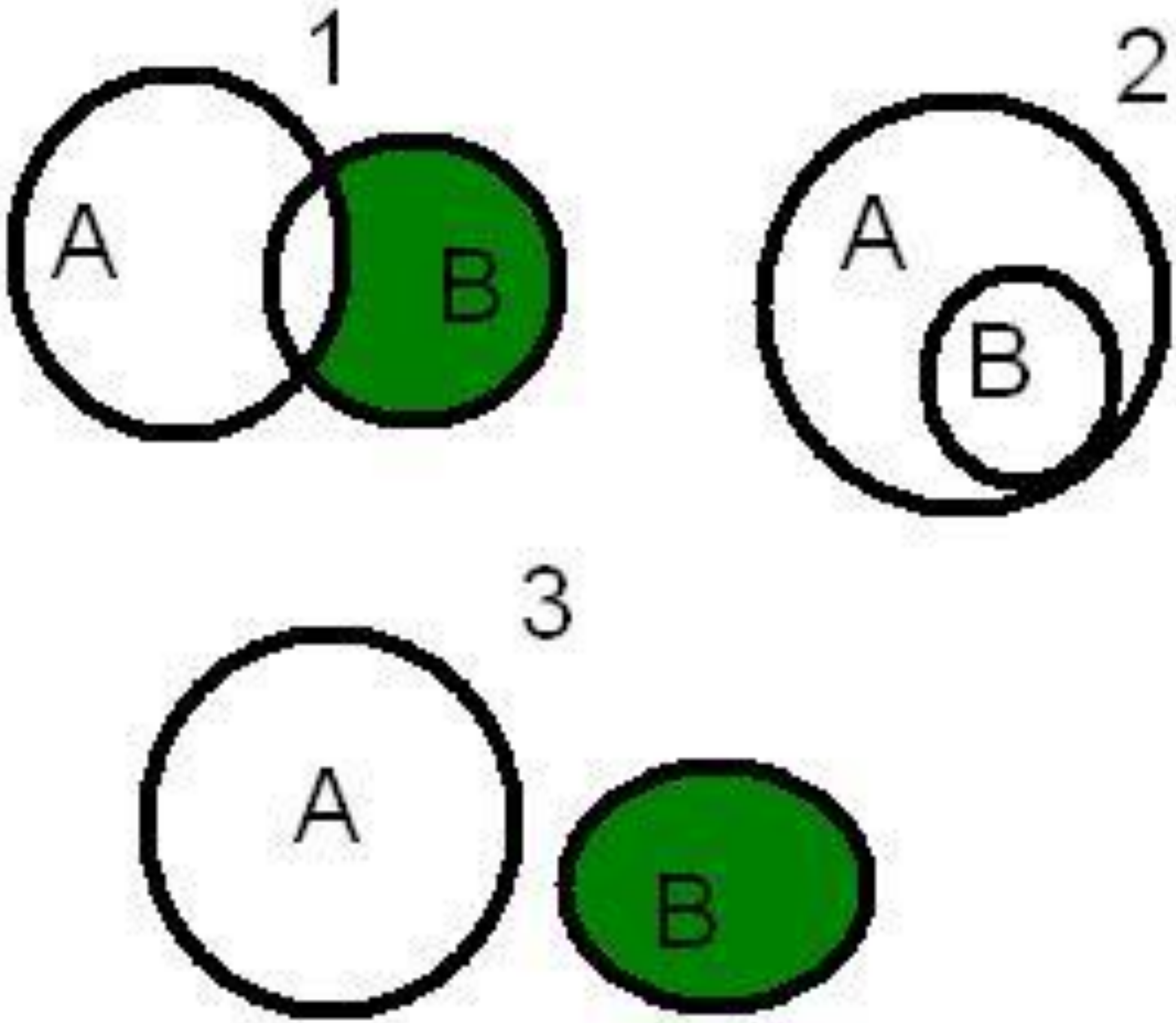


то A\B = {1,2}

Разность множеств

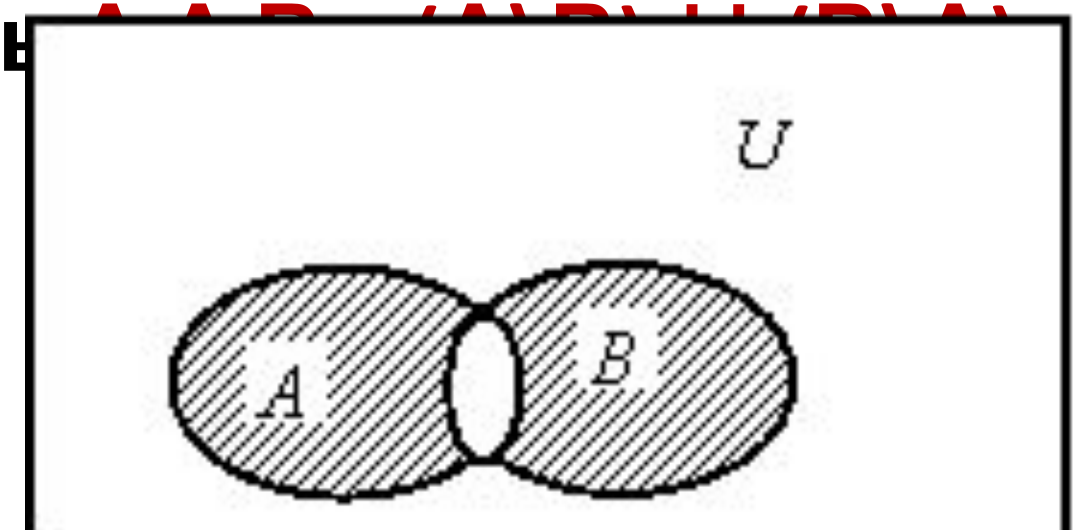


Разность множеств



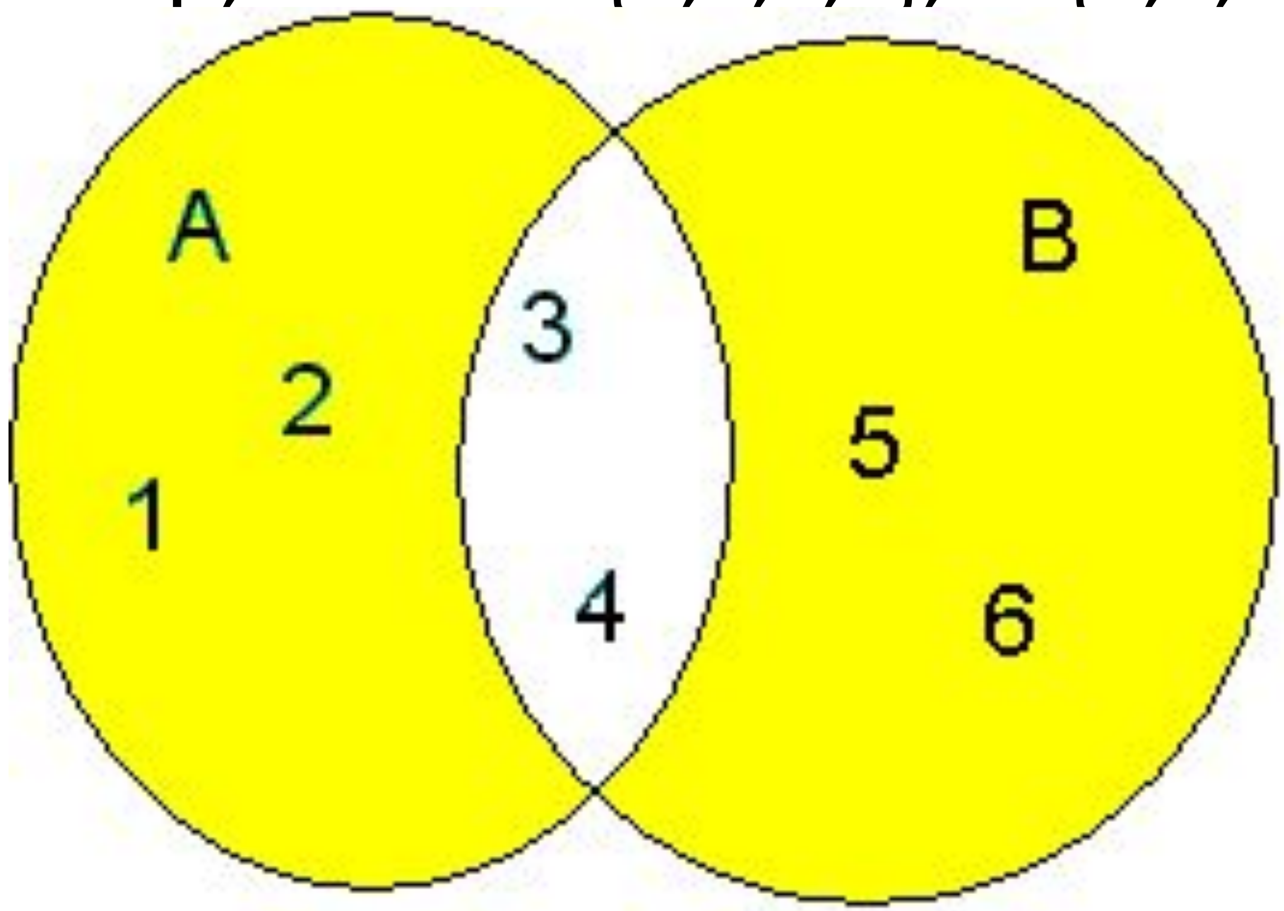
Операции над множествами

определение: ***Симметрической разностью множеств А* и *В*** **называется множество А Δ В, являющееся объединением разностей множеств АВ и ВА, то есть**



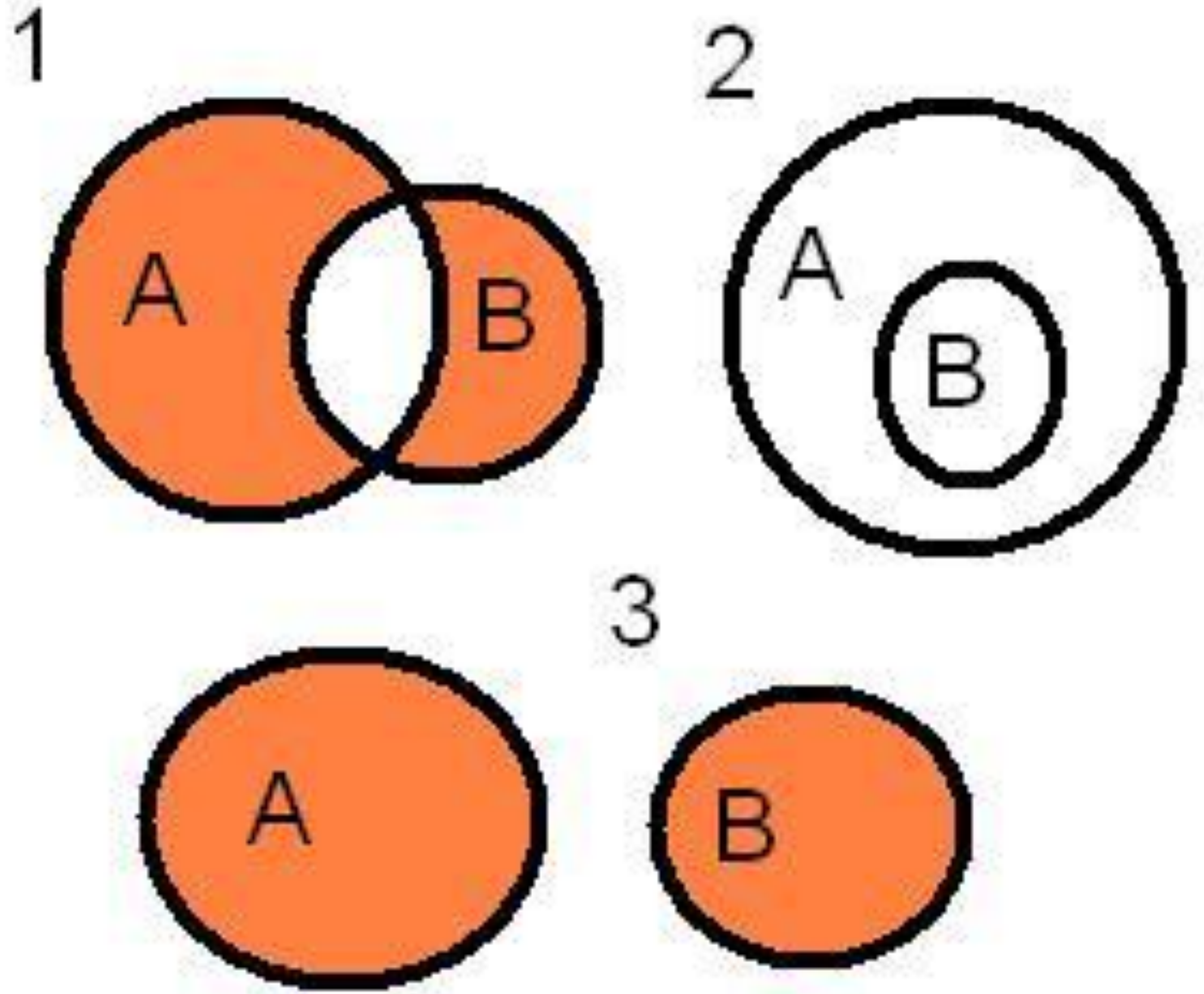
симметрическая разность

Например, если А={1,2,3,4}, В={3,4,5,6},



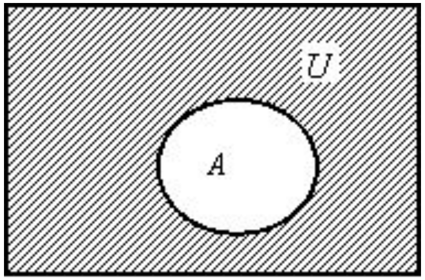
то A Δ B = {1,2} ∪ {5,6} =
{1,2,5,6}

Симметричная разность



Операции над множествами

Определение: **Абсолютным дополнением** множества называется множество всех элементов, не принадлежащих ***A***, т.е. множество ***U\A***, где U – универсальное множество



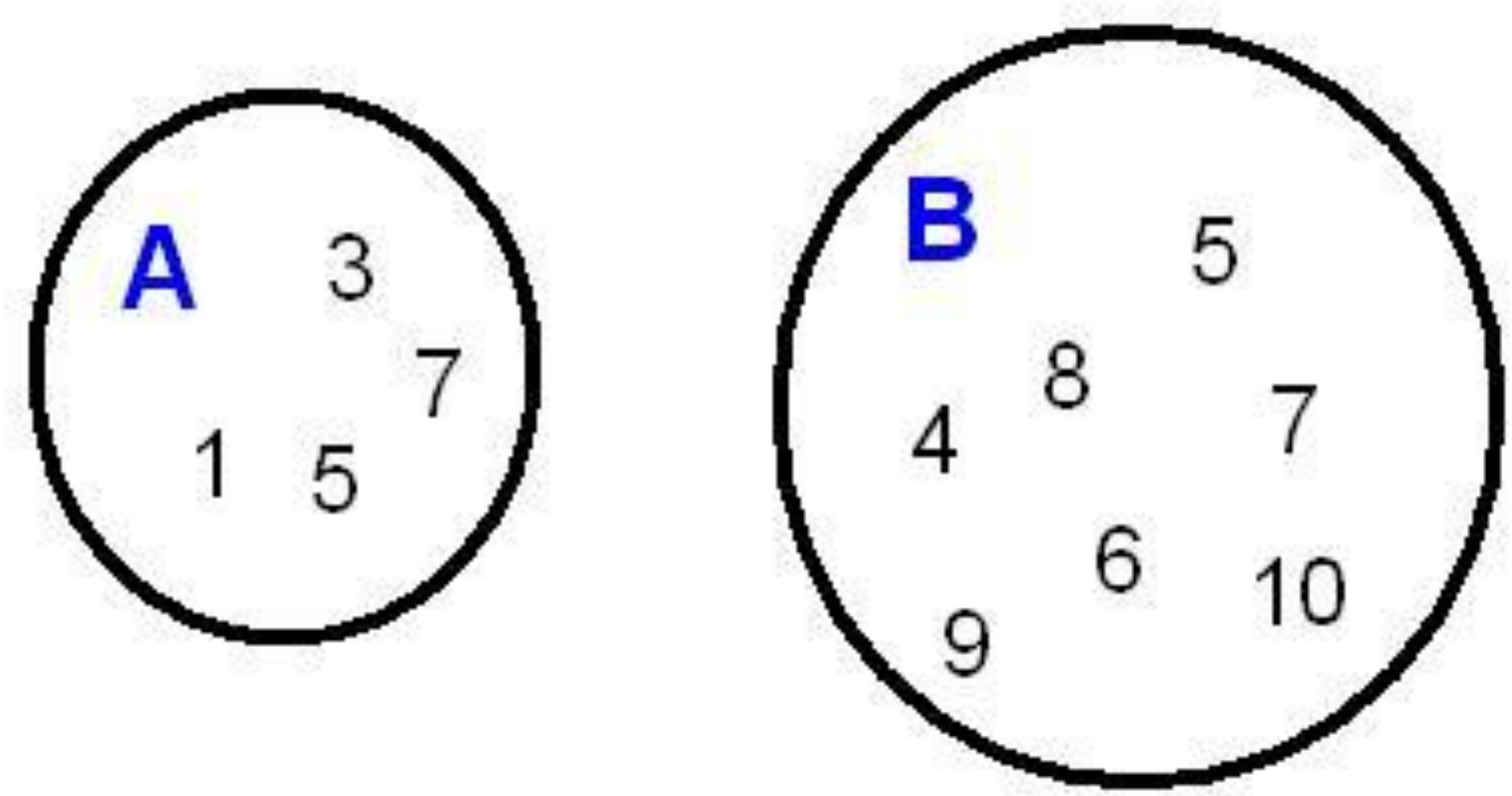
Свойства операций над множествами:

1). если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность),
2). если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения),
9). $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

П р и м е р ы

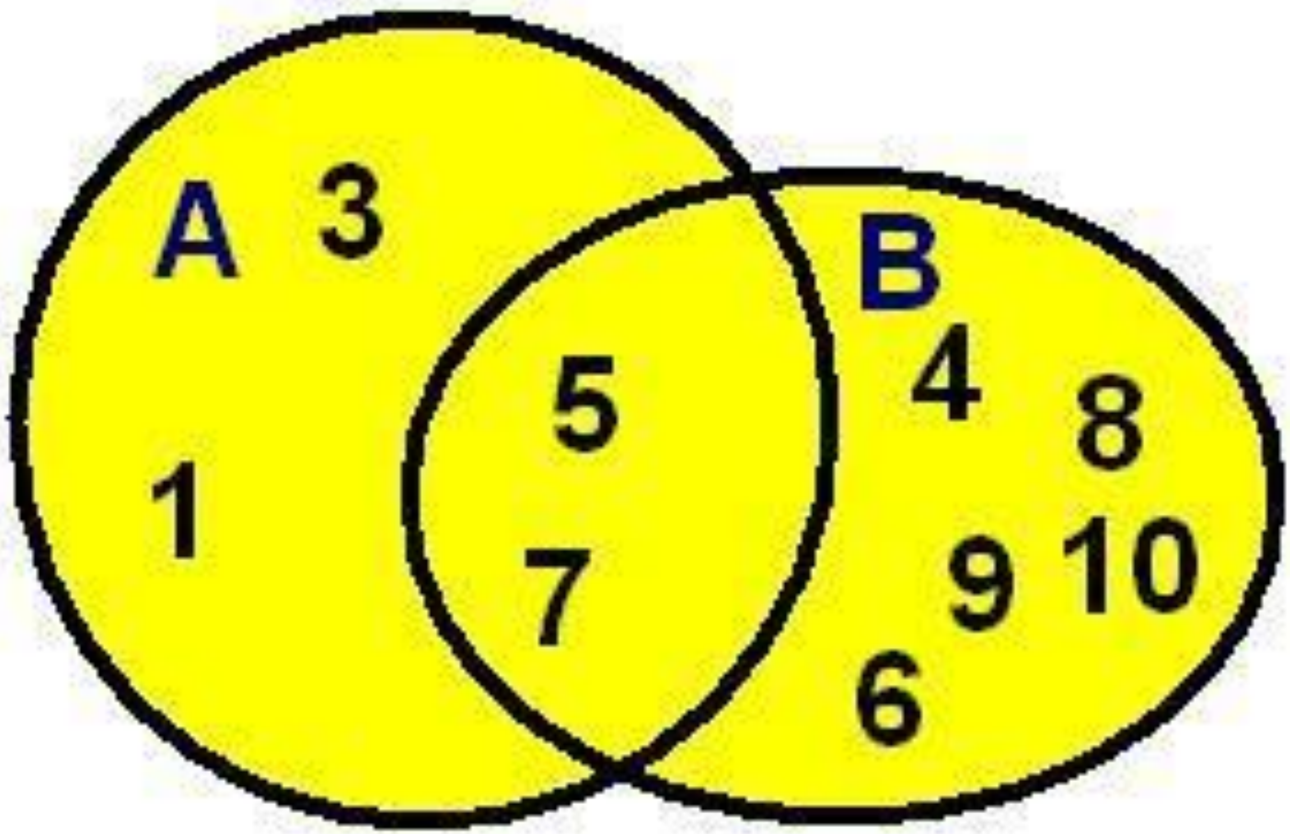
- Множество детей является подмножеством всего населения.
- Пересечением множества целых чисел с множеством положительных чисел является множество натуральных чисел.
- Объединением множества рациональных чисел с множеством иррациональных чисел является множество действительных чисел.
- Нуль является дополнением множества натуральных чисел относительно множества неотрицательных целых чисел.

Даны множества

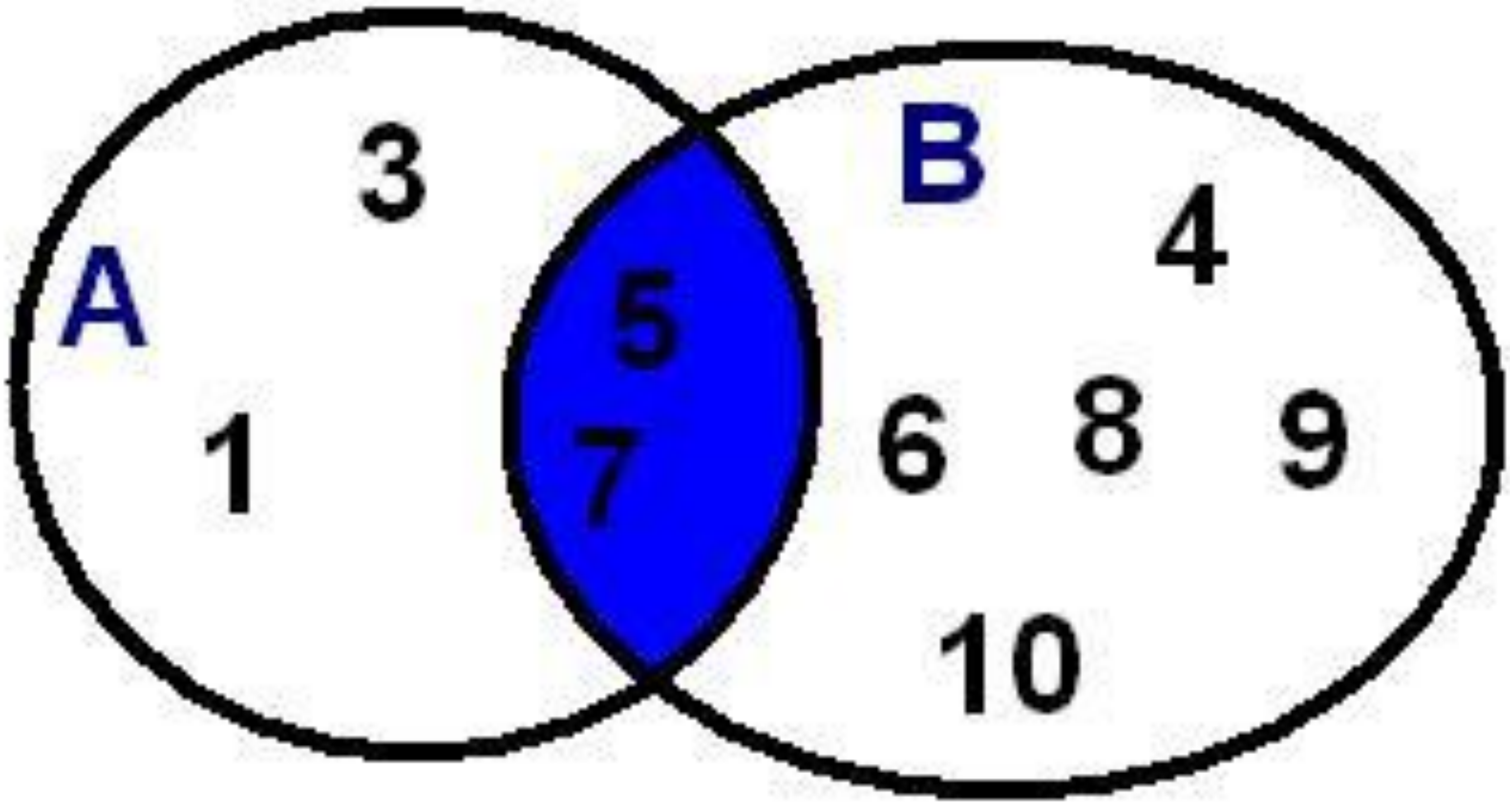


- Найти: объединение, пересечение, разность, симметрическую разность

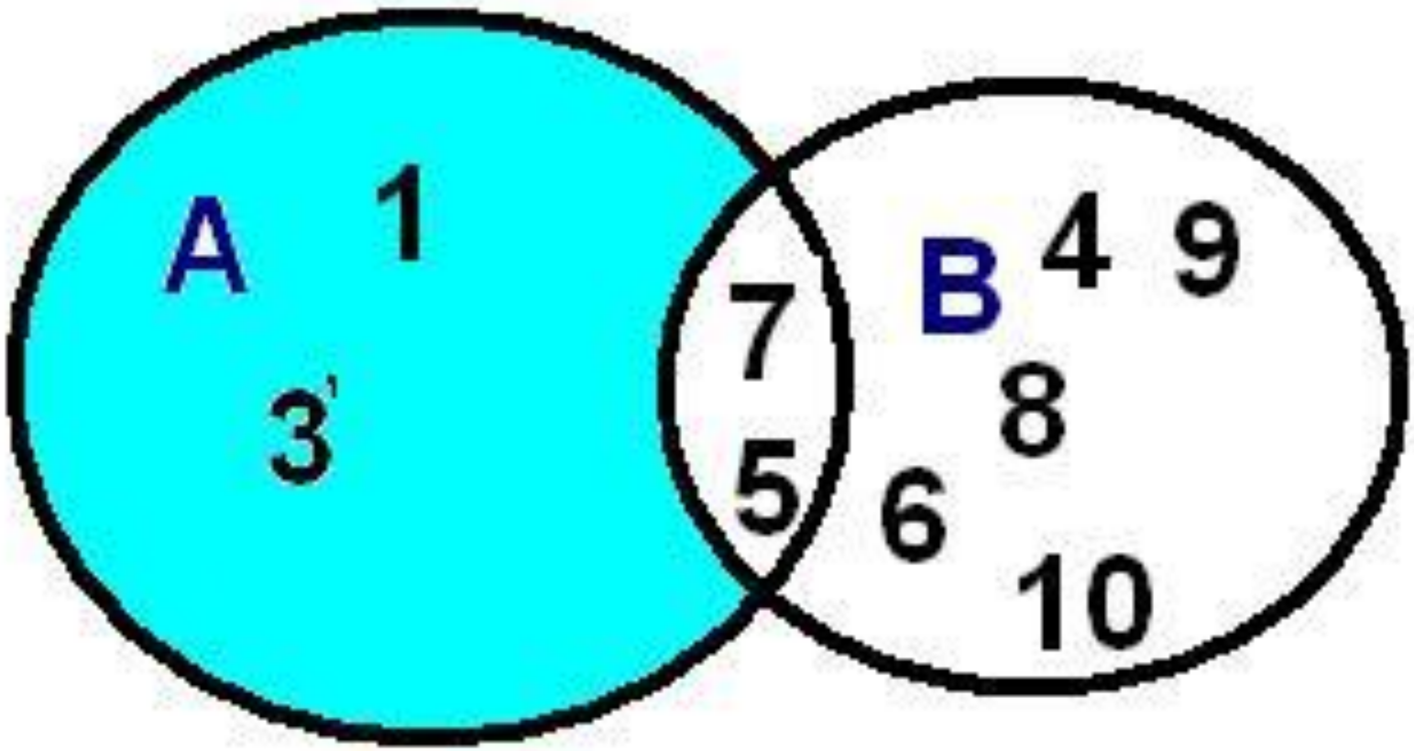
Объединение А и В



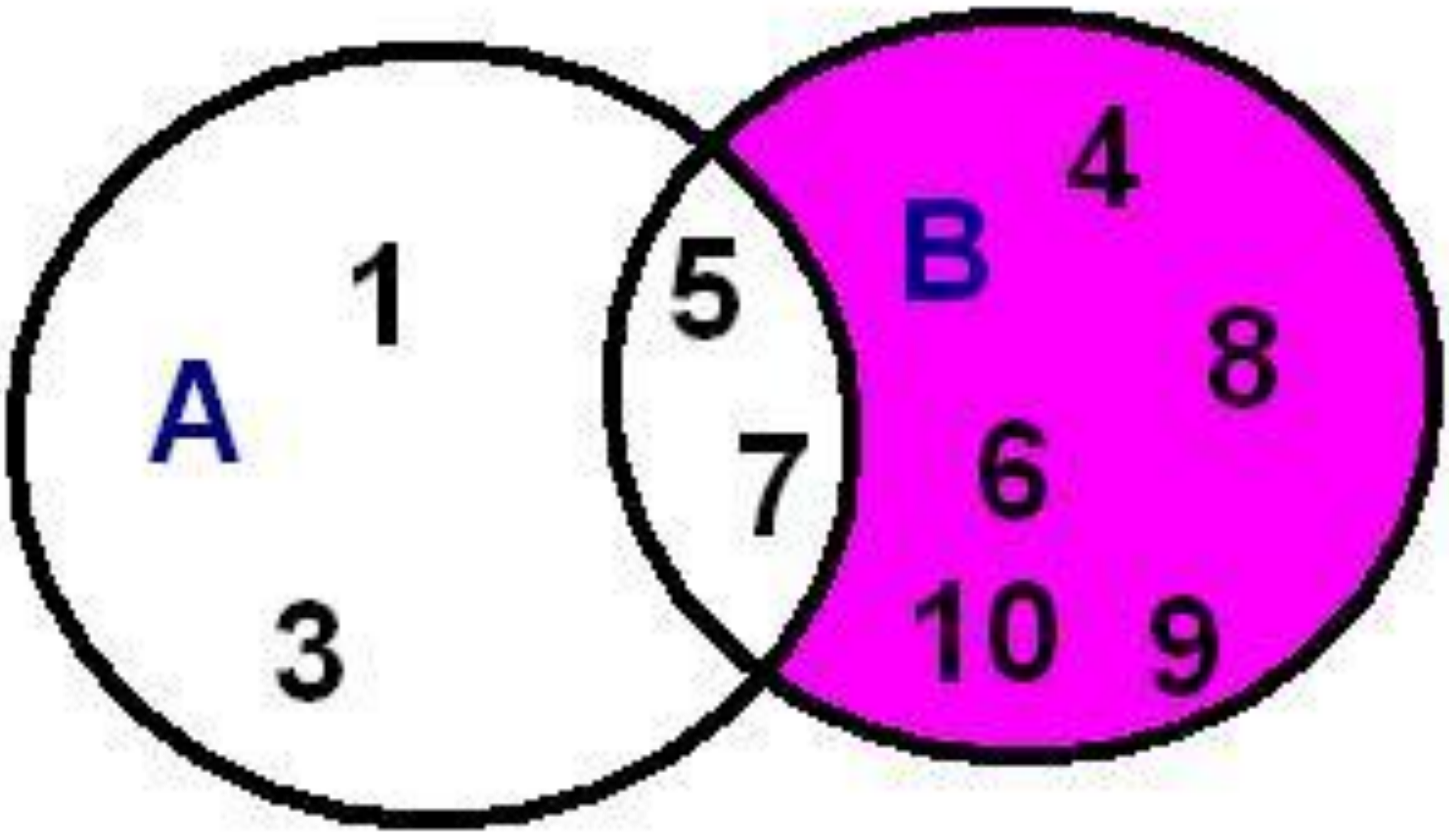
Пересечение множеств А и В



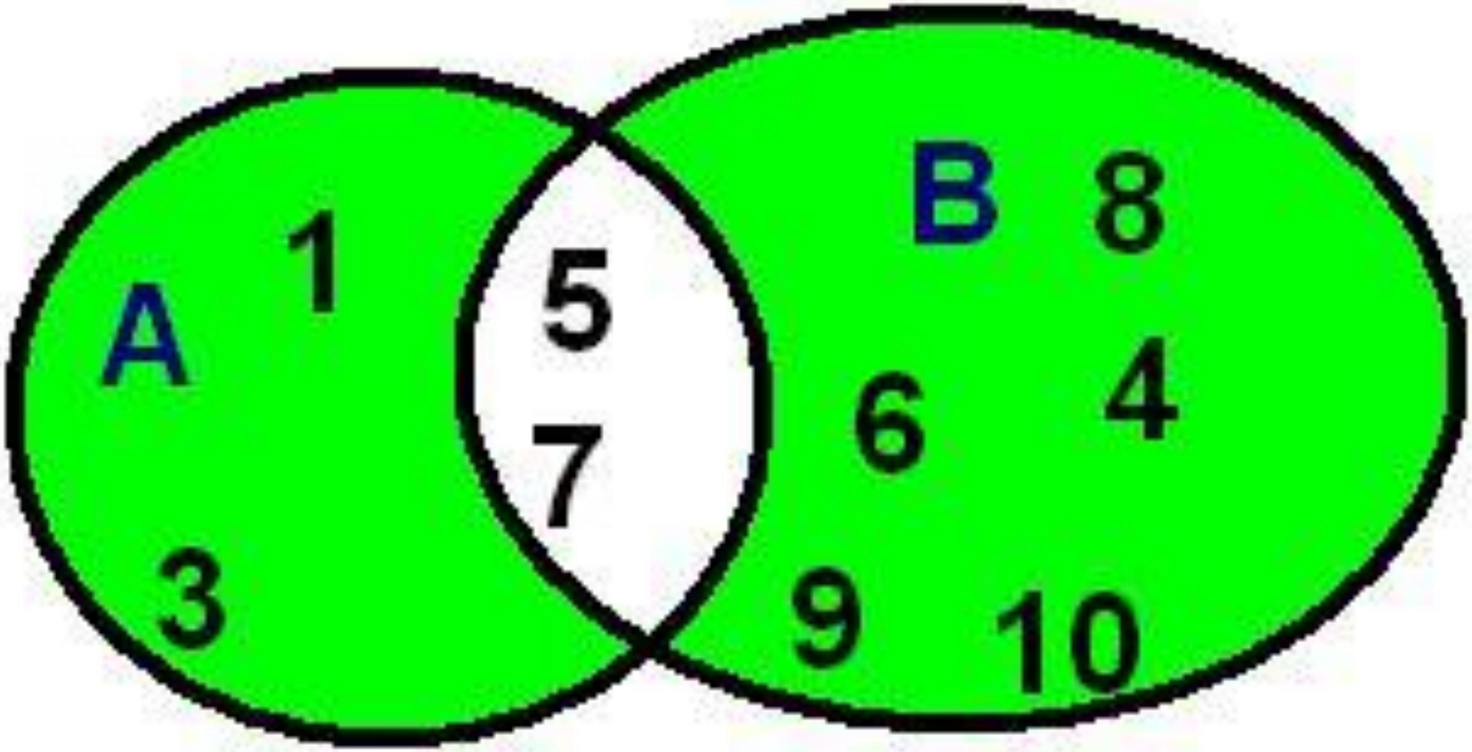
Разность A\B



Разность B\A



Симметрическая разность А и В



Пример:

На вступительном экзамене были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Суще ствуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Решение.

Пусть U — множество всех абитуриентов,

A-множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре,

B-множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии,

C-множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии.

По условию $n(U) = 1000$, $n(A) = 800$, $n(B) = 700$, $n(C) = 600$, $n(A \cap B) = 600$, $n(A \cap C) = 500$, $n(B \cap C) = 400$, $n(A \cap B \cap C) = 300$.

В множество $A \cup B \cup C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле имеем:

$n(A \cup B \cup C) = 800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900.$

Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу.

Ни одной задачи не решили

$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 1000 - 900 = 100$ (абитуриентов).

Упорядоченная пара. Декартово произведение двух множеств

1. Упорядоченная пара. Декартово произведение двух множеств

2. Соответствие между элементами множеств.

3. Способы задания соответствий

Рассмотрим задачу: используя цифры 1, 2, 3, нужно образовать все возможные двузначные числа.

Запись каждого числа состоит из двух цифр, причем *существенен* порядок их следования (числа 12 и 21 различны).

В том случае, когда важен порядок следования элементов множества, в математике говорят об *упорядоченных наборах элементах*. В данном случае имеем дело с *упорядоченной парой.*

Упорядоченную пару, образованную из элементов a, b обозначают $(a; b)$.

a — первая компонента пары, b — вторая компонента пары.

Определение. **Пары** $(a; b)$ **и** $(c; d)$ **равны** тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

В ранее мы встречались с упорядоченными парами при использовании прямоугольной системы координат, в которой каждая точка имеет координаты, представляющие собой пару чисел.

Задача. A **= {1; 2},** B **= {5; 6}.** Составьте все возможные двузначные числа, число десятков которого принадлежит множеству A, а число единиц – множеству B.

Такими числами будут **15, 25, 16, 26**.

В процессе решения этой задачи из двух данных множеств A и B образовано новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел **(1; 5), (2; 5), (1; 6), (2; 6).** Это новое множество называют **декартовым произведением** множеств A и B.

Определение. **Декартовым произведением множеств A и B** называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.

Записывают: $\mathbf{A \times B = \{(a; b) : a \in A, b \in B\}}$

Пример. $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4\}$. $A \times B = \{(1; 3); (2; 3); (1; 4); (2; 4)\}$; $B \times A = \{(3; 1); (3; 2); (4; 1); (4; 2)\}$. $A \times B \neq B \times A$, следовательно, декартово умножение не обладает свойством коммутативности.

Аналогично рассуждая, можно показать, что для этой операции не выполняется свойство ассоциативности.

Декартово произведение множеств есть множество, поэтому, как и всякое множество, его можно задать перечислением и указанием характеристического свойства.
Элементы декартова произведения удобно записывать при помощи таблицы:

(1; 2)	(1; 4)
(2; 3)	(2; 4)

Каждый элемент множества **A ´ B** записывается в клетке, стоящей на пересечении соответствующей строки и столбца.
Т.о. множество клеток этой таблицы представляет собой декартово произведение множеств **A ´ B**.

В математике понятие *отношения* используется для обозначения какой-либо связи между объектами. **Отношение** есть некоторое множество упорядоченных пар ***(x,y)***, где $x \in X$, а $y \in Y$.

Соответствие между элементами множеств

Способы задания соответствий

Учащимся некоторого класса был задан вопрос, какие кружки они посещают. Их ответы были занесены в таблицу:

	Музыкальный	Рисования	Танцевальный	Выжигания
Артем				
Борис				
Виктор				

В таблице отметим, что Артем посещает 3 кружка, а Виктор только один; больше всего из опрошенных посещают кружок рисования и никто из них не посещает кружок выжигания…

В данном примере рассматриваются два множества: $X = \{А; Б; В\}$ – множество имен и $Y = \{м; р; т; в\}$ – множество названий кружков.

При помощи слов ***«посещать какой-либо кружок»*** между элементами этих множеств установлена некоторая связь, или, как говорят в математике, ***соответствие***. В таблице это соответствие выделим заштрихованными клетками, а множество всех клеток таблицы является декартовым произведением множеств X и Y.

Соответствие между множествами X и Y мы установили, имея 3 множества:

множество $\boldsymbol{X}$ – множество имен,

множество $\boldsymbol{Y}$ – множество названий кружков и

подмножество декартова произведения $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.

Определение. ***Соответствием*** между множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называется любое подмножество $\boldsymbol{R}$ декартова произведения множеств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.

Множество $\boldsymbol{X}$ называют *множеством отправления* соответствия, множество **Y** – *множеством прибытия* соответствия.

Если пара $(x; y) \in R$, то говорят, что элемент y соответствует элементу x;

y является *образом элемента* x;

x является *прообразом элемента* y

Определение. Множество всех первых компонент пар, входящих в соответствие, называется **областью определения соответствия**.

Определение. Множество всех вторых компонент пар, входящих в соответствие, называется **областью значений соответствия**.

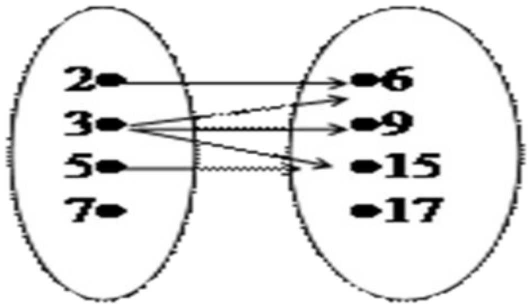
Т.к. соответствие – подмножество декартова произведения, то способы задания соответствий такие же, как и для декартова произведения.

Пример. $X = \{2; 3; 5; 7\}$, $Y = \{6; 9; 15; 17\}$

R – «x – делитель y» – соответствие задано указанием характеристического свойства;

$R = \{(2; 6); (3; 6); (3; 9); (3; 15); (5; 15)\}$ – соответствие задано перечислением. Также соответствие можно задать таблицей:

X Y				



В нашем примере элементу **3** соответствует три элемента множества ***Y*** **– 6**, **9** и **15**.

Множество, состоящее из чисел **6, 9** и **15**, называют *образом элемента* **3**.

В общем случае, образ элемента ***x*** из множества ***X*** определяется как множество

всех элементов $y \in Y$, соответствующих элементу ***x***.

Число **6** соответствует двум элементам множества ***X*** – числам **2 и 3**. Множество, состоящее из чисел **2** и **3**, называют ***полным прообразом*** элемента **6** из множества ***X***.

В общем виде: ***полный прообраз*** элемента $y \in Y$ определяют как множество

элементов $x \in X$, таких что элементу ***x*** соответствует элемент ***y***.

Определение. Множество всех элементов из множества X, имеющих непустые образы, называется областью (множеством) определения соответствия R.

Определение. Множество всех элементов из множества Y, имеющих непустой полный прообраз, называется множеством значений соответствия R.

В нашем примере: $\{2; 3; 5\}$ – множество определения; $\{6; 9; 15\}$ – множество значений.

Понятие соответствия между множествами относится к числу фундаментальных понятий математики. Оно лежит в основе определения таких важнейших понятий математики, как функция и отображение. Кроме того, в любой науке изучаются не только сами объекты, но и связи между ними.

Взаимно однозначное соответствие

Определение. **Отображением f** множества X **в** множество Y называется такое соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует *единственный элемент* $y \in Y$.

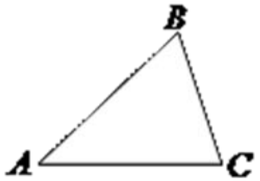
Определение. Если множество значений отображения f совпадает с множеством прибытия этого отображения, то f называют *отображением множества X* ***на*** *множество Y*.

В математике такое отображение называется ***сюръективным***.

Определение. Если полный прообраз каждого элемента $y \in Y$ содержит не более одного элемента (может быть и пустым), то такое отображение называется ***инъективным***.

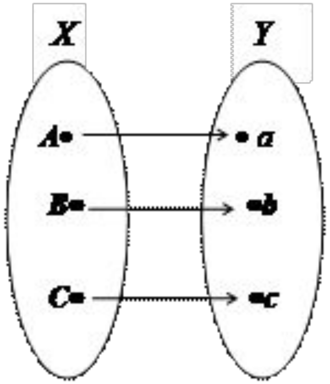
Определение. Отображение, обладающее свойствами инъективности и сюръективности, называется ***взаимно однозначным***.

Другими словами: отображение f множества X на множество Y называется ***взаимно однозначным***, если двум различным элементам x_1 и x_2 множества X соответствует два различных элемента y_1 и y_2 множества Y.

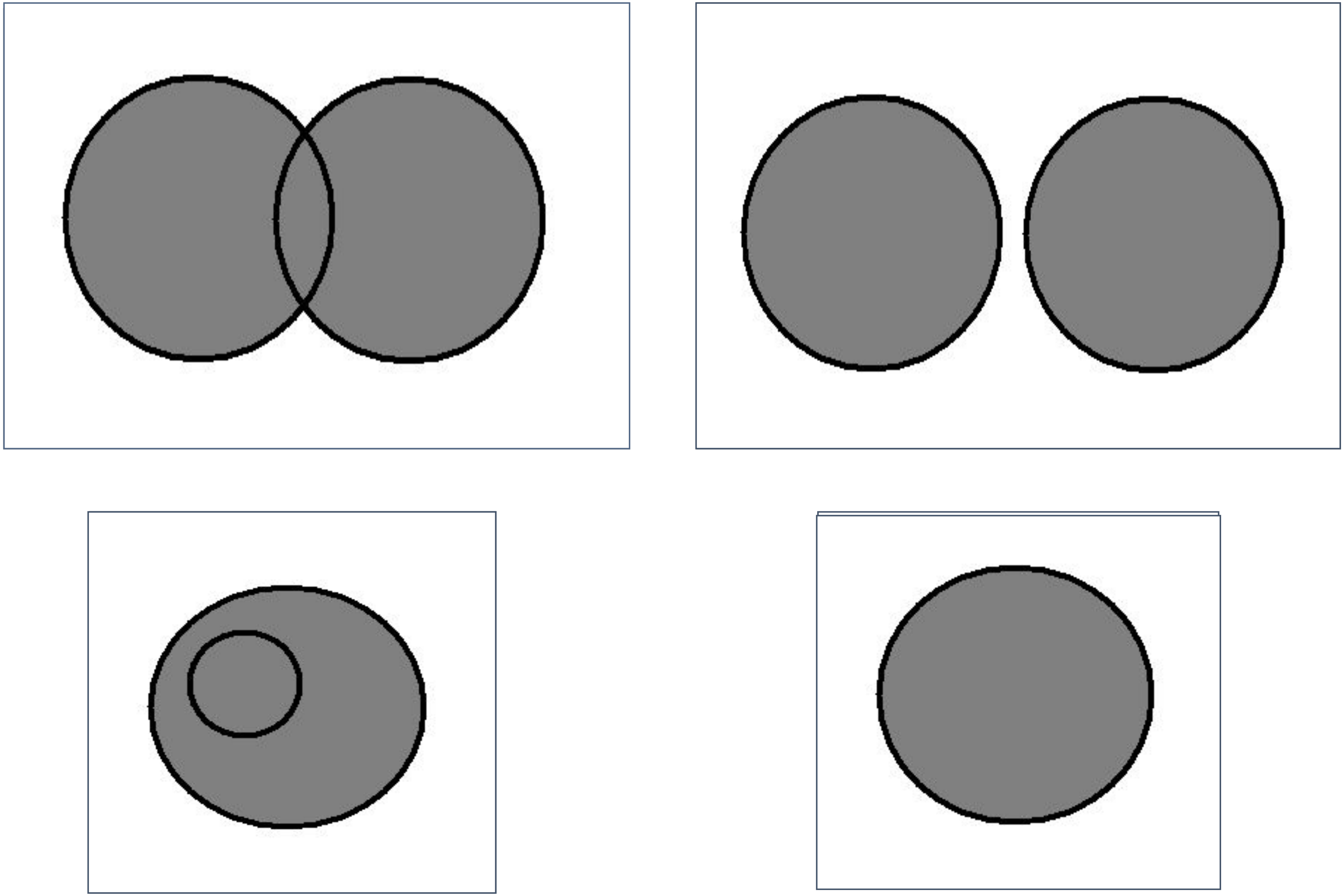


Пример. $\boldsymbol{X}$ – множество вершин треугольника ABC,
$\boldsymbol{Y}$ – множество сторон треугольника ABC.

Поставим в соответствие каждой вершине треугольника его сторону, лежащую напротив этой вершины. Данное отображение взаимно однозначно, при этом каждый элемент множества X имеет единственный образ, а каждый элемент множества Y – единственный прообраз.



ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ



A – четные натуральные числа
B – двузначные числа

Найти объединение этих множеств.

$A \cup B$ – быть четным натуральным или двузначным числом

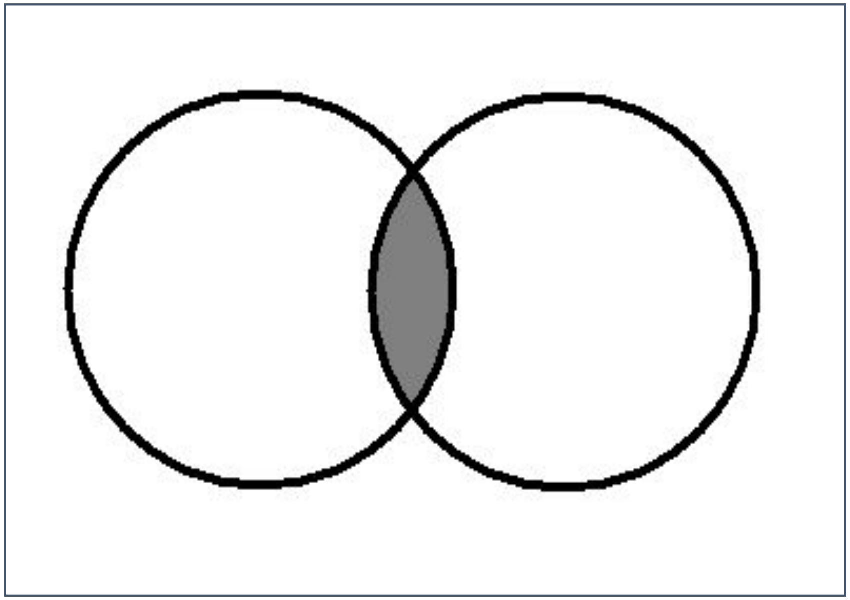
Пример: 8 и 32

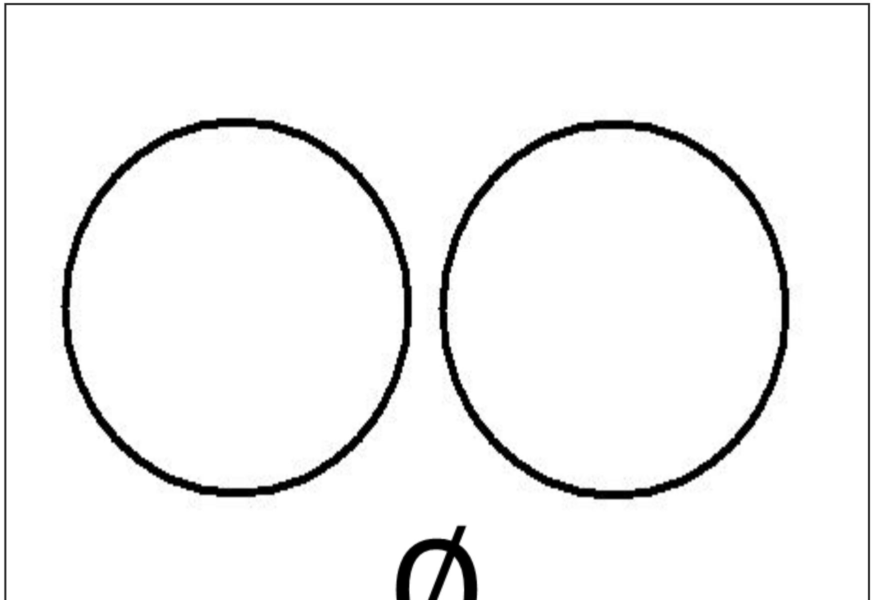
Определение: **Пересечением** множеств **A** и **B** называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

Пересечение множеств обозначается $\cap$

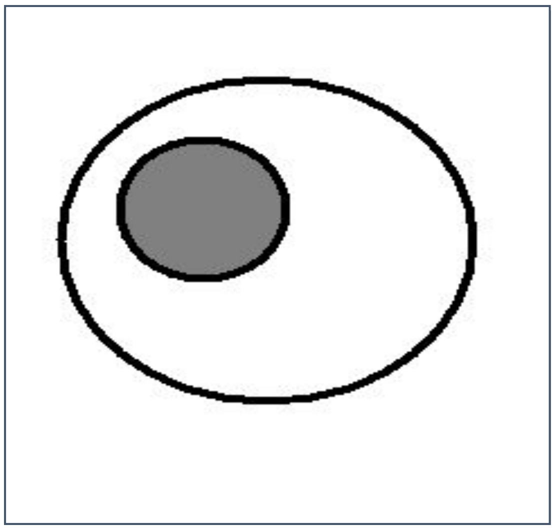
Пример: $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

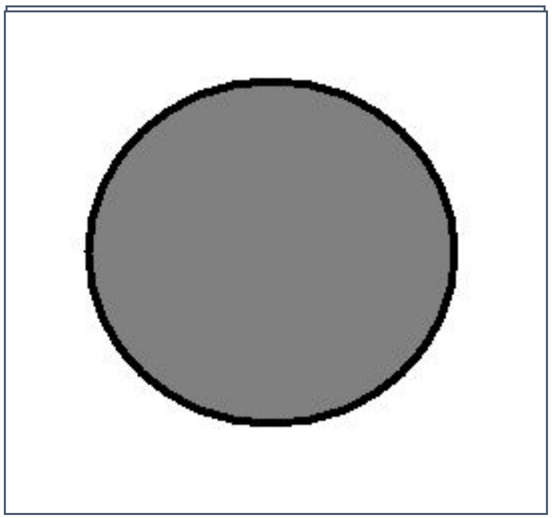
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ





∅





А – четные натуральные числа
В – двузначные числа

Найти пересечение этих множеств.

А $\cap$ В – быть четным натуральным и двузначным числом

Пример: 32

БЛИЦ-ОПРОС

БЛИЦ-ОПРОС

Какие названия применяются для обозначения множеств животных?

БЛИЦ-ОПРОС

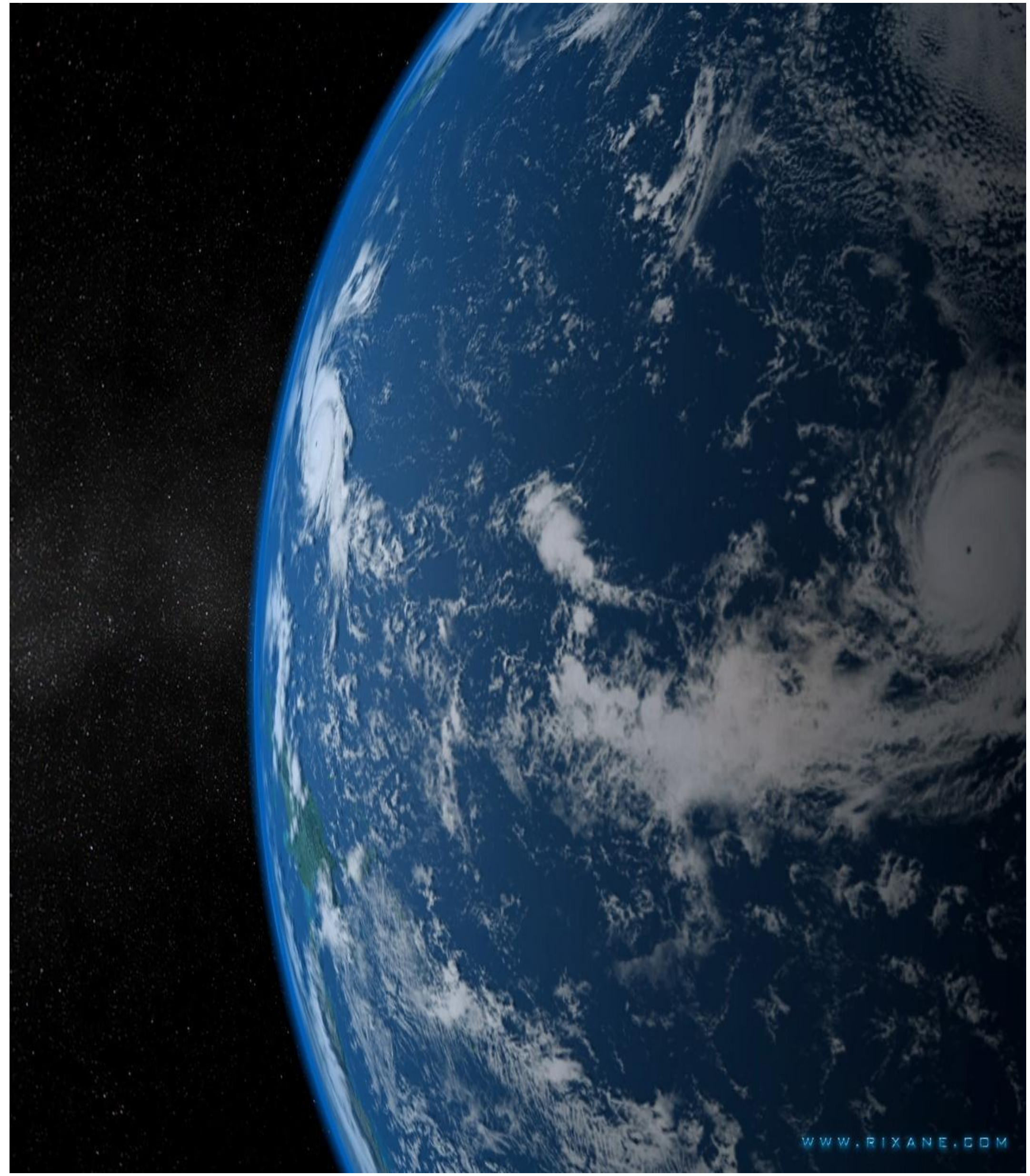
Какие названия применяются для обозначения множеств военно-служащих?

БЛИЦ-ОПРОС

Как называется множество цветов, стоящих в вазе?

БЛИЦ-ОПРОС

Как называется множество точек земной поверхности, равноудаленных от обоих полюсов?



БЛИЦ-ОПРОС

Как называется множество населённых людьми мест?

БЛИЦ-ОПРОС

Как называется множество картин?

БЛИЦ-ОПРОС

Как называется множество документов?

БЛИЦ-ОПРОС

Какие названия применяют для обозначения множеств кораблей?

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

Даны множества:

A = {2; 3; 8},

B = {2; 3; 8; 11},

C = {5; 11}.

Найдите: 1) $A \cup B$; 2) $A \cup C$; 3) $C \cup B$.

Даны множества:

A = {a, b, c, d},

B = {c, d, e, f},

C = {c, e, g, k}.

Найдите: $(A \cup B) \cup C$.

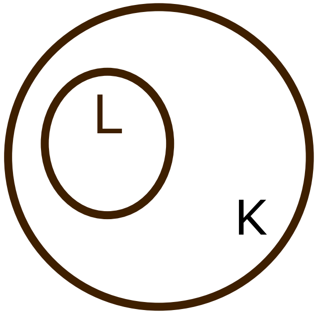
Даны множества:

А – множество всех натуральных чисел, кратных 10,

В = {1; 2; 3;…, 41}.

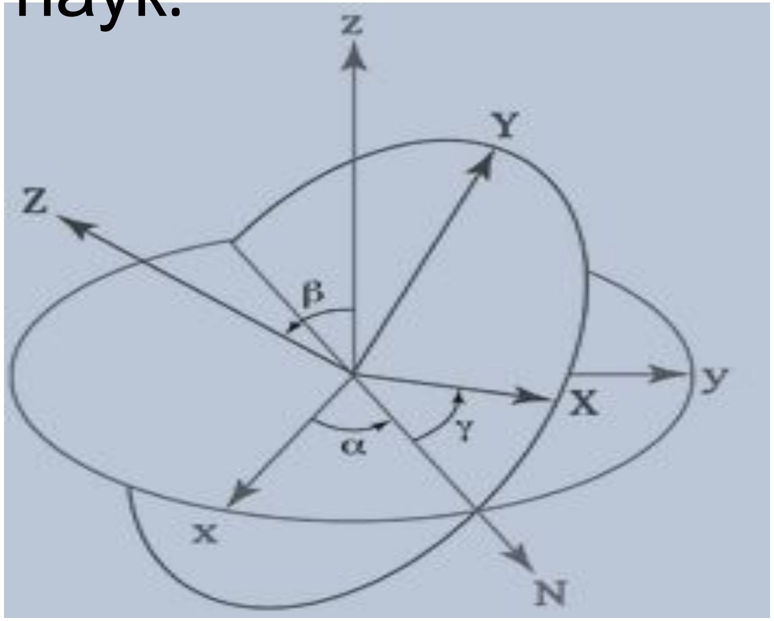
Найдите А∩В.

Решение задачи с помощью кругов Эйлера



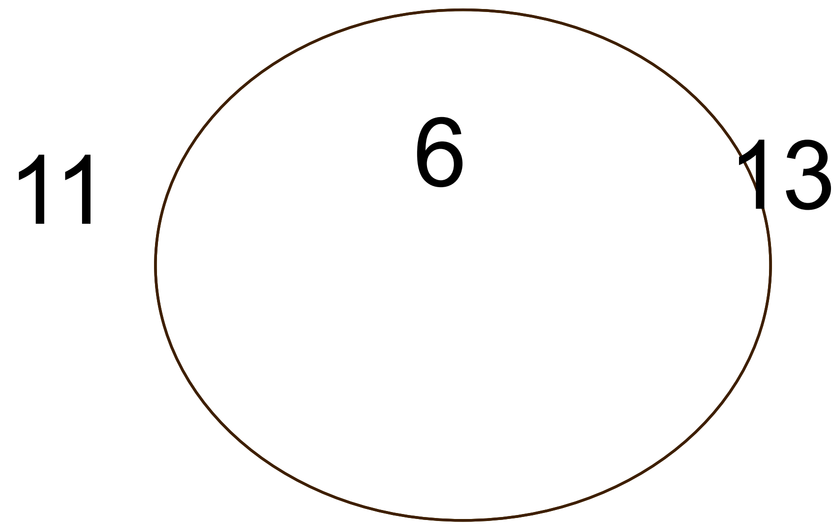
Леона́рд Э́йлер — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11



В классе 30 человек, каждый из которых поёт или танцует. Известно, что поют 17 человек, а танцевать умеют 19 человек. Сколько человек поёт и танцует одновременно?

Всего 30



поют 17

танцуют 19

17+19=36, всего 30 36-30=6

Решение

Пусть А - это множество учеников, умеющих петь. Количество элементов в нём по условию равно n = 17. Пусть В - множество учеников, умеющих танцевать. Количество элементов в нём - m = 18. Множество совпадает со всем классом, т.к. каждый ученик в классе поёт или танцует. $A \cap B$ - это множество тех учеников класса, которые поют и танцуют одновременно. Пусть их количество равно k.

Согласно формуле доказанной выше

n + m- k = 17+ 19- k = 30 k = 6.

Ответ: 6 учеников в классе поют и танцуют одновременно.

На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык, а 23 - оба языка. Сколько человек в фирме не знают ни английского, ни немецкого языков?

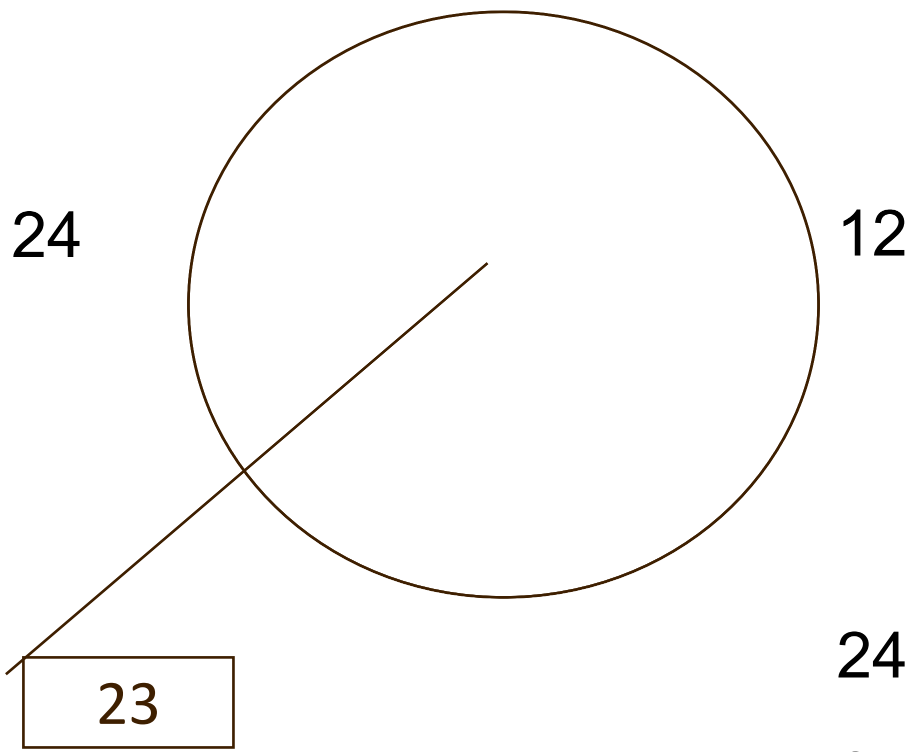
Английский 47

Всего 67

Немецкий 35

47-23=24

35-23=12



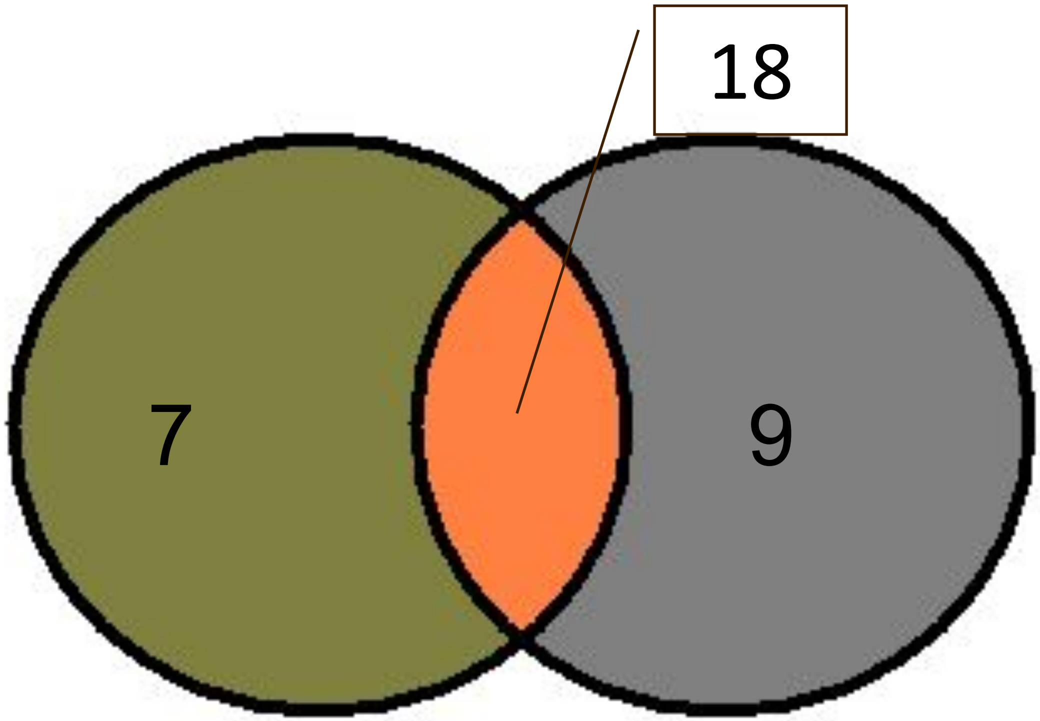
24+12+23=59

67- 59=8

Каждый учащийся в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучают 25 учащихся, французский — 27 учащихся, а два языка — 18 учащихся. Сколько учащихся в классе?

Англий

Только англ
25 – 18 = 7

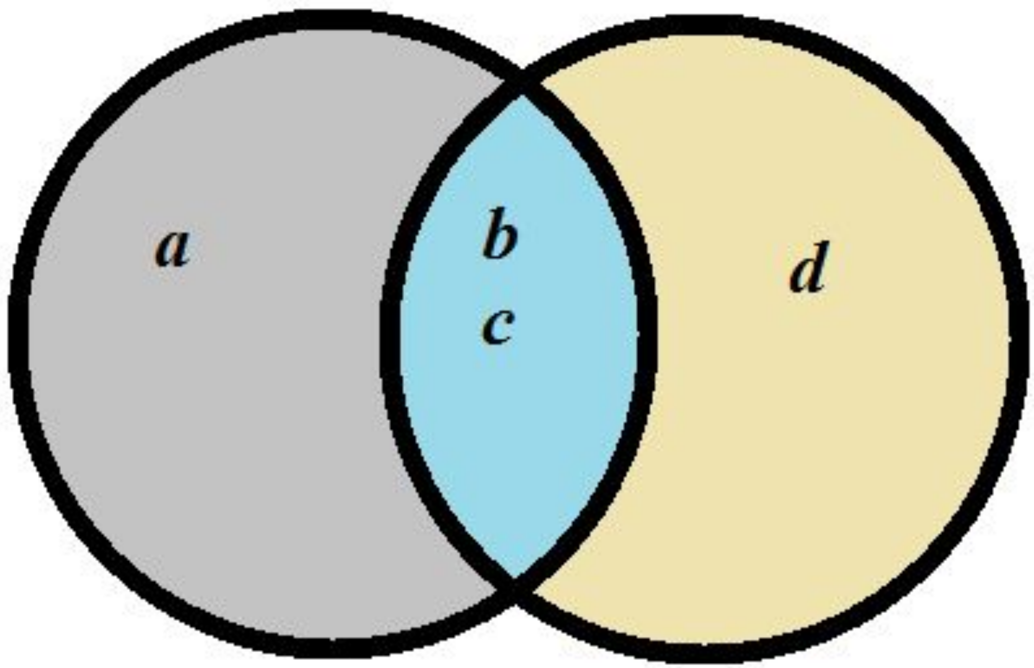


й 27

немецкий
= 9

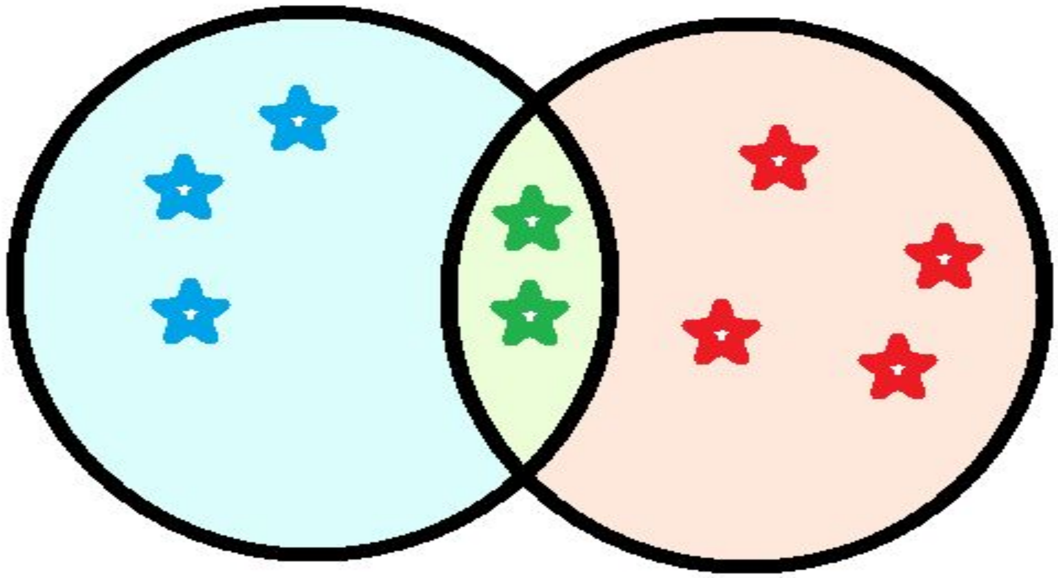
Ответ: в классе 34 ученика

Расположите 4 элемента в двух множествах так, чтобы в каждом из них было по 3 элемента.



ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

Множества А и В содержат соответственно 5 и 6 элементов, а множество $A \cap B$ – 2 элемента. Сколько элементов в множестве $A \cup B$?

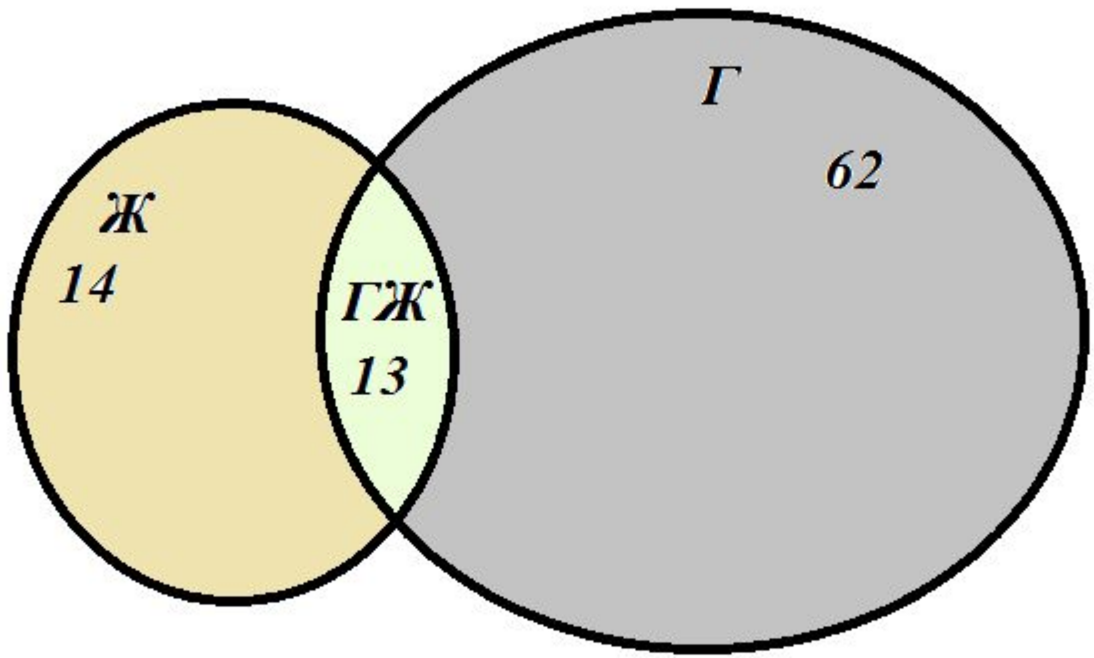


Объединение содержит 9 элементов

Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или

газету, или журнал, или и то и другое вместе. 75 семей

выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету. Скольк



Всего: 14 + 13 + 62 =89

На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9 – го

класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 7 человек, а 11 учеников выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили норматив: а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) по прыжкам при условии, что не выполнен норматив по бегу?

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекаются коллекционированием?

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, посмотрев спектакли А, В или С. При этом спектакли А, В, С видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе?

ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ

В воскресенье 19 учеников нашего класса побывали в

планетарии, 10 – в цирке и 6 – на стадионе. Планетарий и цирк посетили 5 учеников; планетарий и стадион - 3; цирк и стадион - 1. Сколько учеников в нашем классе, если никто не успел посетить все три места, а три ученика не посетили ни одного места?

ПОДВЕДЕМ ИТОГИ

ЗНАНИЯ

МНОЖЕСТВО

ЭЛЕМЕНТ МНОЖЕСТВА

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

УМЕНИЯ

НАХОДИТЬ ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

НАХОДИТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

ИЗОБРАЖАТЬ С ПОМОЩЬЮ КРУГОВ ЭЙЛЕРА-ВЕННА

РЕШАТЬ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИМЕЮЩИХСЯ ЗНАНИЙ

Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника.
- Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

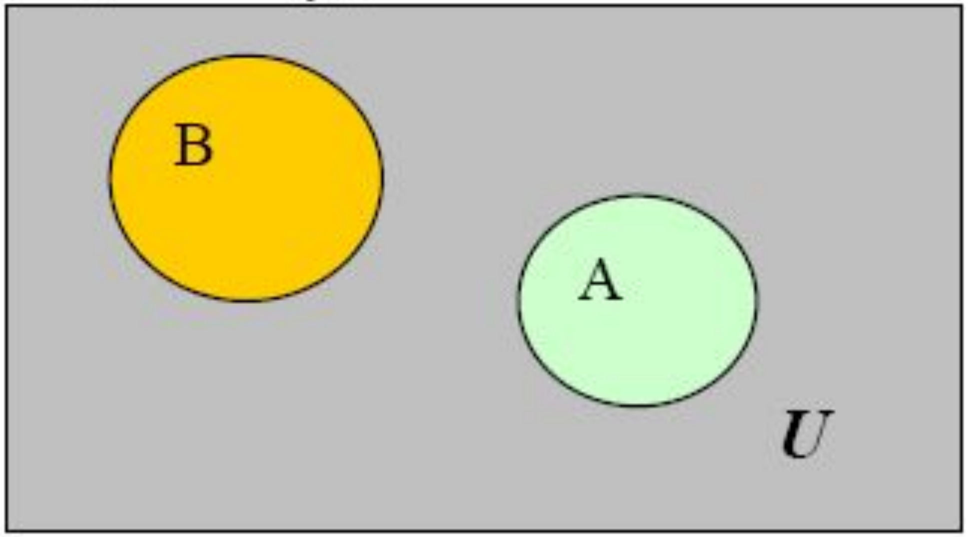


Рис. 1

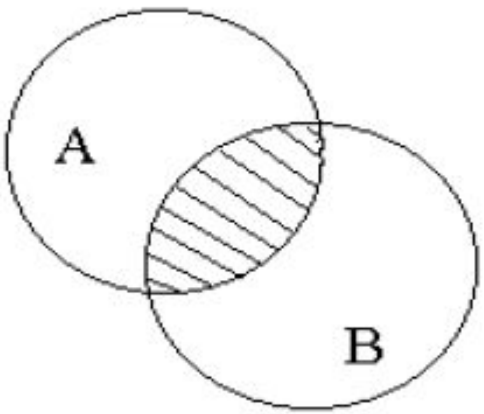


Рис.2 Пересечение множеств

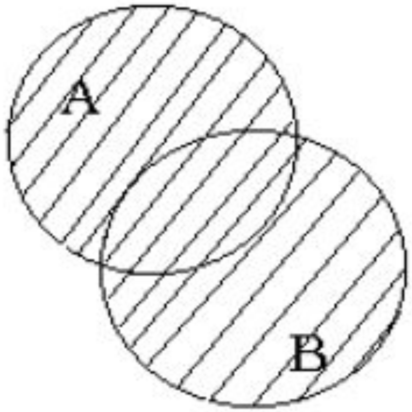


Рис.3 Объединение множеств

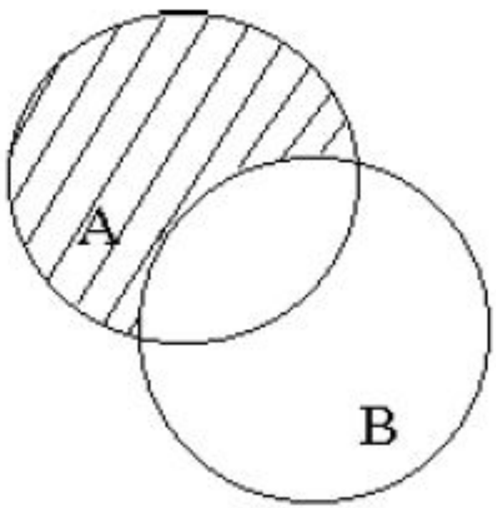


Рис.4 Разность множеств A\B

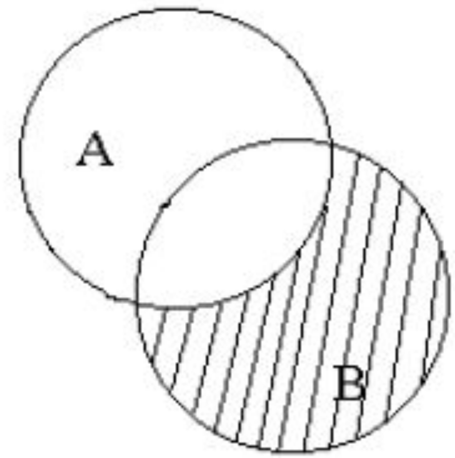


Рис.5 Разность множеств B\A

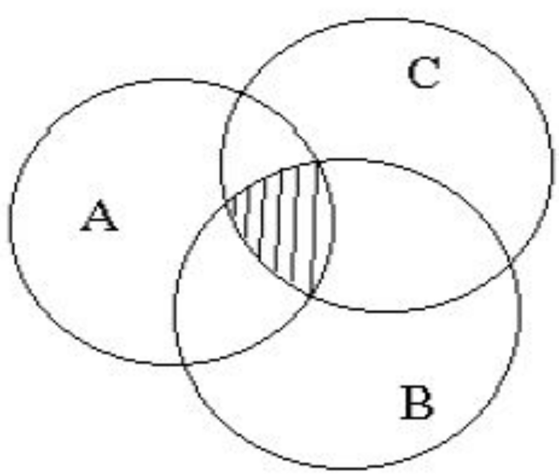


Рис.6 Пересечение трех множеств

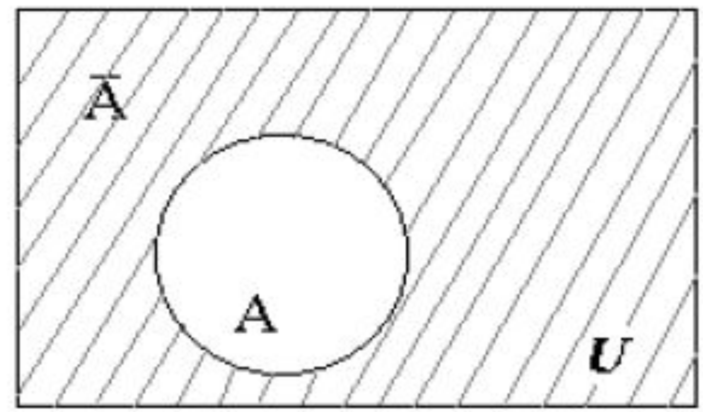


Рис.7 Дополнение множества (множество ***не-А***)

- Формула для подсчета числа элементов в объединении трех множеств:
- m (A∪B∪C) = m (A) + m (B) + m (C) - m (A∩B) – m (A∩C) – m (B∩C) + m (A∩B∩C)

Примеры

- **Пример 1.** Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.
- Решение: A={1, 3, 5}, *m* (A)=3.

Пример 2

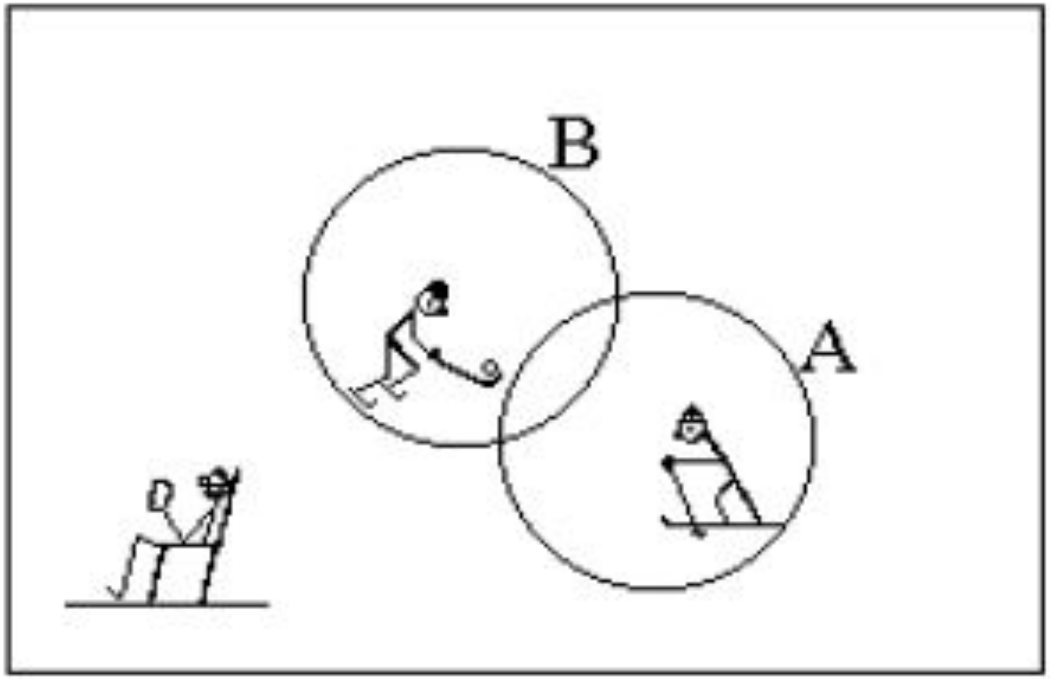
- Даны множества $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B=\{1, 3, 4, 8,16\}$, $C=\{12, 13, 15, 16\}$, $D=\{0, 1, 20\}$.
- Найти $A\cup B$, $C\cup D$, $B\cap C$, $A\cap D$, $A\setminus C$, $D\setminus B$, $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$, $B\cup D\cap C$, $A\cap C\setminus D$.
- **Решение:**
- Учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем объединение или разность.
- Получим
- $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$,
- $C\cup D=\{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$,
- $B\cap C=\{16\}$, $A\cap D=\varnothing$, $A\setminus C=\{2, 3, 5, 8\}$, $D\setminus B=\{0, 20\}$,
- $A\cup B\cup C=\{1, 2, 3,4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$,
- $A\cap B\cap C=\varnothing$, $B\cup D\cap C=\{1, 3, 4, 8, 16\}$, $A\cap C\setminus D=\{13, 15\}$

Пример 3.

- Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?
- Решение: Пусть А – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, В – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию m (А)=210, m (В)=180, m $(A \cup B)=250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$.
- Из формулы (2) находим m $(A \cap B)$ = m (A) + m (В) - m $(A \cup B)$ = 210 + 180 – 250 = 140.

Пример 4.

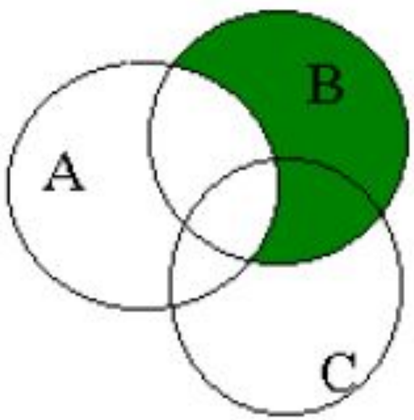
- В школе 1400 учеников.
- Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках.
- Не умеют кататься 60 учащихся.
- Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?
- Решение: Множество учеников школы будем считать основным множеством ***U***, А и В – соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках .


B
A

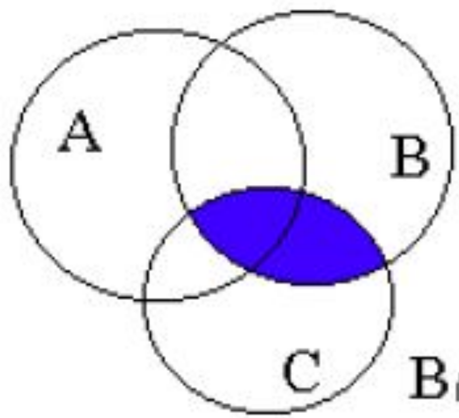
- Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $A' \cap B' = (A \cup B)'$
- $m\,(A \cup B) = m(\boldsymbol{U}) - m\,(A \cup B)' = 1340.$
- $m\,(A \cap B) = m\,(A) + m\,(B) - m\,(A \cup B) = 862$

Пример 5. Показать на кругах Эйлера множество
$(A'\backslash B')\cup(B\cap C)$.

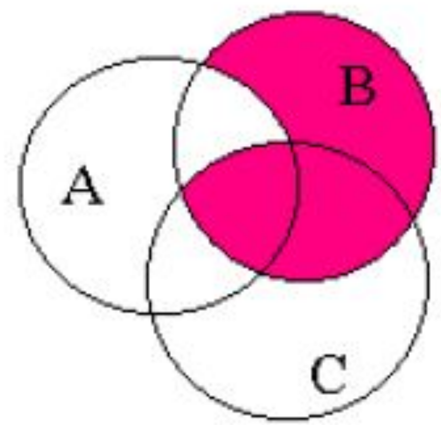
<u>Решение:</u>



$A'\backslash B'$



$B\cap C$



$(A'\backslash B')\cup(B\cap C)$